

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ  
И МОЛОДЕЖНОЙ ПОЛИТИКИ

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра механики

**Я.И. Рудаев**

# КРУЧЕНИЕ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

**Учебное пособие**

Бишкек 2008

УДК 539.3;624,04  
Р 83

Рецензенты: докт. физ.-мат. наук, проф. *С.А. Абдрахманов*  
докт. физ.-мат. наук, проф. *Б.А. Рычков*

Печатается по решению кафедры механики  
и РИСО КРСУ

*Рекомендовано к изданию решением УМО  
Министерства образования, науки и молодежной политики  
Кыргызской Республики*

**Рудаев Я.И.**  
**Р 83** КРУЧЕНИЕ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ. Учебное пособие. – Бишкек:  
КРСУ, 2008. –

ISBN

Систематизированы современные взгляды на кручение упругих стержней. С позиций общих уравнений теории упругости проанализированы элементарные решения по кручению валов круглого сечения. Изложен подход Сен-Венана к задаче о кручении стержней произвольного сечения. Подробно рассмотрена теория кручения тонкостенных стержней закрытого и открытого профилей.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная механика», а также может быть полезно для аспирантов и преподавателей соответствующего профиля.

ISBN

© КРСУ, 2008 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Теория упругости как наука ставит своей целью определение напряженно-деформированного состояния в идеально упругом теле при действии на него внешних сил.

Основные материалы, применяемые в технике, при обычных температурах и при напряжениях, не превышающих предела упругости, можно считать с достаточной точностью идеально упругими.

В курс теории упругости обычно включается исследование общих свойств напряженного и деформированного состояний сплошных сред и частные задачи, требующие для своего решения более строгих и сложных математических приемов по сравнению с применяемыми в курсе сопротивления материалов.

Общие уравнения теории упругости были получены Навье и Коши (1821–1822 гг.). В дальнейших исследованиях по теории упругости приняли участие многочисленные ученые различных стран.

Предлагаемая разработка посвящена очень важному в механике упругих деформаций разделу, связанному с решением задач кручения стержней.

Применение уравнений теории упругости к решению практических задач связано с именем Сен-Венана. Им разработан полуобратный метод, с привлечением которого решена, в частности, задача о кручении призматических стержней (1855 г.).

Большой интерес вызывает так называемое стесненное кручение, которое отличается от свободного, исследованного Сен-Венаном, тем, что деформации различных поперечных сечений оказываются разными. Такое кручение тесно связано с деформацией тонкостенных стержней открытого профиля (С.П. Тимошенко, В.З. Власов).

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н., профессору Б.А. Рычкову за ценные замечания, а также инж. Н.А. Пахомовой, принявшей активное участие в подготовке рукописи к печати.

## 1. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 1.1. Формулировка пространственной задачи теории упругости

Математической формулировкой пространственной задачи теории упругости предусматривается определение 15 неизвестных функций координат:

- шести составляющих напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x(x, y, z); & \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y, z); \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y, z); & \tau_{yz} &= \tau_{yz}(x, y, z); \\ \sigma_z &= \sigma_z(x, y, z); & \tau_{zx} &= \tau_{zx}(x, y, z); \end{aligned}$$

- шести составляющих деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_x(x, y, z); & \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}(x, y, z); \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y(x, y, z); & \gamma_{yz} &= \gamma_{yz}(x, y, z); \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_z(x, y, z); & \gamma_{zx} &= \gamma_{zx}(x, y, z); \end{aligned}$$

- трех составляющих перемещений:

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z).$$

Для нахождения перечисленных функций имеются:

- три дифференциальных уравнения равновесия Навье-Коши:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0; \end{aligned} \tag{1.1}$$

- шесть уравнений Коши, выражающих зависимость между компонентами деформаций и перемещений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

- шесть уравнений закона Гука, устанавливающих связь между компонентами деформаций и напряжений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}; \end{aligned} \quad (1.3)$$

или в обратной форме:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \varepsilon_0 + 2G \varepsilon_x; & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda \varepsilon_0 + 2G \varepsilon_y; & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda \varepsilon_0 + 2G \varepsilon_z; & \tau_{zx} &= G \gamma_{zx}; \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $F_x, F_y, F_z$  – проекции объемных сил на координатные оси;  $E$  – модуль Юнга,  $G$  – модуль сдвига;  $\mu$  – коэффициент Пуассона,

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad (1.5)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}; \quad (1.6)$$

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}. \quad (1.7)$$

Функции напряжений должны удовлетворять граничным условиям:

$$\begin{aligned} X_\nu &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ Y_\nu &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ Z_\nu &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n; \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $X_\nu, Y_\nu, Z_\nu$  – проекции внешних сил на координатные оси на площадке с нормалью  $\bar{\nu}$ , направляющие косинусы которой равны  $l, m, n$ .

Функции деформаций должны удовлетворять условиям сплошности Сен-Венана (неразрывности деформаций):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Решение записанной системы уравнений можно отыскивать в перемещениях, напряжениях и смешанной форме.

## 1.2. О методах решения задач теории упругости

Записанная в предыдущей главе система дифференциальных уравнений и граничные условия дают возможность, в принципе, определить составляющие напряжений, деформаций и перемещений.

Наиболее просто решается так называемая обратная задача теории упругости, которая позволяет по известным функциям перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  вычислить компоненты деформаций (1.2), напряжений (1.4) и внешних сил, вызывающих указанные перемещения (1.1). Перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  должны быть заданы как непрерывные функции координат, имеющие непрерывные производные до третьего порядка включительно. Тогда уравнения (1.9) неразрывности деформаций будут всегда удовлетворены. В случае обратной задачи выполняются только дифференцирование и алгебраические операции.

В технических приложениях, как правило, рассматривается прямая задача, в рамках которой по заданным внешним воздействиям требуется определить поле напряжений и деформаций. Поскольку независимых компонент напряжений шесть, а уравнений равновесия три (1.1), то можно получить бесконечное множество напряженных состояний, удовлетворяющих уравнениям (1.1) и граничным условиям (1.8). Для установления реального напряженного состояния в упругом теле необходимо, чтобы деформация при этом была непрерывной. Следовательно, компоненты деформаций должны удовлетворять уравнениям сплошности (1.9). Присоединив шесть уравнений (1.9) к трем уравнениям (1.1) и граничным условиям (1.8), получим систему уравнений, из которой определятся шесть компонент напряжений и три перемещения. Составляющие деформаций могут быть найдены из уравнений закона Гука (1.3).

Решение прямой задачи теории упругости требует интегрирования систем дифференциальных уравнений в частных производных. Можно показать, что если главный вектор и главный момент всех объемных и поверхностных сил равны нулю, то решение систем дифференциальных уравнений существует. С физической точки зрения существование решения не вызывает сомнений.

Решение уравнений теории упругости будет единственным, если упругое тело закреплено так, что не может перемещаться как абсолютно твердое и равновесие устойчиво. В случае, когда находящееся в равновесии упругое тело не закреплено, решение будет единственным для компонент напряжений и деформаций. Для перемещений такое решение не будет единственным, поскольку тело может перемещаться как абсолютно твердое, и такие перемещения не влияют на деформацию и напряженное состояние.

Таким образом, практическое решение прямой задачи связано с очень большими математическими трудностями и в настоящее время нет эффективных приемов ее решения. Конечно, можно воспользоваться численными методами интегрирования дифференциальных уравнений с привлечением компьютерной техники. Однако таким путем можно получить численные решения только некоторых конкретных задач. Имеющиеся в настоящее время результаты получены при значительном ограничении общности исследования.

Особое значение следует придать предложенному Сен-Венаном полуобратному методу. Сущность последнего заключается в том, что, исходя из физических соображений, задаются значениями некоторых напряжений или перемещений и определяют остальные величины так, чтобы были удовлетворены все уравнения теории упругости. С использованием полуобратного метода Сен-Венана получено решение ряда очень важных для приложений задач.

Условия нагружения и закрепления упругого тела могут быть разнообразными и даже не всегда точно определенными. Поэтому граничные условия, которым должны удовлетворять решения уравнений теории упругости, приводят к дополнительным, часто непреодолимым математическим трудностям.

Решения задач становятся возможными благодаря применению принципа Сен-Венана. Суть указанного принципа состоит в том, что система взаимно уравновешивающих сил, действующая на малом участке поверхности тела, вызывает напряжения, быстро убывающие по мере удаления от места приложения сил. Поэтому систему сил, действующую на малом участке поверхности тела, можно заменить другой системой, статически эквивалентной первой. Такая замена вызовет изменение напряженного состояния только в непосредственной близости к месту действия сил. Напряжения, возникающие у места приложения нагрузки и затухающие по мере удаления от него, называют местными или локальными. Под малым участком подразумевают малую по сравнению со всей поверхностью тела площадку. При этом наибольший линейный размер площадки не должен превосходить наименьшего характерного размера тела.

Пользуясь принципом Сен-Венана, можно удовлетворять граничным условиям приближенно, например, для главного вектора и главного момента заданной на малом участке тела нагрузки. Такое интегральное удовлетворение граничных условий называют их смягчением.

Кроме прямой и обратной задач, приходится рассматривать смешанную задачу, в этом случае на одних участках границы упругого тела задаются напряжения внешних поверхностных сил, а на других – перемещения. При решении смешанной задачи необходимо преодолевать те же трудности, что и при решении прямой задачи.

В инженерном деле часто приходится рассматривать стержни – упругие тела, у которых длина значительно превышает поперечные размеры. В данной работе рассматриваются задачи кручения упругих стержней.

## 2. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ ПОСТОЯННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

### 2.1. Кручение стержней круглого поперечного сечения

Элементарное решение задачи по определению напряжений в сечении кругового вала принадлежит Кулону. Это решение не привлекало уравнения неразрывности деформаций (1.8), а основывалось на некоторых правдоподобных гипотезах о перемещениях.

Предположим, что левый конец стержня круглого поперечного сечения жестко зашпелен, а на свободном конце в плоскости, перпендикулярной к продольной оси действует пара сил с моментом  $M_z$  (рис. 2.1). Деформирование стержня при таком нагружении называется кручением. При кручении ось стержня остается прямолинейной, а все остальные продольные волокна искривляются, обращаясь в винтовые линии.

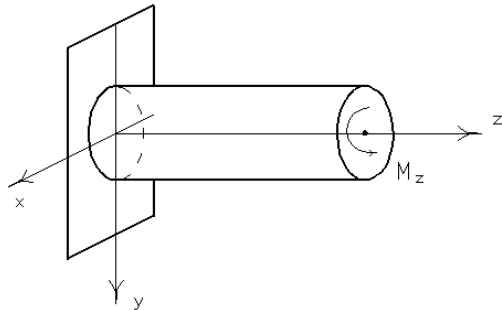


Рис. 2.1

Расположим начало координат в центре тяжести зашпеленного сечения и направим ось  $Oz$  по оси стержня, т.е. по линии, проходящей через центры тяжести всех сечений. Оси  $Ox$  и  $Oy$  расположим в плоскости сечения.

Для введения дополнительных гипотез на боковой поверхности стержня мысленно нанесем продольные линии, параллельные оси, и линии, являющиеся следами поперечных сечений на боковой поверхности (рис. 2.2 а). Результаты опытов показывают, что при кручении линии,

параллельные оси, превращаются в винтовые, а следы поперечных сечений не искривляются (рис. 2.2 б). Первоначально прямые углы между линиями, параллельными оси, и следами сечений искажаются и при деформации не остаются прямыми.

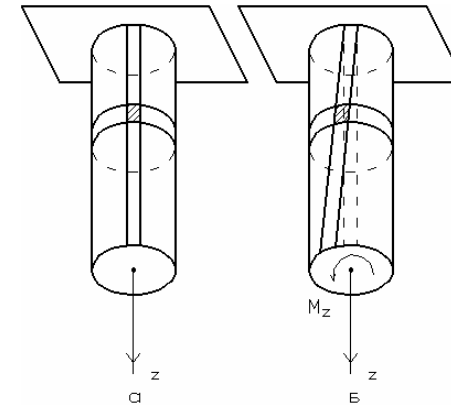


Рис. 2.2.

Введем следующие гипотезы:

- считается, что не только следы поперечных сечения при деформировании не искажаются, но и сами поперечные сечения остаются плоскими (гипотеза Бернулли);
- считается, что расстояния между поперечными сечениями при деформировании не изменяются и радиусы поперечных сечений остаются прямыми.

При таких предположениях в элементе, находящемся на поверхности стержня и ограниченном линиями, параллельными оси, и следами поперечных сечений, при деформировании первоначально прямые углы перекашиваются без изменения длин сторон. Это соответствует деформации чистого сдвига.

При чистом сдвиге по граням элемента возникают только касательные напряжения  $\tau$ .

Рассмотрим задачу определения касательных напряжений в поперечных сечениях стержня круглого сечения при кручении.

Запишем уравнения статики. Рассечем стержень на две части и оценим равновесие той части, к которой приложен крутящий момент  $M_z$ . Поскольку внешние силы приведены к паре, то и внутренние уси-

лия также приводятся к паре. Все статические уравнения, за исключением уравнения, выражающего равенство нулю моментов всех сил относительно оси  $Oz$ , тождественно удовлетворяются. Уравнение моментов относительно оси  $Oz$  имеет вид:

$$\sum M_z = M_z - \int_A \tau \cdot \rho dA = 0. \quad (2.1)$$

Здесь  $A$  – площадь сечения;  $\rho$  – текущий радиус.

Из (2.1) видно, что задача нахождения касательного напряжения  $\tau$  является статически неопределимой. Поэтому для ее решения необходимо исследовать геометрическую сторону, привлекая введенные гипотезы, и физическую сторону в форме закона Гука.

Выделим из стержня двумя сечениями перпендикулярно оси  $Oz$  элемент длиной  $dz$  в виде диска (рис. 2.3).

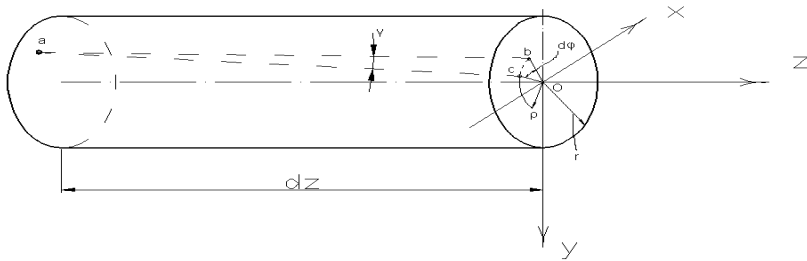


Рис. 2.3.

Рассмотрим его деформацию в предположении, что левый конец элемента неподвижен. Выделим волокно  $ab$ . После деформации оно займет положение  $ac$ . Полученный центральный угол  $boc$  обозначим через  $d\varphi$ , а угол  $bac$  будет равен деформации сдвига  $\gamma$ . Расстояния  $ob = oc$  будут равны  $\rho$ . Величина  $cb$ , с одной стороны, определится так

$$cb = \rho d\varphi;$$

с другой,

$$cb = \gamma dz.$$

Приравняв правые части этих равенств друг другу, получим:

$$\rho d\varphi = \gamma dz$$

или

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz} = \rho \theta, \quad (2.2)$$

где  $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$  – относительный угол закручивания.

Закон Гука при сдвиге  $\tau = G\gamma$  подставим в (2.2) и будем иметь

$$\tau = G\theta\rho, \quad (2.3)$$

причем, как и выше,  $G$  – модуль сдвига.

Воспользовавшись теперь уравнением равновесия (2.1) и соотношением (2.3), можем записать:

$$M_z = \int_A G\theta\rho^2 dA = G\theta \int_A \rho^2 dA.$$

Но, поскольку  $\int_A \rho^2 dA = J_p$  есть полярный момент инерции, формулу для крутящего момента перепишем так

$$M_z = G\theta J_p; \quad (2.4)$$

или

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_p}. \quad (2.4 \text{ a})$$

Величину  $GJ_p$  называют жесткостью стержня при кручении.

Подставив теперь формулу (2.4 a) в (2.3), получим явное выражение для величины касательного напряжения при кручении стержня круглого сечения в форме

$$\tau = \frac{M_z}{J_p} \rho \quad (2.5)$$

Покажем, что найденное решение удовлетворяет всем уравнениям теории упругости и в этом смысле является точным.

На рис. 2.4 показано поперечное сечение стержня.

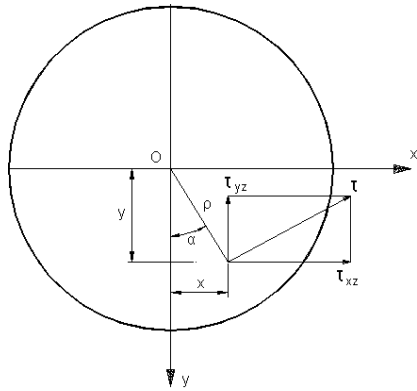


Рис. 2.4.

Компоненты напряжений равны:

$$\tau_{yz} = -\tau \sin \alpha; \quad \tau_{xz} = \tau \cos \alpha.$$

Остальные составляющие напряжений обращаются в нуль.  
На рис. 2.4 видно, что

$$\sin \alpha = \frac{y}{\rho}; \quad \cos \alpha = \frac{x}{\rho}.$$

Приняв при этом во внимание формулу (2.3) для составляющих касательных напряжений будем иметь:

$$\tau_{yz} = -G\theta \cdot x; \quad \tau_{xz} = G\theta \cdot y.$$

Рассмотрим теперь дифференциальные уравнения равновесия (1.1). Подстановка полученных зависимостей для касательных напряжений в указанные уравнения дает:

$$F_x = 0; \quad F_y = 0; \quad F_z = 0.$$

Это означает, что при кручении объемные силы должны равняться нулю.

Перейдем к граничным условиям на поверхности стержня (1.8). Нормали к этой поверхности перпендикулярны оси  $Oz$ , поэтому направляющий косинус  $n = 0$ , а  $l$  и  $m$  могут принимать любые значения. На боковой поверхности имеем:

$$X_v = 0, \quad Y_v = 0, \quad Z_v = 0.$$

С учетом этого первое и второе уравнения (1.8) обращаются в тождество, а третье принимает вид:

$$G\theta \cdot yl - G\theta \cdot xm = 0.$$

Но поскольку  $l = \sin \alpha = \frac{y}{\rho}$ ;  $m = \cos \alpha = \frac{x}{\rho}$ , то и последнее уравнение удовлетворяется тождественно. Следовательно, элементарное решение отвечает граничным условиям на боковой поверхности стержня.

Вычислим теперь составляющие деформаций. По закону Гука (1.3) имеем:

$$\varepsilon_x = 0; \quad \varepsilon_y = 0; \quad \varepsilon_z = 0;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = -\theta x; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \theta y,$$

а относительное изменение объема (1.5):

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0.$$

Так как  $\gamma_{yz}$  и  $\gamma_{xz}$  линейные функции координат соответственно  $x$  и  $y$ , а все остальные компоненты деформаций равны нулю, то уравнения неразрывности (1.7) будут удовлетворены.

Перейдем к определению перемещений. При принятой выше гипотезе плоских сечений и неизменности расстояния между ними перемещение  $w$  в направлении оси  $Oz$  равно нулю. Остаются неизвестными компоненты  $u$  и  $v$ . Но выше установлено, что

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

Следовательно,  $u$  не зависит от  $x$ , а  $v$  – от  $y$ . Иными словами

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = -\theta \cdot x;$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} = \theta \cdot y.$$

Отсюда,

$$u = \theta \cdot yz + \chi(x, y); \quad v = -\theta \cdot xz + \xi(x, y).$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0.$$

Следовательно,  $\chi$  не зависит от  $x$ , а  $\xi$  – от  $y$ .

Далее,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \theta \cdot z + \frac{\partial \chi}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\theta \cdot z + \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

и условие  $\gamma_{xy} = 0$  принимаем вид

$$\theta \cdot z + \frac{\partial \chi}{\partial y} - \theta \cdot z + \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

или

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Из последнего равенства очевидно, что  $\frac{\partial \chi}{\partial y}$  и  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  должны быть

постоянными величинами:  $\frac{\partial \chi}{\partial y} = C$ ; и  $\frac{\partial \xi}{\partial x} = -C$ . Поэтому

$$u = \theta \cdot yz + C; \quad v = -\theta \cdot xz + C.$$

Конец стержня  $z = 0$  жестко защемлен и при  $z = 0$  имеем  $u = 0$ ;  $v = 0$ . Отсюда  $C = 0$  и, следовательно,

$$u = \theta \cdot yz; \quad v = -\theta \cdot xz; \quad w = 0. \quad (2.6)$$

Рассмотрим, наконец, граничное условие на свободном торцевом сечении стержня ( $z = L$ , где  $L$  – длина стержня). В этом сечении направляющие косинусы равны  $l = 0$ ;  $m = 0$ ;  $n = 1$ . Уравнения (1.8) здесь принимают вид:

$$X_v = \tau_{xz}; \quad Y_v = \tau_{yz}; \quad Z_v = \sigma_z = 0.$$

Таким образом, показано, что элементарное решение удовлетворяет всем уравнениям теории упругости и в этом смысле является точным, если поверхностные силы действуют только по торцевому сечению  $z = L$ . При этом напряжения должны распределяться по тому закону, который установлен в любом поперечном сечении стержня. При ином приложении внешней нагрузки в сечении  $z = L$  необходимо воспользоваться принципом Сен-Венана. Замена приложенной нагрузки другой, статически ей эквивалентной вызовет изменение напряженного состояния только вблизи сечения  $z = L$ . На расстоянии от сечения  $z = L$ , большем диаметра  $d$  стержня, напряженное состояние будет определяться формулами, полученным из элементарного решения.

Изложенная теория позволяет достаточно просто определить прочные размеры круглого сечения скручиваемого стержня.

В соответствии с (2.5) максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  возникает при  $\rho = r = \frac{d}{2}$ . Полярный момент инерции для круга

равен  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ . Поэтому

$$\tau_{\max} = \frac{16M_z}{\pi d^3} \leq [\tau], \quad (2.7)$$

где  $[\tau]$  – допускаемое напряжение при чистом сдвиге.

Исходя из (2.7), можем записать условие прочности для диаметра стержня:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_z}{\pi[\tau]}}. \quad (2.8)$$



Для относительного угла закручивания получена зависимость (2.4). Имеем:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p}.$$

Интегрируя последнее уравнение, будем иметь:

$$\varphi = \frac{M_z \cdot z}{GJ_p} + C.$$

При условии  $z = 0$  абсолютный угол закручивания  $\varphi = 0$ . Следовательно, для максимального угла закручивания на свободном конце стержня получаем:

$$\varphi_{\max} = \frac{M_z L}{GJ_p}. \quad (2.9)$$

## 2.2. Кручение стержня произвольного поперечного сечения

В разделе 2.1 показано, что решение задачи о кручении стержня круглого сечения, полученное Кулоном на основании гипотезы плоских сечений, удовлетворяет всем уравнениям теории упругости. Попытка Навье использовать указанную гипотезу к задаче о кручении стержня произвольного сечения привела к ошибочным результатам. Последнее объясняется тем, что при кручении поперечные сечения, за исключением кругового, искривляются (депланируют).

Задачу о кручении стержня произвольного сечения исследовал Сен-Венан с привлечением разработанного им полуобратного метода. При решении задачи Сен-Венан принял перемещения  $u$  и  $v$  в форме (2.6), а продольное перемещение  $w$  положил не равным нулю, а в виде функции координат  $x, y$ . Следовательно,

$$u = \theta y z; \quad v = -\theta x z; \quad w = \theta \varphi(x, y), \quad (2.10)$$

где  $\varphi(x, y)$  – функция, подлежащая определению, которая в настоящее время называется функцией кручения Сен-Венана или функцией перемещений.

Таким образом, задача о кручении стержня произвольного сечения была сведена к определению только одной функции  $\varphi(x, y)$ .

При известных перемещениях (2.10) вычислим компоненты деформаций по формулам Коши (1.8). Имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta z - \theta z = 0; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - x \right); \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Составляющие напряжений находятся по закону Гука (1.4) и будут определяться как:

$$\begin{aligned} \sigma_x = 0; \quad \sigma_y = 0; \quad \sigma_z = 0; \\ \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{yz} = G\theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - x \right); \quad \tau_{zx} = G\theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Поскольку напряжения  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{zx}$  не зависят от координаты  $z$ , то во всех сечениях они будут одинаковыми.

Подставим (2.12) в уравнения равновесия (1.1). Первые два из них обращаются в тождества, а на основании третьего получается:

$$G\theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + G\theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Сократив на  $G\theta$ , может записать

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad \text{или } \nabla^2 \varphi = 0. \quad (2.13)$$

Здесь  $\nabla^2() = \frac{\partial^2()}{\partial x^2} + \frac{\partial^2()}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа.

Таким образом, функция  $\varphi(x, y)$ , к которой приводится решение задачи о кручении стержня произвольного сечения, удовлетворяет уравнению Лапласа и, естественно, является гармонической.

Остановимся на граничных условиях. Сначала сформулируем эти условия на боковой поверхности стержня. Нормали к этой поверхности лежат в плоскостях, ортогональных к оси  $Oz$ . При этом направляющие косинусы  $l, m$  принимают любые значения, а  $n = 0$ . Поскольку боковая поверхность свободна от нагрузки, то на ней  $X_v = 0, Y_v = 0, Z_v = 0$ . Следовательно, первые два уравнения обращаются в тождества, а третье дает

$$G\theta \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - x \right) m + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \right) l \right] = 0. \quad (2.14)$$

На рис. 2.5 изображено поперечное сечение стержня.

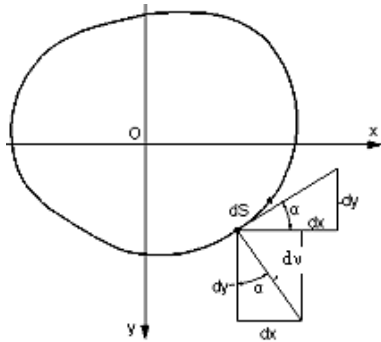


Рис. 2.5

На рисунке видно, что:

$$l = \sin \alpha = \frac{dx}{dv} = -\frac{dy}{dS}; \quad m = \cos \alpha = \frac{dy}{dv} = \frac{dx}{dS}.$$

Полученные данные подставляем в (2.14) и после сокращения на  $G\theta$  можем записать:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dv} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dv} = xm - yl,$$

или

$$\frac{d\varphi}{dv} = xm - yl. \quad (2.15)$$

Выражение (2.15) представляет собой граничное условие.

Таким образом, при решении полуобратным методом Сен-Венана задача о кручении стержня произвольного поперечного сечения сведена к определению функции  $\varphi(x, y)$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа (2.13) и граничному условию (2.15). На границе области (поперечного сечения) задана производная от искомой функции по нормали. Определение гармонической функции при граничном условии вида (2.15) называют задачей Неймана.

Обратимся теперь к условиям на торцевых сечениях стержня. Нормали к торцевым поверхностям параллельны оси  $Oz$ . Поэтому направляющие косинусы равны:  $l = 0, m = 0; n = 1$ . Уравнения (1.8) примут вид:

$$X_v = \tau_{xz}, \quad Y_v = \tau_{yz}, \quad Z_v = 0.$$

Это означает, что по торцевым сечениям действуют касательные поверхностные силы, напряжения от которых распределяются по тому же закону, что и во всех остальных сечениях.

Определим поверхностные силы, приложенные к торцевым сечениям. Запишем сумму проекций всех сил на ось  $Oy$ . Имеем:

$$\sum Y = \iint_A Y_v dx dy = \iint_A \tau_{yz} dx dy = G\theta \iint_A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - x \right) dx dy. \quad (2.16)$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - x \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \right) \right] = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - x + y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - x + y \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right).$$

Последнее слагаемое в скобках в соответствии с (2.13) обращается в нуль. Подставив в (2.16) вместо  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} - x$  левую часть записанного выражения, получим:

$$\sum Y = G\theta \iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - x \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \right) \right] \right\} dx dy.$$

С использованием формулы Грина перейдем к криволинейным интегралам:

$$\sum Y = G\theta \oint \left[ y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - x \right) m + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \right) l \right] dS.$$

Очевидно, что поскольку  $l = m = 0$ , сумма проекций поверхностных сил на ось  $Oy$  обращается в нуль, т.е.  $\sum Y = \iint_A Y_y dx dy = 0$ . Аналогично можно показать, что  $\sum X = \iint_A X_v dx dy = 0$ . Следовательно, поверхностные силы по торцевым сечениям образуют пары. Момент одной из этих пар сил найдем, взяв сумму моментов относительно оси  $Oz$  сил, действующих по торцевому сечению стержня:

$$\sum M_z = \iint_A (X_v y - Y_v x) dx dy = \iint_A (\tau_{xz} y - \tau_{yz} x) dx dy = M_z. \quad (2.17)$$

Подставим в (2.17) выражения для напряжений (2.12) и получим:

$$M_z = G\theta \iint_A \left[ y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \right) - x \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - x \right) \right] dx dy.$$

Последнюю формулу можно переписать так

$$M_z = G\theta \iint_A \left( y^2 + x^2 + y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.18)$$

Введем обозначение

$$J_k = \iint_A \left( y^2 + x^2 + y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.19)$$

Величину  $J_k$  условно принято называть моментом инерции при чистом кручении. Формула (2.18) теперь принимает вид:

$$M_z = G\theta J_k. \quad (2.20)$$

В стержне круглого сечения  $w = 0$ . Следовательно,  $\varphi(x, y) = 0$ ;  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ ;  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ , а момент инерции будет равен полярному, т.е.

$$J_k = \iint_A (x^2 + y^2) dx dy = \int_A \rho^2 dA = J_p.$$

В соответствии с постановкой задачи компонента перемещений вдоль продольной оси  $w = \theta \varphi(x, y)$  не зависит от координаты  $z$ . При заданных  $x, y$  значения  $w$  одинаковы по всей длине стержня, т.е. деформации всех поперечных сечений одинаковы. Такое кручение называют свободным в отличие от стесненного, при котором деформации сечений неодинаковы.

Заметим, что при  $z = 0$   $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $w = \theta \varphi(x, y) \neq 0$ . В рассматриваемом случае свободного кручения концевое сечение  $z = 0$  деформируется так же, как и все остальные поперечные сечения. Если конец стержня  $z = 0$  зашпелен, то полученное решение справедливо, если зашпеление выполнено так, что торцевое сечение может деформироваться. Такой случай зашпеления конца стержня называют закреплением Сен-Венана. Задача при условии  $w(0) = 0$  была приближенно решена А. Фёпплем.

Функция кручения Сен-Венана  $\varphi(x, y)$  гармоническая. Следовательно, существует сопряженная с ней гармоническая функция  $\psi(x, y)$ , связанная с  $\varphi(x, y)$  соотношениями:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (2.21)$$

Функция  $\psi(x, y)$ , естественно, удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0; \quad \nabla^2 \psi = 0. \quad (2.22)$$

Выразим компоненты напряжений через  $\psi(x, y)$ . Подставив в формулы (2.12) зависимости (2.21), будем иметь:

$$\tau_{yz} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right); \quad \tau_{zx} = -G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right). \quad (2.23)$$

Преобразуем условие на боковой поверхности стержня. На основании (2.14) и (2.21) указанное условие примет вид:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right) m - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right) l = 0.$$

Полученное равенство перепишем (рис. 2.5) следующим образом:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right) \frac{dx}{dS} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right) \left( -\frac{dy}{dS} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dS} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dS} = x \frac{dx}{dS} + y \frac{dy}{dS}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\psi}{dS} = x \frac{dx}{dS} + y \frac{dy}{dS}; \quad d\psi = xdx + ydy.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим:

$$\psi = \frac{x^2 + y^2}{2} + C. \quad (2.24)$$

Таким образом, решение задачи о кручении стержня произвольного сечения можно свести к определению функции  $\psi(x, y)$ , удовлетворяющей дифференциальному уравнению (2.22) и граничному условию (2.24). Задачу об определении гармонической функции при заданном ее значении на границе области называют задачей Дирихле.

### 2.3. Функция напряжений Прандтля

Введем функцию  $\Phi(x, y)$ , связанную с  $\psi(x, y)$  следующим соотношением:

$$\Phi(x, y) = G\theta \left[ \psi(x, y) - \frac{x^2 + y^2}{2} \right]. \quad (2.25)$$

Функцию  $\Phi(x, y)$  называют функцией напряжений Прандтля. Применим к обеим частям (2.25) операцию Лапласа. Имеем:

$$\nabla^2 \Phi = G\theta \left[ \nabla^2 \psi - \nabla^2 \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \right]. \quad (2.26)$$

Поскольку  $\psi(x, y)$  – гармоническая функция, то  $\nabla^2 \psi = 0$ . Далее

$$\nabla^2 \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) = 2.$$

Теперь получаем, что

$$\nabla^2 \Phi = -2G\theta, \quad (2.27)$$

или в координатной форме

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta. \quad (2.28)$$

Граничное условие с учетом (2.24) для  $\Phi(x, y)$  принимает вид:

$$\Phi_0 = G\theta \left( \frac{x^2 + y^2}{2} + C - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) = G\theta C = C_1, \quad (2.29)$$

причем  $\Phi_0$  – значение функции  $\Phi(x, y)$  на контуре поперечного сечения, которое на границе области оказывается постоянной величиной.

Дифференциальное уравнение (2.28) для определения функции напряжений Прандтля называется уравнением Пуассона. Следовательно, задача о кручении стержня произвольного поперечного сечения может быть сведена к определению  $\Phi(x, y)$ , удовлетворяющей уравнению Пуассона и имеющей постоянное значение на границе поперечного сечения.

Проидифференцируем функцию  $\Phi(x, y)$  по координатам и с использованием (2.23) получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right) = \tau_{yz}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right) = \tau_{zx}.$$

Отсюда,

$$\tau_{yz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad \tau_{zx} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (2.30)$$

Итак, составляющие напряжений определяются простым дифференцированием функции напряжений  $\Phi(x,y)$ , удовлетворяющей уравнению Пуассона (2.28) и граничному условию (2.29).

Установим теперь величину крутящего момента, взяв сумму моментов поверхностных сил относительно оси  $Oz$ . Имеем:

$$M_z = \iint_A (\tau_{zx}y - \tau_{yz}x) dx dy = -\iint_A \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi}{\partial x} x \right) dx dy.$$

Рассмотрим сначала случай, когда поперечное сечение является односвязной областью. Напомним, что область считается односвязной, если любой замкнутый контур, лежащий в этой области, можно путем непрерывного изменения, не выводящего контур за пределы области, стянуть в одну точку.

Пусть такая область (рис. 2.6) является поперечным сечением стержня.

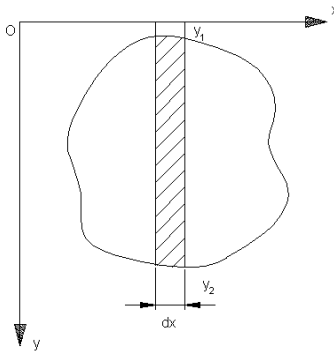


Рис. 2.6.

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\iint_A \frac{\partial \Phi}{\partial y} y dx dy = \int dx \int \frac{\partial \Phi}{\partial y} y dy.$$

Вычислим этот интеграл по частям, положив

$$\bar{u} = y; \quad d\bar{u} = dy; \quad d\bar{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy; \quad \bar{v} = \Phi.$$

Теперь имеем:

$$\iint_A \frac{\partial \Phi}{\partial y} y dx dy = \int \left[ \Phi \cdot y \Big|_{y_1}^{y_2} - \int \Phi dy \right] dx = \int \Phi_0 (y_2 - y_1) dx - \iint_A \Phi dx dy = \Phi_0 A - \iint_A \Phi dx dy,$$

причем  $\Phi_0$  – значение функции  $\Phi(x, y)$  на контуре сечения ( $\Phi_0 \sim const$ );

$A$  – площадь сечения.

Точно так же

$$\iint_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} x dx dy = \Phi_0 A - \iint_A \Phi dx dy.$$

Следовательно,

$$M_z = 2 \iint_A \Phi dx dy - 2\Phi_0 A$$

или

$$M_z = 2V, \quad (2.31)$$

где  $V$  – удвоенный объем «холмика», которым изображается функция  $\Phi(x, y)$  и который располагается выше уровня  $\Phi_0$  (рис. 2.7).

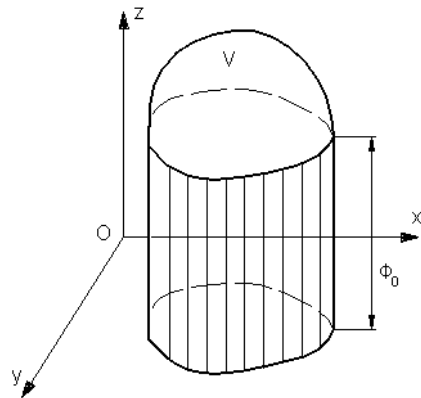


Рис. 2.7.

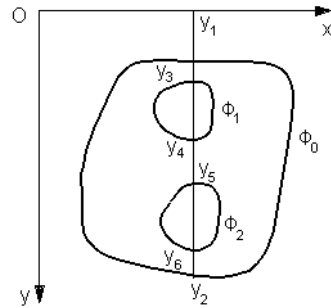


Рис. 2.8.

Далее считаем, что поперечное сечение стржня является многосвязной областью, например, с двумя отверстиями (рис. 2.8). Иными словами, кроме наружного имеются еще два внутренних контура. Линия параллельная оси  $Oy$ , пересечет наружный контур в точках  $y_1, y_2$ , а внутренние – в точках  $y_3, y_4, y_5, y_6$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{\partial \Phi}{\partial y} y dx dy &= \int dx \int \frac{\partial \Phi}{\partial y} y dy = \\ &= \int \Phi_0 (y_2 - y_1) dy - \int \Phi_1 (y_4 - y_3) dy - \int \Phi_2 (y_6 - y_5) dy - \iint_A \Phi dx dy = \\ &= - \iint_A \Phi dx dy + \Phi_0 A_0 - \Phi_1 A_1 - \Phi_2 A_2, \end{aligned}$$

где  $\Phi_0$  – значение функции  $\Phi$  на наружном контуре;  $A_0$  – площадь сечения, включая «пустоты»;  $\Phi_1, \Phi_2$  – значения функций  $\Phi$  на внутренних контурах;  $A_1$  и  $A_2$  – площади «отверстий».

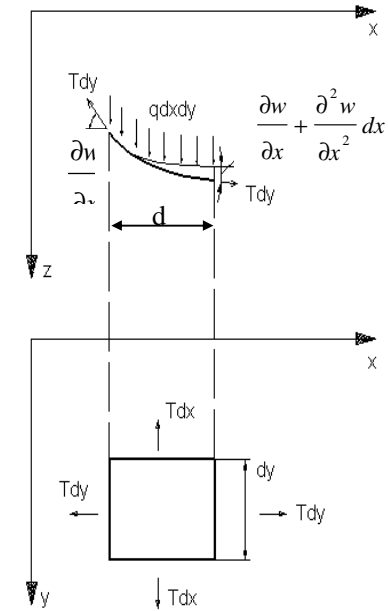
Для  $n$  внутренних контуров имеем:

$$M_z = 2 \iint_A \Phi dx dy + 2 \sum_{k=1}^n \Phi_k A_k - 2 \Phi_0 A_0. \quad (2.32)$$

## 2.4. Мембранная аналогия Прандтля

Составим уравнение поверхности, по которой провисает гибкая нерастяжимая мембрана, опертая на горизонтальный контур и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ . Обозначим растягивающую силу, приходящуюся на единицу длины контура через  $T$ .

Выделим из мембраны элемент  $dx dy$  (рис. 2.9).



На этот элемент действуют растягивающие силы  $T dx$  и  $T dy$ , направленные по касательным к поверхности мембраны и сила  $q dx dy$ , направленная параллельно оси  $Oz$ .

Углы между силами  $T dy$  и осью  $Ox$  составят

$$\frac{\partial w}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx,$$

а между силами  $T dx$  и осью  $Oy$  –

$$\frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy.$$

Составим уравнение равновесия элемента мембраны в виде суммы проекций всех сил на ось  $Oz$ . Имеем:

$$-Tdy \frac{\partial w}{\partial x} + Tdy \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) - Tdx \frac{\partial w}{\partial y} + Tdx \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) + qdxdy = 0.$$

После несложных преобразований получим:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{T}. \quad (2.33)$$

Условие на границе для функции  $w$  имеет вид  $w_0 = 0$ , поскольку провисание мембраны на контуре равно нулю.

Примем контур, на который опирается мембрана, в виде формы поперечного сечения скручиваемого стержня и приравняем правые части уравнений (2.28) и (2.33), полагая  $2G\theta = q/T$ . При этом дифференциальные уравнения (2.28) и (2.33) будут эквивалентными. Эквивалентными являются и граничные условия. Следовательно, определение функции Прандтля  $\Phi(x, y)$  можно заменить исследованием провисания гибкой нерастяжимой мембраны, находящейся под действием равномерной распределенной нагрузки.

Ясно, что удвоенный объем пространства, ограниченного провисшей поверхностью мембраны и плоскостью, в которой расположен контур опирания мембраны, будет равен крутящему моменту  $M_z$ .

Мембранная аналогия имеет двоякое значение:

➤ позволяет экспериментально находить функцию напряжений при кручении стержней таких сечений, для которых аналитическое решение невозможно;

➤ позволяет получить наглядное представление о форме “холма напряжений” и сделать некоторые заключения о характере распределения касательных напряжений и даже вывести для этих напряжений приближенные формулы.

## 2.5. Теорема Бретда о циркуляции касательного напряжения

В плоскости поперечного сечения стержня выделим произвольную замкнутую кривую  $L$ , целиком лежащую внутри сечения (рис. 2.10). Проекцию касательного напряжения в любой точке этой кривой обозначим через  $\tau_{sx}$ . Криволинейный интеграл вида  $J = \oint_L \tau_{sx} dS$  называют циркуляцией касательного напряжения. На рис. 2.10 видно, что

$$\tau_{sx} = \tau_{zx} \cos \beta + \tau_{zy} \cos \alpha.$$

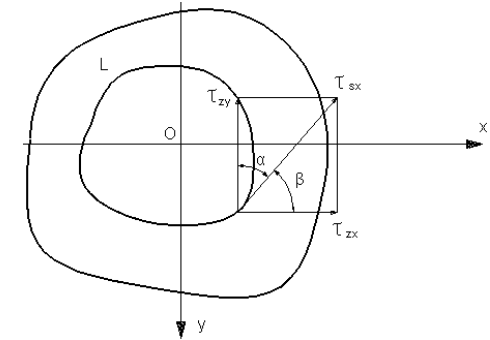


Рис. 2.10.

Очевидно, что  $\cos \alpha = \frac{dy}{dS}$ ,  $\cos \beta = \frac{dx}{dS}$ . Поэтому

$$\tau_{sx} = \tau_{zx} \frac{dx}{dS} + \tau_{zy} \frac{dy}{dS}.$$

Подставим в последнее выражение формулы для составляющих касательного напряжения (2.12) и получим:

$$\tau_{sx} = G\theta \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \right) \frac{dx}{dS} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} - x \right) \frac{dy}{dS} \right].$$

Циркуляция касательного напряжения примет вид:

$$J = G\theta \oint_L \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dS} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dS} \right) dS + G\theta \oint_L \left( y \frac{dx}{dS} - x \frac{dy}{dS} \right) dS.$$

Отсюда непосредственно имеем:

$$J = G\theta \oint_L d\varphi + G\theta \oint_L (ydx - xdy).$$

Функция  $\varphi(x, y)$  однозначна в силу однозначности перемещения  $w$  и поэтому  $\oint_L d\varphi = 0$ . Второй интеграл представляет собой удвоенную площадь, ограниченную контуром  $L$ , т.е.  $\oint_L (ydx - xdy) = 2A_c$ . Следовательно,

$$\oint_L \tau_{sx} dS = 2G\theta A_c. \quad (2.34)$$

Таким образом, циркуляция касательного напряжения по любой замкнутой кривой  $L$ , лежащей внутри поперечного сечения, равняется удвоенному произведению величины  $G\theta$  на площадь  $A_c$ , ограниченную этой кривой. Это и есть теорема Бредта.

## 2.6. Кручение стержня эллиптического поперечного сечения

Пусть  $f(x, y) = 0$  есть уравнение контура сечения скручиваемого стержня. На этом контуре функция напряжений Прандтля  $\Phi(x, y)$  должна равняться нулю. Иными словами, функции  $\Phi(x, y)$  и  $f(x, y)$  должны обращаться в нуль на контуре при одних и тех же значениях  $x, y$ .

В ряде простых случаев функцию  $\Phi(x, y)$  можно получить умножением  $f(x, y)$  на подходящий множитель.

Рассмотрим стержень эллиптического сечения, уравнение контура которого имеет вид

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (2.35)$$

где  $a, b$  – полуоси эллипса.

Примем функцию напряжений в форме:

$$\Phi(x, y) = C f(x, y) = C \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad (2.36)$$

причем  $C$  – неизвестный множитель, подлежащий определению.

Подставим (2.36) в дифференциальное уравнение Пуассона (2.28) и получим:

$$2C \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = -2G\theta.$$

Разрешив это уравнение, для величины  $C$  можем записать:

$$C = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\theta. \quad (2.37)$$

Теперь функция напряжений принимает окончательный вид:

$$\Phi(x, y) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\theta \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right). \quad (2.38)$$

Составляющие напряжений после подстановки (2.38) в (2.30) определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{2G\theta \cdot a^2}{a^2 + b^2} y; \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{2G\theta \cdot b^2}{a^2 + b^2} x. \end{aligned} \quad 2.39$$

Запишем выражения для напряжений на концах малой полуоси эллипса:

$$|\max \tau_{zx}|_{y=\pm b} = \frac{2G\theta \cdot a^2 b}{a^2 + b^2},$$



а на концах большой полуоси:

$$\left| \max \tau_{yz} \right|_{x=\pm a} = \frac{2G\theta \cdot ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Эпюры распределения напряжений вдоль осей  $x$  и  $y$  показаны на рис. 2.11.

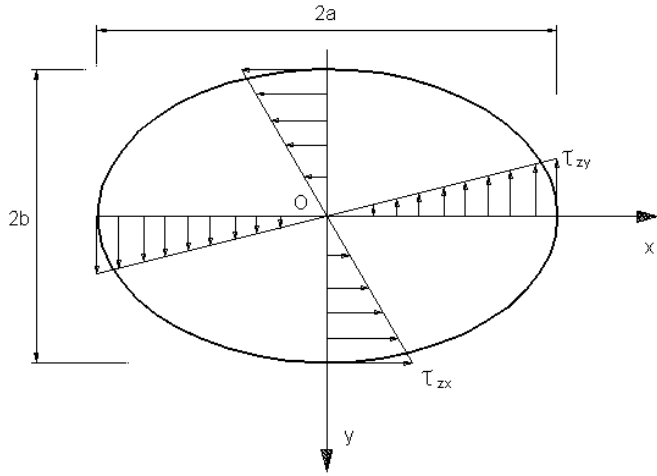


Рис. 2.11.

Вычислим теперь величину крутящего момента, воспользовавшись (2.31). Имеем:

$$\begin{aligned} M_z &= 2 \iint_A \Phi(x, y) dx dy = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\theta \iint_A \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \\ &= \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\theta \left\{ \iint_A dx dy - \frac{1}{a^2} \iint_A x^2 dx dy - \frac{1}{b^2} \iint_A y^2 dx dy \right\}. \end{aligned}$$

Но здесь

$$\iint_A dx dy = A = \pi ab; \quad \iint_A x^2 dx dy = J_y = \frac{\pi a^3 b}{4}; \quad \iint_A y^2 dx dy = J_x = \frac{\pi ab^3}{4},$$

где  $J_x, J_y$  – моменты инерции сечения относительно координатных осей.

Теперь очевидно, что крутящий момент будет равен

$$M_z = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} G\theta. \quad (2.40)$$

Отсюда

$$G\theta = \frac{M_z (a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3}. \quad (2.41)$$

Подставив (2.41) в (2.39), для составляющих напряжений получим:

$$\tau_{zx} = -\frac{2M_z}{Ab^2} y; \quad \tau_{yz} = \frac{2M_z}{Aa^2} x. \quad (2.42)$$

Относительный угол закручивания определится так:

$$\theta = \frac{M_z}{G} \cdot \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3}. \quad (2.43)$$

## 2.7. Кручение стержня прямоугольного поперечного сечения

Рассмотрим кручение стержня прямоугольного сечения (рис. 2.12).

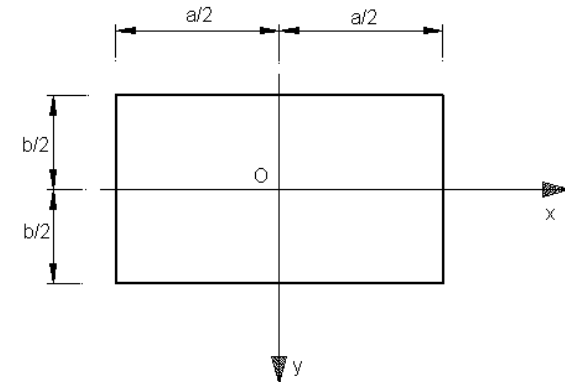


Рис. 2.12.

Вначале остановимся на случае узкого прямоугольника, для которого отношение  $a/b$  велико. При этом, следуя мембранной аналогии, становится очевидным, что на значительной части длины сечения функция напряжений  $\Phi(x,y)$  почти не зависит от  $x$ , поскольку на прогибе соответствующей части мембраны не сказывается влияние коротких сторон сечения. Поэтому дифференциальное уравнение Пуассона (2.28) можно приближено заменить следующим:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta. \quad (2.44)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\Phi|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0. \quad (2.45)$$

Интегрирую уравнение (2.44) с граничными условиями (2.45), для функции напряжений Прандтля получим:

$$\Phi = G\theta \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right). \quad (2.46)$$

Напряжения будут равны:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2G\theta y, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0. \quad (2.47)$$

Эти формулы приближенно верны для всего сечения, за исключением частей, примыкающих к коротким сторонам контура. Вблизи последних напряжения  $\tau_{zx}$  уменьшаются, доходя при  $x = \pm a/2$  до нуля, а напряжения  $\tau_{yz}$  возрастают. Наибольшие напряжения  $\tau_{zx}$  по (2.47) возникают у длинных сторон контура:

$$\max \tau_{zx} = \tau_{zx}|_{y=\pm \frac{b}{2}} = G\theta b.$$

Наибольшее значение напряжения  $\tau_{zy}$  несколько меньше, как показывает приведенное ниже точное решение.

Вычислим теперь крутящий момент, который с использованием формулы (2.46) будет равен:

$$M_z = 2 \int_{x=-a/2}^{a/2} \int_{y=-b/2}^{b/2} \Phi(x,y) dx dy = \frac{1}{3} G\theta ab^3.$$

Отсюда

$$G\theta = \frac{3M_z}{ab^3}.$$

С учетом последнего, формула для максимального касательного напряжения примет вид:

$$\max \tau_{zx} = \frac{3M_z}{ab^2}. \quad (2.48)$$

Перейдем теперь к исследованию кручения стержня прямоугольного сечения с произвольным отношением сторон. Функцию  $\Phi(x,y)$  будем искать в виде суммы приближенного значения (2.46) и подправим прибавлением некоторой функции  $F(x,y)$ :

$$\Phi(x,y) = G\theta \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right) + F(x,y). \quad (2.49)$$

Поставим (2.49) в уравнение Пуассона (2.28) и получим:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0. \quad (2.50)$$

Граничные условия будут представлены так:

$$F|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0; \quad F|_{x=\pm \frac{a}{2}} = G\theta \left( y^2 - \frac{b^2}{4} \right). \quad (2.51)$$

Решение уравнения (2.50) будем искать, следуя методу Фурье, в форме

$$F=X(x)Y(y). \quad (2.52)$$

Подставив (2.52) в (2.50) можем записать:

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0.$$

Это уравнение перепишем так:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda^2, \quad (2.53)$$

где  $\lambda^2$  – некоторая постоянная величина.

Действительно,  $\lambda^2$  не зависит от координат, поскольку

$$\frac{\partial(\lambda^2)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{d^2 Y}{dy^2} \right) = 0; \quad \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = 0.$$

Итак, из уравнения (2.53) получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0; \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad (2.54)$$

Ввиду симметрии задачи функции  $X(x)$ ,  $Y(y)$  должны быть четными. Поэтому искомые частные решения имеют вид:

$$X = ch \lambda x; \quad Y = \cos \lambda y; \quad F(x, y) = ch \lambda x \cos \lambda y. \quad (2.55)$$

Потребуем для полученных решений выполнения первого граничного условия (2.51). Это дает значения:

$$\cos \frac{\lambda b}{2} = 0; \quad \lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{b}; \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.56)$$

Умножая частные решения (2.55), соответствующие различным значениям  $\lambda$ , на постоянные  $B_k$  и складывая их, найдем следующее достаточно общее решение дифференциального уравнения (2.50), четное относительно  $x$ ,  $y$  и удовлетворяющее первому граничному условию (2.51):

$$F(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k ch \frac{(2k+1)\pi x}{b} \cos \frac{(2k+1)\pi y}{b}. \quad (2.57)$$

Остается удовлетворить второе граничное условие (2.51). Подставляя в него (2.57), получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k ch \frac{(2k+1)\pi a}{2b} \cos \frac{(2k+1)\pi y}{b} = G\theta \left( y^2 - \frac{b^2}{4} \right). \quad (2.58)$$

Правую часть (2.58) разложим в ряд по косинусам в интервале  $-b/2 \leq y \leq b/2$ . Имеем:

$$f(y) = G\theta \left( y^2 - \frac{b^2}{4} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos \frac{(2k+1)\pi y}{b}. \quad (2.59)$$

Здесь коэффициент  $C_k$  определяется с помощью известных формул теории тригонометрических рядов:

$$C_k = \frac{2}{b} \int_{-b/2}^{b/2} f(y) \cos \frac{(2k+1)\pi y}{b} dy = \frac{2G\theta}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left( y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \cos \frac{(2k+1)\pi y}{b} dy = -\frac{8G\theta \cdot b^2}{\pi^3} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}. \quad (2.60)$$

Из сравнения (2.57) и (2.58) получаем, что:

$$B_k \frac{ch(2k+1)\pi a}{2b} = C_k. \quad (2.61)$$

Находя отсюда  $B_k$  и подставляя его в (2.59), можем записать окончательное выражение для функции напряжений:

$$\Phi(x, y) = G\theta \left[ \frac{b^2}{4} - y^2 - \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k ch \frac{(2k+1)\pi x}{b} \cos \frac{(2k+1)\pi y}{b}}{(2k+1)^3 ch \frac{(2k+1)\pi a}{2b}} \right]. \quad (2.62)$$

Наибольшее напряжение  $\tau_{xy}$  имеет место у средин коротких сторон контура:

$$\max \tau_{xy} = \tau_{xy} \Big|_{\substack{x=\pm a/2 \\ y=0}} = G\theta \cdot b \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k th \frac{(2k+1)\pi a}{2b}}{(2k+1)^2}. \quad (2.63)$$

Вычисление крутящего момента дает:

$$M_z = \iint_A \Phi(x, y) dx dy = G\theta \cdot ab^3 \left[ \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \cdot \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{th \frac{(2k+1)\pi a}{2b}}{(2k+1)^5} \right]. \quad (2.64)$$

Бесконечные ряды в записанных формулах быстро сходятся ( $a/b \geq 1$ ).

Из формул (2.62)...(2.64) следует, что выражения для максимальных напряжений и для угла закручивания могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \max \tau_{xx} &= \frac{M_z}{q_1 ab^2}; \\ \max \tau_{xy} &= q_2 [\max \tau_{xx}]; \\ G\theta &= \frac{M_z}{q_3 ab^3}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

причем коэффициенты  $q_1, q_2, q_3$  зависят только от отношения сторон  $a/b$ . Значения этих коэффициентов приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

$a/b$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
1	0,208	1	0,140
1,5	0,230	0,860	0,196
2	0,246	0,795	0,229
3	0,267	0,753	0,263
4	0,282	0,745	0,281
6	0,298	0,7425	0,298
8	0,307	0,7425	0,307
10	0,312	0,7425	0,312
$\infty$	0,333	0,7425	0,333

При  $a/b > 3$  имеем  $q_1 \approx q_3 \approx 1 - 0,63b/a$ ;  $q_2 \approx 0,74$ . Для очень длинных прямоугольников  $q_1 = q_3 = \frac{1}{3}$  и тогда первая и третья формулы (2.65) переходят в (2.64) и (2.63).

### 3. КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

#### 3.1. Свободное кручение тонкостенного стержня

Тонкостенными считаются стержни, у которых одно из измерений сечения (толщина стенки  $\delta$ ) мало по сравнению с другими размерами, а последние – малы по сравнению с длиной. Большинство металлических стержней, применяемых в практике машиностроения и строительства, являются тонкостенными. К тонкостенным относятся прокатные стержни, имеющие тонкие стенки и полки – такие, как стержни двутаврового, швеллерного, таврового, уголкового и т.п. сечений, а также стержни, изготавливаемые из листов путем выгиба, сборные сварные и клепаные стержни, многие элементы литых рам различных машин и т.п.

От длинной цилиндрической оболочки тонкостенные стержни отличаются очень высокой жесткостью контура поперечного сечения, который считается недеформируемым (гипотеза жесткого контура). В других случаях для обеспечения достаточно высокой жесткости приходится ставить различные подкрепления, например, устанавливать ребра жесткости или диафрагмы.

Общую теорию деформирования тонкостенных стержней разработал В.З. Власов. Остановимся более подробно на этой теории.

Линию, которая делит толщину стенки пополам, называют средней линией поперечного сечения, а поверхность, на которой лежат средние линии всех сечений – срединной поверхностью. Тонкостенные стержни графически, как правило, изображают их срединной поверхностью. Если средняя линия поперечного сечения замкнута, то и стержень имеет замкнутый профиль, а если средняя линия разорвана – открытый профиль. Замкнутый профиль имеют стержни круглого, коробчатого и т.п. поперечных сечений, а открытый профиль – большинство прокатных и сборных стержней.

В данной главе изложена теория свободного кручения. Такое кручение имеет место, если по концам стержня в плоскостях, ортогональных оси, действуют две пары сил с равными по величине и направленными в противоположные стороны моментами. При свободном кручении деформации всех поперечных сечений одинаковы, и, следовательно, длина продольных волокон не изменяется. При этом, естественно, нормальные напряжения обращаются в нуль.

Определим касательные напряжения  $\tau_0$ , возникающие в поперечных сечениях тонкостенных стержней при свободном кручении.

Рассмотрим сначала свободное кручение стержней открытого профиля. Пусть поперечные сечения состоят из прямоугольников (двутавры, швеллеры, уголки). Геометрическую характеристику жесткости при кручении  $J_k$  таких стержней можно определить как сумму геометрических характеристик жесткостей отдельных прямоугольников, из которых состоит сечение. Имеем:

$$J_k = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n h_k \delta_k^3,$$

где  $\delta_k$  – толщина,  $h_k$  – высота соответствующего прямоугольника.

Результаты опытов по проверке этой формулы показали, что характеристика жесткости должна быть уточнена и представлена в виде

$$J_k = \frac{1}{3} \eta \sum_{k=1}^n h_k \delta_k^3, \quad (3.1)$$

где  $\eta$  – определяемый опытным путем коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения ( $\eta \approx 1$  для уголков,  $\eta = 1,12$  для швеллеров и тавров,  $\eta = 1,20$  для двутавров).

Формулы для определения относительного угла закручивания  $\theta$  и наибольшего напряжения  $\max \tau_0$  запишутся так:

$$\theta = \frac{3M_z}{G\eta \sum_{k=1}^n h_k \delta_k^3}; \quad \max \tau_0 = G\theta \delta_{\max} = \frac{3M_z \delta_{\max}}{\eta \sum_{k=1}^n h_k \delta_k^3}, \quad (3.2)$$

причем  $\delta_{\max}$  – толщина наиболее толстого прямоугольника.

Напряжение  $\max \tau_0$  действует по середине длинной стороны толстого прямоугольника.

При кручении стержней, поперечные сечения которых являются прокатными профилями, во входящих углах этих сечений возникают значительные местные напряжения.

Если воспользоваться мембранной аналогией Прандтля, то можно получить:

$$\tau_{\max} = \tau_0 \left( 1 + \frac{\delta}{4a} \right),$$

где  $\delta$  – толщина стенки;  $a$  – радиус закругления во входящем углу (рис. 3.1).

Более строгое исследование показывает, что при малых значениях  $a$  ( $a \approx 0,1\delta$ ) наибольшие напряжения следует определять по формуле:

$$\max \tau = 1,74 \tau_0 \sqrt[3]{\frac{\delta}{a}}.$$

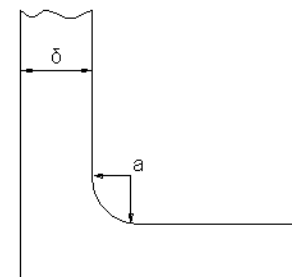


Рис. 3.1.

Рассмотрим далее свободное кручение стержней замкнутого профиля. В этом случае сечение оказывается двусвязной областью. Пусть  $C_0, C_1$  – внешний и внутренний контуры сечения, а  $\Phi_0, \Phi_1$  – значения функции напряжений Прандтля на контурах. Положим, что  $\Phi_0 = 0$  и, следовательно, в соответствие (2.32) можем записать как

$$M_z = 2 \iint_{A_0} \Phi dx dy + 2\Phi_1 A_1 = 2V.$$

Здесь  $A_0, A_1$  – площади, ограниченные контурами  $C_0, C_1$ , а  $V$  – объем «холмика» с основаниями  $A_0, A_1$  и высотой  $\Phi_1$  (рис. 3.2). Обозначим переменную толщину стенки трубчатого стержня через  $\delta$ . При малом  $\delta$  можно пренебречь изменениями уклона поверхности  $\Phi(x, y)$  и считать, что отрезки  $AC$  и  $BD$  есть отрезки прямых.

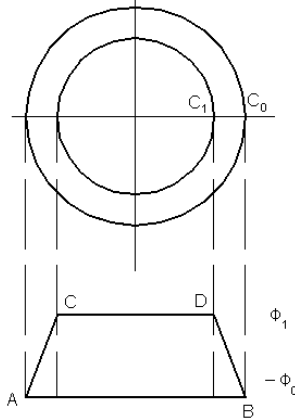


Рис. 3.2.

Этому допущению соответствует равномерное распределение касательных напряжений  $\tau$  по толщине  $\delta$  стенки. В таком случае  $\tau = \Phi_1 / \delta$  и  $\Phi_1 = \tau \delta$ . Объем «холмика»  $V$  будет равен  $V = \frac{A_0 + A_1}{2} \Phi_1 = A_{cp} \Phi_1$ , где  $A_{cp}$  – средняя площадь, ограниченная контуром  $C$ , лежащим посередине

между  $C_0$  и  $C_1$ . Крутящий момент  $M_z = 2\Phi_1 A_{cp} = 2A_{cp} \tau \delta$  и, следовательно,

$$\tau = \frac{M_z}{2A_{cp} \delta}. \quad (3.3)$$

Для определения относительного угла закручивания воспользуемся теоремой Бредта. По формуле (2.34) имеем:

$$\oint_C \tau_{sz} dS = 2G\theta A_{cp}.$$

Подставим в этот интеграл зависимость (3.3) и получим:

$$\frac{M_z}{2A_{cp}} \oint_C \frac{dS}{\delta} = 2G\theta A_{cp}.$$

Отсюда

$$\theta = \frac{M_z}{4A_{cp}^2 G} \oint_C \frac{dS}{\delta},$$

или

$$\theta = \frac{M_z}{G} \frac{1}{4A_{cp}^2} \oint_C \frac{dS}{\delta}.$$

Теперь для геометрической характеристики жесткости стержня при кручении можем записать:

$$J_k = \frac{(2A_{cp})^2}{\oint_C \frac{dS}{\delta}}.$$

Если толщина  $\delta$  трубки постоянна, то

$$J_k = \frac{(2A_{cp})^2}{S} \delta,$$

где  $S$  – длина осевой линии поперечного сечения трубчатого стержня.

Итак,

$$\theta = \frac{M_z S}{4A_{cp}^2 \delta G}. \quad (3.4)$$

**Пример.** Сопоставим кручение двух тонкостенных стержней кольцевого сечения, причем одно сечение – замкнутый профиль, а другое – открытый, полученный при разрезании стержня вдоль образующей (рис. 3.3). Размеры обоих стержней одинаковы и оба нагружены одинаковыми моментами  $M_z$ .

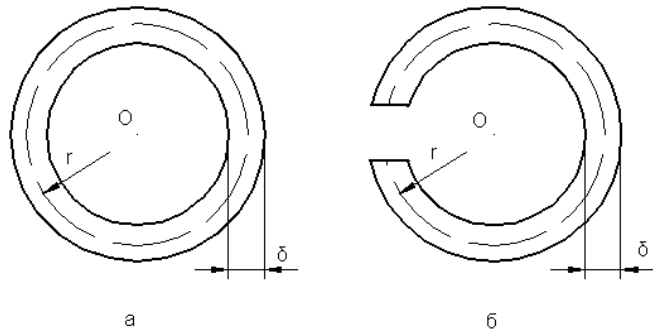


Рис. 3.3.

Касательные напряжения при кручении стержней открытого и замкнутого профиля будут соответственно равны:

$$\tau_{отк} = \frac{3M_z}{S\delta^2} = \frac{3M_z}{2\pi r\delta^2}; \quad \tau_{зам} = \frac{M_z}{2A_{cp}\delta} = \frac{M_z}{2\pi r^2\delta}.$$

Отношение

$$\frac{\tau_{отк}}{\tau_{зам}} = 3 \frac{r}{\delta},$$

при  $\frac{r}{\delta} = 10$  имеем  $\tau_{отк} = 30\tau_{зам}$ . Это означает, что напряжение в стержне открытого профиля значительно превышает напряжение в стержне замкнутого профиля при прочих равных условиях.

Геометрические характеристики жесткости при этом имеют такие значения:

$$J_{k,отк} = \frac{1}{3} h\delta^3 = \frac{2}{3} \pi r\delta^3; \quad J_{k,зам} = \frac{(2A_{cp})^2 \delta}{2\pi r} = 2\pi r^3 \delta.$$

Отношение

$$\frac{J_{k,отк}}{J_{k,зам}} = 3 \left( \frac{r}{\delta} \right)^2.$$

При  $\frac{r}{\delta} = 10$  это отношение равняется 300.

Полученные данные показывают, что стержни открытого профиля плохо сопротивляются кручению.

### 3.2. Стесненное кручение тонкостенного стержня

При стесненном кручении деформации поперечных сечений неодинаковы. Поэтому длины продольных волокон стержня изменяются и, следовательно, в поперечных сечениях возникают дополнительные нормальные напряжения, которые обозначим  $\sigma_\omega$ . Поскольку указанные напряжения непостоянны по длине стержня, то в соответствии с уравнениями равновесия Навье-Коши (1.1), появляются дополнительные касательные напряжения, обозначаемые через  $\tau_\omega$ .

Таким образом, при стесненном кручении в поперечных сечениях стержня, наряду с касательными напряжениями  $\tau_0$  от свободного кручения, возникают дополнительные касательные  $\tau_\omega$  и нормальные  $\sigma_\omega$  напряжения.

Пусть стержень, защемленный одним концом, скручивается парой сил, приложенной к свободному концу. Пусть защемление выполнено так, что соответствующее концевое сечение остается плоским. Все

остальные сечения депланируют, причем депланация их будет меняться по длине стержня от нуля до некоторой величины на свободном конце.

Стесненное кручение реализуется вследствие неодинаковых депланаций поперечных сечений. Укажем, что поперечные сечения круговых стержней при кручении остаются плоскими. Не депланируют также сечения тонкостенных стержней замкнутого профиля, имеющие форму кругового кольца, многоугольника, описанного около окружности при постоянной толщине стенки  $\delta$ . При открытом профиле не депланируют поперечные сечения, имеющие форму пучка, т.е. профили с прямолинейными средними линиями, пересекающимися в одной точке (уголки, тавры, крестовые сечения). В этих стержнях стесненное кручение невозможно.

Депланации поперечных сечений, имеющих сплошное массивное сечение, и тонкостенных стержней закрытого профиля невелики. Поэтому при стесненном кручении таких стержней возникают относительно небольшие дополнительные напряжения  $\tau_\omega, \sigma_\omega$ , которые можно не принимать во внимание.

Иные результаты имеют место при кручении тонкостенных стержней открытого профиля. Депланации поперечных сечений таких стержней значительно превышают депланации сечений сплошных стержней и стержней замкнутого профиля. Поэтому при стесненном кручении стержней открытого профиля дополнительные напряжения  $\tau_\omega, \sigma_\omega$  имеют тот же порядок, что и основные напряжения, получающиеся вследствие свободного кручения или изгиба.

Таким образом, наибольший интерес представляет стесненное кручение тонкостенных стержней открытого профиля.

При стесненном кручении внешний крутящий момент уравновешивается моментами внутренних касательных сил, соответствующих напряжениям  $\tau_0, \tau_\omega$ . Поскольку других внешних сил нет, то внутренние усилия, соответствующие дополнительным нормальным напряжениям  $\sigma_\omega$ , должны образовать самоуравновешенную систему сил, главный вектор и главный момент которой обращается в нуль. Поэтому, если  $xOy$  – некоторая система координат в плоскости поперечного сечения, то должны иметь место равенства:

$$N_z = \int_A \sigma_\omega dA = 0; \quad M_x = \int_A \sigma_\omega y dA = 0; \quad M_y = \int_A \sigma_\omega x dA = 0. \quad (3.5)$$

Для удовлетворения условий (3.5) необходимо, чтобы напряжения  $\sigma_\omega$  были как растягивающими так и сжимающими. Такие напряжения возникают при изгибе элементов стержня и поэтому стесненное кручение называют также изгибным.

Условие равенства нулю суммы моментов относительно оси  $Oz$  всех сил, приложенных к отсеченной части стержня, приводит к уравнению:

$$M_z - M_0 - M_\omega = 0 \quad \text{или} \quad M_z = M_0 + M_\omega. \quad (3.6)$$

Здесь  $M_z$  – крутящий момент;  $M_0$  – момент касательных сил, соответствующих напряжениям  $\tau_0$ , получающимся вследствие свободного кручения;  $M_\omega$  – момент касательных сил, соответствующих дополнительным напряжениям  $\tau_\omega$ .

Момент  $M_0$  называют моментом чистого кручения,  $M_\omega$  – изгибно-крутящим.

Все особенности стесненного кручения особенно рельефно проявляются при кручении тонкостенных стержней открытого профиля. Рассмотрим такой стержень, защемленный одним концом и нагруженный скручивающей парой сил на свободном конце. Пусть стержень имеет двутавровое сечение и пара, приложенная на свободном конце, образуется двумя силами  $P$  вдоль полок (рис. 3.4а). Под действием пары сил  $P$  осуществится кручение стержня, причем полки будут изгибаться, искривляясь в противоположных направлениях.

Вследствие изгиба поперечные сечения полос повернутся в противоположные стороны так, что поперечное сечение двутавра не останется плоским. Взаимный поворот полок будет увеличиваться от нуля в защемлении до наибольшего значения на свободном конце. Следовательно, депланации поперечных сечений двутавра будут возрастать от нуля до максимального значения. Вследствие этого возникают дополнительные нормальные  $\sigma_\omega$  и касательные  $\tau_\omega$  напряжения. На рис. 3.4 б приведены эпюры напряжений  $\sigma_\omega$  и соответствующие им нормальные к сечению поверхностные силы, образующие самоуравновешенную систему сил. На рис. 3.5а показаны касательные напряжения  $\tau_\omega$ , а на рис. 3.5б – касательные напряжения  $\tau_0$  от действия чистого кручения.



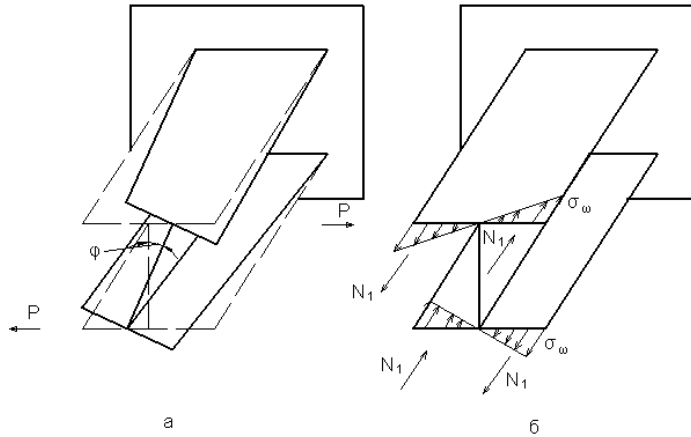


Рис. 3.4.

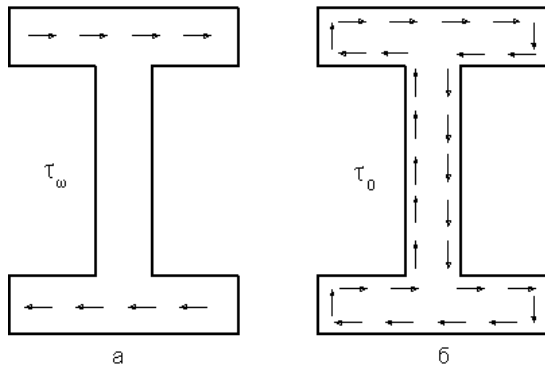


Рис. 3.5.

Укажем, что для тонкостенных стержней не всегда приемлем принцип Сен-Венана. В ряде случаев краевые эффекты в этих стержнях распространяются на гораздо большее расстояние от торцов, чем в стержнях, имеющих сплошные массивные поперечные сечения. Например, рассмотрим растяжение стержня двутаврового сечения, один из концов которого зашпелен, а на другом конце к полкам приложены две силы  $P$ , находящиеся на расстоянии  $e$  от оси стенки (рис. 3.6). Если бы стержень имел массивное прямоугольное сечение, то по принципу Сен-Венана на расстояниях от торца, превышающих больший размер поперечного сечения, нормальные напряжения  $\sigma_z$  распределялись бы рав-

номерно. Точное решение задачи о растяжении стержня сосредоточенной силой, приложенной в центре тяжести сечения, хорошо подтверждает принцип Сен-Венана.

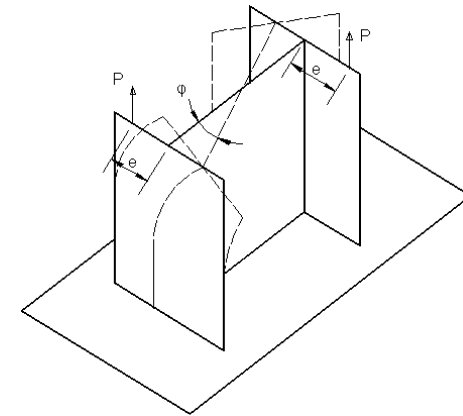


Рис. 3.6.

Обратимся теперь к деформированию тонкостенного стержня двутаврового сечения. Если бы стенка отсутствовала, то каждая из полок растягивалась бы силой  $P$ , приложенной с эксцентриситетом  $e$ . Перенесем силы параллельно линиям их действия в центры тяжести концевых поперечных сечений полок. В этом случае каждая из полок будет растягиваться силой  $P$  и изгибаться присоединенной парой с моментом  $P \cdot e$  (рис. 3.6). Нормальные напряжения  $\sigma_z$ , являющиеся суммой напряжений от растяжения и чистого изгиба, распределяются по сечению стенки неравномерно и одинаковы во всех сечениях по длине стержня. Стенка связывает полки в единое сечение и препятствует свободному изгибу каждой из них в отдельности. Для сплошного сечения эта связь достаточно жесткая и неравномерность распределения напряжений охватывает короткий участок по длине стержня. По мере уменьшения толщины стенки жесткость связи между полками уменьшается, и длина участка неравномерного распределения напряжений увеличивается. При исчезающе малой жесткости стенки, когда каждая из полок изгибается независимо от другой, длина этого участка становится равной длине всего стержня.

### 3.3. Деформации поперечных сечений тонкостенных стержней открытого профиля

Пусть цилиндрическая поверхность (рис. 3.7) является срединной поверхностью тонкостенного стержня открытого профиля.

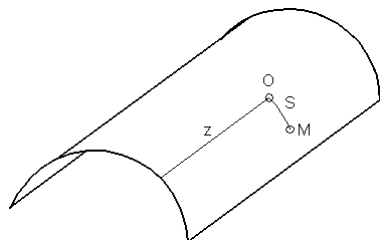


Рис. 3.7.

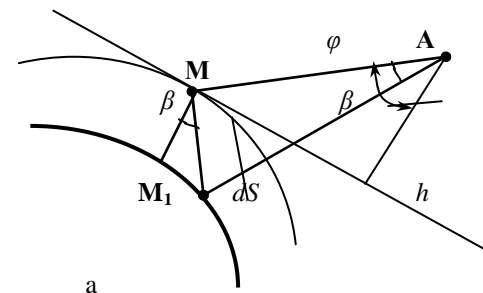
Положение точки  $M$  этой поверхности определяется координатами  $z, S$ , взятыми на самой поверхности. Рассмотрим перемещения  $w(z, S)$  вдоль оси стержня и  $v(z, S)$  по направлению касательной к дуге  $S$  поперечного сечения. При известных перемещениях составляющие деформаций определяются естественно, выражениями:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_s = \frac{\partial v}{\partial S}; \quad \gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial S} + \frac{\partial v}{\partial z}.$$

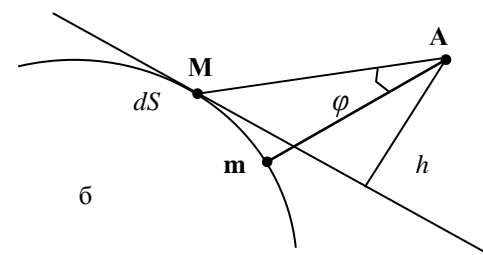
Как показано выше, тонкостенный стержень отличается от длинной цилиндрической оболочки очень высокой жесткостью контура поперечного сечения. Полагаем указанный контур недеформируемым (гипотеза жесткого контура). В этом случае  $\varepsilon_s = \frac{\partial v}{\partial S} = 0$  и, следовательно, перемещение  $v$  не зависит от координаты  $S$ .

При свободном кручении касательные напряжения  $\tau_0$  вдоль средней линии поперечного сечения равны нулю, поэтому угол сдвига  $\gamma_{zs} = 0$ . Будем считать последнее равенство справедливым и при стесненном кручении.

Предположим, что при кручении стержня поперечное сечение повернулось вокруг некоторого полюса  $A$  (рис. 3.8 а).



а



б

Рис. 3.8.

Вследствие деформации поперечного сечения точка  $M$  переместится на некоторую величину  $w$  вдоль оси  $Oz$ . Поскольку толщина  $\delta$  стенки стержня величина малая по сравнению с остальными параметрами сечения, то можно считать, что перемещения  $w$  всех точек сечения, лежащих на прямой, проходящих через точку  $M$  перпендикулярно средней линии, равны перемещениям  $w$  точки  $M$ . Иными словами, деформации поперечного сечения определяются деформациями средней линии.

Пусть проекция полного перемещения точки  $M$  на плоскость чертежа есть  $MM_1$ . Вследствие малости угла поворота  $\varphi$  сечения принимаем, что  $MM_1 = AM \cdot \varphi$  (рис. 3.8а).

Перемещение по направлению касательной к контуру поперечного сечения точки  $M$  есть

$$v = MM_1 \cos \beta = AM \cdot \varphi \cdot \cos \beta = h\varphi,$$

где  $h$  – длина перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на направление касательной в точке  $M$  к контуру сечения. Воспользуемся далее услови-

ем  $\gamma_{zs} = 0$ . Из него следует, что  $\frac{\partial w}{\partial S} = -\frac{\partial v}{\partial z}$ . Но так как  $\frac{\partial v}{\partial z} = h\varphi'(z)$ , то

$$\frac{\partial w}{\partial S} = -h\varphi'(z). \text{ Теперь}$$

$$w(z, S) = -\varphi'(z) \int_0^S h dS + w_0(z), \quad (3.7)$$

где  $w_0(z)$  – некоторая функция.

На рис. 3.8б видно, что  $hdS$  есть удвоенная площадь треугольника с основанием  $dS$  и высотой  $h$ , равная, в свою очередь, с точностью до малых более высокого порядка удвоенной площади элементарного сектора  $MAm$ . Следовательно,  $\int_0^S hdS = \omega(S)$  есть удвоенная площадь сектора, который получается вращением радиуса  $AM$  вокруг полюса  $A$  при перемещении точки  $M$  по дуге  $S$  вдоль средней линии поперечного сечения (рис. 3.9).

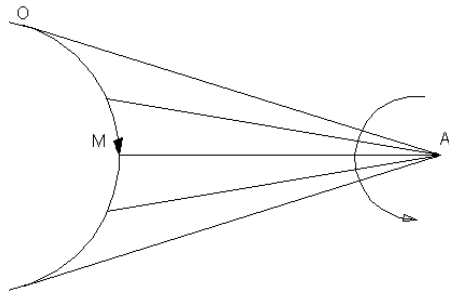


Рис. 3.9.

Величину  $\omega(S)$  называют секториальной площадью.

Подставив в уравнение (3.7)  $\int_0^S hdS = \omega(S)$ , получим:

$$w(z, S) = w_0(z) - \varphi'(z)\omega(S). \quad (3.8)$$

Величина  $w_0(z)$  есть перемещение точки  $O$  (рис. 3.9) начала отсчета дуги  $S$  контура поперечного сечения. Перемещения точек средней линии поперечного сечения по направлению оси стержня состоят из перемещения  $w_0(z)$  точки  $O$  и перемещений  $\varphi'(z)\omega(S)$ , получающихся вследствие деформации поперечного сечения.

Секториальная площадь  $\omega(S)$  зависит от положения полюса  $A$  и начальной точки отсчета  $O$ . При заданных положениях полюса  $A$  и точки  $O$  секториальные площади изображаются в виде эпюр, построенных на средней линии поперечного сечения. Для этого в каждой точке средней линии откладывают перпендикулярно к ней соответствующее значение секториальной площади. Приращение секториальной площади считается положительным, если радиус-вектор  $AM$  поворачивается против хода часовой стрелки, и отрицательными – в противном случае. Поэтому и сами секториальные площади могут оказаться положительными или отрицательными в зависимости от положения полюса  $A$  и начальной точки отсчета  $O$ . На рис. 3.10 приведены примеры эпюр секториальных площадей, полученные при одном и том же положении полюса  $A$ , но при разных положениях начала отсчета  $O$ .

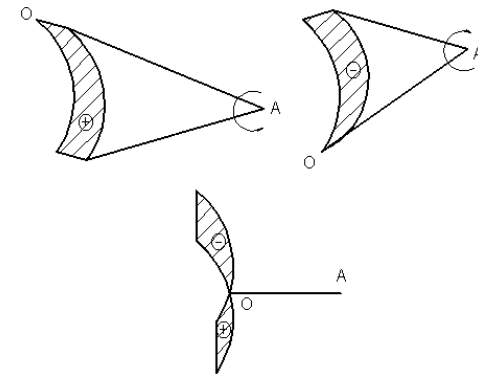


Рис. 3.10.

Укажем, что если средняя линия поперечного сечения состоит из отрезков прямой, то и эпюры секториальных площадей будут ограничены также отрезками прямых.

На рис. 3.11 приведена эпюра секториальных площадей для поперечного сечения в виде швеллера. При этом в качестве полюса  $A$  взят центр из-

гиба, а за начальную точку отсчета  $O$  принята точка пересечения оси симметрии сечения со средней линией.

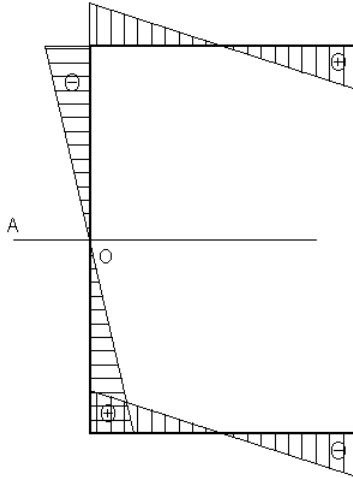


Рис. 3.11.

Если контур поперечного сечения разветвляющийся, то необходимо строить эпюру секториальных площадей с заходом на каждую ветвь контура.

Из уравнения (3.8) следует, что деформация поперечного сечения тонкостенного стержня открытого профиля есть  $\varphi'(z)\omega(S) = w_0(z) - w(z, S)$ . Поскольку  $\varphi'(z) = \theta(z)$  есть относительный угол закручивания, то  $w_0(z) - w(z, S) = \theta(z)\omega(S)$ . Если  $\theta(z) = \theta$  – величина постоянная, как в случае свободного кручения, то деформация от  $z$  не зависит, т.е. деформации всех поперечных сечений одинаковы. Деформации сечений будут неодинаковыми, если относительный угол закручивания изменяется по длине стержня.

### 3.4. Дополнительные напряжения при стесненном кручении тонкостенных стержней открытого профиля

Обратимся снова к срединной поверхности тонкостенного стержня открытого профиля (рис. 3.7). В любой точке  $M$  указанной поверхности имеет место плоское напряженное состояние и, следовательно, для связи между составляющими деформаций  $\varepsilon_z, \varepsilon_s$  с соответ-

ствующими компонентами напряжений  $\sigma_\omega$  и  $\sigma_s$  по закону Гука можем записать:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_\omega - \mu\sigma_s); \quad \varepsilon_s = \frac{1}{E}(\sigma_s - \mu\sigma_\omega). \quad (3.9)$$

В связи с принятой гипотезой жесткого контура имеем  $\varepsilon_s = 0$  и, далее,  $\sigma_s = \mu\sigma_\omega$ . С учетом последнего получается, что

$$\sigma_\omega = E_1\varepsilon_z, \quad (3.10)$$

где  $E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2}$ .

Компоненту  $\varepsilon_z$  деформации найдем, продифференцировав (3.8) по  $z$ :

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = w_0'(z) - \varphi''(z)\omega(S),$$

а для напряжения, следовательно, будем иметь:

$$\sigma_\omega = E_1w_0'(z) - E_1\varphi''(z)\omega(S). \quad (3.11)$$

Как указано в разделе 3.1, внутренние силы, соответствующие напряжениям  $\sigma_\omega$ , образуют самоуравновешенную систему. Поэтому справедливость соотношений (3.5) сохраняется.

Первое из равенств (3.5) совместно с (3.11) дает

$$N_z = \int_A \sigma_\omega dA = E_1w_0'(z) \int_A dA - E_1\varphi''(z) \int_A \omega(S) dA = 0. \quad (3.12)$$

Величину  $\int_A \omega(S) dA = S_\omega$ , измеряемую в единицах длины в четвертой степени, называют секториальным статическим моментом поперечного сечения стержня. На основании (3.12) получается, что

$$w_0'(z) = \varphi''(z) \frac{S_\omega}{A}. \quad (3.13)$$

В зависимости от положения начальной точки отсчета секториальный статический момент может принимать положительные и отрицательные значения, а также, в частности, равняться нулю. Выберем начальную точку отсчета так, чтобы  $S_\omega = 0$ . Такую точку называют главной секториальной. Если  $S_\omega = 0$ , то  $w'_0(z) = 0$  и для определения нормального напряжения  $\sigma_\omega$  формула (3.11) переписывается как

$$\sigma_\omega = -E_1 \varphi''(z) \omega(S). \quad (3.14)$$

Для нахождения касательных напряжений  $\tau_\omega$  воспользуемся третьим из уравнений равновесия Навье-Коши (1.1), которое в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\frac{\partial \tau_\omega}{\partial S} + \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial z} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \tau_\omega}{\partial S} = -\frac{\partial \sigma_\omega}{\partial z} = E_1 \varphi'''(z) \omega(S). \quad (3.15)$$

Проинтегрировав это уравнение, получим:

$$\tau_\omega = E_1 \varphi'''(z) \int \omega(S) dS + \psi(z),$$

где  $\psi(z)$  – произвольная функция.

В первом слагаемом этого выражения после умножения и деления на толщину стенки  $\delta$  можно выделить  $\delta dS = dA$  и тогда

$$\tau_\omega = E_1 \varphi'''(z) \frac{1}{\delta} \int \omega(S) dA + \psi(z).$$

Введем обозначение  $S_\omega^{omc} = \int \omega(S) dA$ , где  $S_\omega^{omc}$  – секториальный статический момент отсеченной части поперечного сечения стержня.

Теперь

$$\tau_\omega = E_1 \varphi'''(z) \frac{S_\omega^{omc}}{\delta} + \psi(z).$$

Воспользуемся далее граничным условием в форме равенства нулю напряжения  $\tau_\omega$  на поверхности профиля ( $S_\omega^{omc} = 0$ ).

$$\tau_\omega|_S = 0.$$

Окончательная формула для  $\tau_\omega$  с учетом этого будет иметь вид:

$$\tau_\omega = E_1 \varphi'''(z) \frac{S_\omega^{omc}}{\delta}. \quad (3.16)$$

Выше указывалось, что сумма моментов поверхностных сил, соответствующих касательным напряжениям  $\tau_\omega$  есть изгибно-крутящий момент  $M_\omega$  (3.6). Взяв сумму моментов этих сил относительно полюса и принимая во внимание, что  $dA = \delta dS$ , получим:

$$M_\omega = h \int_A \tau_\omega dA \cdot h = E_1 \varphi'''(z) \int_A S_\omega^{omc} h \delta \frac{dS}{\delta},$$

где  $h$  введено в разделе 3.3.

Воспользовавшись тем, что  $h dS = d\omega$ , найдем:

$$M_\omega = E_1 \varphi'''(z) \int_A S_\omega^{omc} d\omega. \quad (3.17)$$

Интеграл в (3.17) вычислим по частям:

$$\begin{aligned} \int_A S_\omega^{omc} d\omega &= S_\omega^{omc} \omega \Big|_{S_1}^{S_2} - \int_A \omega^2 dA. \\ u &= S_\omega^{omc}; \quad du = dS_\omega^{omc} = \omega dA; \\ dv &= d\omega; \quad v = \omega. \end{aligned}$$

Здесь  $S_1, S_2$  – координаты концов средней линии поперечного сечения при заданной начальной точке отсчета  $O$ .

Очевидно, что при  $S = S_1$  и  $S = S_2$  имеем  $S_\omega^{omc} = 0$  и, следовательно,

$$\int_A S_\omega^{omc} d\omega = -\int_A \omega^2 dA.$$

Величину  $J_\omega = \int_A \omega^2 dA$ , измеряемую в единицах длины в шестой степени, называют секториальным моментом инерции поперечного сечения. Поэтому с учетом проведенных выкладок для изгибно-крутящего момента  $M_\omega$  (3.17) будем иметь:

$$M_\omega = -E_1 J_\omega \varphi'''(z). \quad (3.18)$$

Произведение  $E_1 J_\omega$  называют секториальной жесткостью стержня.

Из формулы (3.18) определяем:

$$\varphi'''(z) = -\frac{M_\omega}{E_1 J_\omega}.$$

Подставив этот результат в (3.16), установим окончательное выражение для касательного напряжения  $\tau_\omega$ . Имеем:

$$\tau_\omega = -\frac{M_\omega S_\omega^{omc}}{J_\omega \delta}. \quad (3.19)$$

Введем следующее определение. Бимоментом назовем величину, определяемую интегралом

$$B = \int_A \sigma_\omega \omega \cdot dA. \quad (3.20)$$

Подставляем в (3.20) выражение (3.14). Тогда получим:

$$B = -E_1 \varphi''(z) \int_A \omega^2 dA = -E_1 J_\omega \varphi''(z). \quad (3.21)$$

Отсюда

$$\varphi''(z) = -\frac{B}{E_1 J_\omega}. \quad (3.22)$$

Очевидно теперь, что в соответствии с (3.14), (3.22) для напряжения  $\sigma_\omega$  можно записать:

$$\sigma_\omega = -\frac{B \cdot \omega}{J_\omega}. \quad (3.23)$$

Продифференцируем (3.22) по  $z$ :

$$\frac{dB}{dz} = -E_1 J_\omega \varphi'''(z). \quad (3.24)$$

Из сопоставления (3.18) и (3.24) имеем:

$$M_\omega = \frac{dB}{dz}. \quad (3.25)$$

Таким образом, изгибно-крутящий момент равен первой производной от бимоента по координате  $z$ .

По формулам (3.19) и (3.23) определяются дополнительные касательные  $\tau_\omega$  и нормальные  $\sigma_\omega$  напряжения, возникающие в тонкостенных стержнях открытого профиля при стесненном кручении. Изгибно-крутящий момент и бимомент находятся по формулам (3.18) и (3.21) через производные  $\varphi$  угла закручивания стержня.

Напомним, что основные касательные напряжения  $\tau_0$ , возникающие при свободном кручении в точках, лежащих на срединной поверхности стержня, равны нулю. Поэтому при свободном кручении деформации сдвига  $\gamma_{zs}$  действительно равны нулю. При стесненном кручении дополнительные касательные напряжения  $\tau_\omega$  распределяются по толщине стенки равномерно. Это означает, что в точках, лежащих в срединной поверхности, действуют касательные напряжения  $\tau_\omega$  и углы  $\gamma_{zs} \neq 0$ . Следовательно, полученные результаты противоречат второй из введенных выше гипотез. Это противоречие, как показывают исследования, незначительно влияет на полученные основные зависимости, и установленные формулы (3.19), (3.23) позволяют определять дополнительные напряжения с достаточной точностью.

### 3.5. Определение положения полюса и главной секториальной нулевой точки

Установим зависимость между секториальными площадями, взятыми при разных положениях полюса и начальной точки отсчета. Пусть  $xOy$  – некоторая система координат в плоскости поперечного сечения стержня и кривая – средняя линия этого сечения (рис. 3.12).

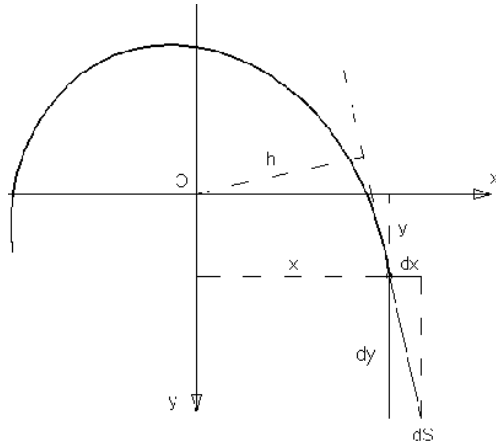


Рис. 3.12.

Величину  $d\omega = hdS$  будем рассматривать как момент вектора  $dS$  относительно полюса. Если поместить полюс в начале координат и взять элемент  $dS$  в точке с координатами  $x, y$ , то, очевидно, что  $hdS = ydx - xdy$ .

Примем теперь за полюсы две произвольные точки  $A(x_a, y_a)$  и  $B(x_b, y_b)$ . Площади элементарных секторов  $d\omega = hdS$  при этих положениях полюса можно записать так:

– при полюсе  $A$ :

$$d\omega_a = (y - y_a)dx - (x - x_a)dy;$$

– при полюсе  $B$ :

$$d\omega_b = (y - y_b)dx - (x - x_b)dy; .$$

Приращение площади элементарного сектора при переходе от одного полюса к другому будет

$$d\omega_a - d\omega_b = (y_b - y_a)dx - (x_b - x_a)dy;$$

или

$$d\omega_a - d\omega_b = \alpha_y dx - \alpha_x dy, \quad (3.26)$$

где

$$\alpha_y = y_b - y_a; \quad \alpha_x = x_b - x_a.$$

Интегрируя (3.26), получаем:

$$\omega_a = \omega_b + \alpha_y x - \alpha_x dy + \beta, \quad (3.27)$$

где  $\beta$  – произвольная постоянная интегрирования.

Определим положение полюса  $A$  и начальной точки отсчета  $O$  так, чтобы удовлетворялись условия (3.5) – равенства нулю главного вектора и главного момента, соответствующих дополнительным нормальным напряжениям  $\sigma_\omega$ . Предварительно подставим в (3.5) соотношение (3.14). Теперь

$$N_z = -E_1 \varphi'' \int_A \omega_\alpha dA = 0;$$

$$M_y = -E_1 \varphi'' \int_A \omega_\alpha x dA = 0;$$

$$M_x = -E_1 \varphi'' \int_A \omega_\alpha y dA = 0.$$

Отсюда

$$\int_A \omega_b dA + \alpha_y \int_A x dA - \alpha_x \int_A y dA + \beta \int_A dA = 0;$$

$$\int_A \omega_b x dA + \alpha_y \int_A xy dA - \alpha_x \int_A y^2 dA + \beta \int_A y dA = 0;$$

$$\int_A \omega_b y dA + \alpha_y \int_A x^2 dA - \alpha_x \int_A xy dA + \beta \int_A x dA = 0.$$

Последние равенства можно переписать так:

$$\begin{aligned} S_{\omega}^b + \alpha_y S_y - \alpha_x S_x + \beta A &= 0; \\ S_{\omega x}^b + \alpha_y J_{xy} - \alpha_x J_x + \beta S_x &= 0; \\ S_{\omega y}^b + \alpha_y J_y - \alpha_x J_{xy} + \beta S_y &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $S_{\omega x}^b = \int_A \omega_b x dx$ ,  $S_{\omega y}^b = \int_A \omega_b y dx$  – линейно-секториальные моменты.

Если координатные оси  $Ox$ ,  $Oy$  – главные, то статические моменты  $S_x$ ,  $S_y$  равняются нулю. Первое из уравнений отделяется от системы и имеет вид

$$S_{\omega}^b + \beta A = 0,$$

откуда

$$\beta = -\frac{S_{\omega}^b}{A}. \quad (3.28)$$

Таким образом, определение положения главной секториальной нулевой точки  $M_0$  не связано с определением полюса  $A$ . Для нахождения  $\alpha_x, \alpha_y$  получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} J_x \alpha_x - J_{xy} \alpha_y &= S_{\omega x}^b; \\ J_{xy} \alpha_x - J_y \alpha_y &= S_{\omega y}^b. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{J_{xy} S_{\omega y}^b - J_y S_{\omega x}^b}{J_{xy}^2 - J_x J_y}; \\ \alpha_y &= \frac{J_x S_{\omega y}^b - J_{xy} S_{\omega x}^b}{J_{xy}^2 - J_x J_y}. \end{aligned}$$

Если центральные оси  $Ox$ ,  $Oy$  еще и главные, то центробежный момент инерции  $J_{xy} = 0$ , а значения  $\alpha_x, \alpha_y$  будут равны:

$$\alpha_x = \frac{S_{\omega x}^b}{J_x}; \quad \alpha_y = -\frac{S_{\omega y}^b}{J_y}. \quad (3.29)$$

Схема определения полюса  $A$  и главной секториальной нулевой точки  $M_0$  предлагается следующей. Выбираются сначала в качестве полюса и начальной точки отсчета произвольные точки  $B$  и  $O$ . Определяется секториальная площадь  $\omega_b$ , секториальный статический момент  $S_{\omega}^b$  и линейно-секториальные моменты  $S_{\omega y}^b, S_{\omega x}^b$ . Затем по формулам (3.28), (3.29) вычисляется величина  $\beta$ , которой и определяется положение главной секториальной нулевой точки  $M_0$ , и значения  $\alpha_x, \alpha_y$  разности координат точек  $B$  и  $A$ . Отложив от точки  $B$  величины  $\alpha_x, \alpha_y$ , получим полюс  $A$ .

Полюс  $A$ , для которого выполняются условия (3.29), называют иногда центром сдвига (С.П. Тимошенко), а чаще – центром жесткости или центром кручения. Но по существу точка  $A$  является центром изгиба.

Секториальную площадь  $\omega$ , найденную для случая, когда полюс  $A$  находится в центре изгиба и в качестве начальной точки взята главная секториальная точка – нулевая точка  $M_0$ , называют главной секториальной площадью.

### 3.6. Дифференциальное уравнение угла закручивания

Изгибно-крутящий момент  $M_{\omega}$  и бимомент  $B$  определяются через производные угла закручивания  $\varphi(z)$ .

Рассмотрим задачу нахождения угла  $\varphi(z)$ , момента  $M_{\omega}$  и бимомента  $B$ . Обратимся к уравнению (3.6), которое перепишем еще раз:

$$M_0 + M_{\omega} = M_z.$$

Здесь момент чистого кручения

$$M_0 = GJ_k \varphi'(z);$$



изгибно-крутящий момент

$$M_\omega = -E_1 J_\omega \varphi'''(z);$$

величина  $M_z$  – внешний крутящий момент, приложенный к стержню, а  $J_k$  – геометрическая характеристика жесткости при кручении, определяемая формулой (3.1).

Подставим в уравнение моментов значения  $M_0$  и  $M_\omega$ . Имеем:

$$GJ_k \varphi'(z) - E_1 J_\omega \varphi'''(z) = M_z,$$

или

$$\varphi'''(z) - \frac{GJ_k}{E_1 J_\omega} \varphi'(z) = -\frac{M_z}{E_1 J_\omega}.$$

Ограничимся рассмотрением стержней постоянного поперечного сечения. При этом коэффициент при  $\varphi'(z)$  будет иметь постоянное значение. Обозначим этот коэффициент через  $k^2$ , т.е.

$$k = \sqrt{\frac{GJ_k}{E_1 J_\omega}}.$$

Величину  $k$  называют изгибно-крутильной характеристикой стержня.

Продифференцировав полученное уравнение по  $z$ , можем записать:

$$\varphi^{IV}(z) - k^2 \varphi''(z) = -\frac{m(z)}{E_1 J_\omega}, \quad (3.30)$$

где  $m(z) = dM_z / dz$  – интенсивность крутящего момента.

Таким образом, для определения угла закручивания  $\varphi(z)$  получено линейное неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Естественно обсудить возможные граничные условия, которые должны быть записаны для нахождения постоянных интегрирования. Указанные условия связаны с характером закрепления стержня.

1. Пусть конец стержня свободен. Если при этом указанный конец не нагружен, то здесь равны нулю крутящий момент  $M_z$ , дополнительные нормальные напряжения  $\sigma_\omega$  и, следовательно, бимомент. Тогда граничные условия принимают вид:

$$M_z(0) = 0, B(0) = 0; \text{ или } M_z(l) = 0, B(l) = 0.$$

2. Пусть конец стержня жестко защемлен. Здесь в нуль обращаются угол закручивания  $\varphi$  и деформация защемленного конца. Поэтому граничные условия будут следующими:

$$\varphi(0) = 0; \varphi'(0) = 0; \text{ или } \varphi(l) = 0; \varphi'(l) = 0.$$

3. Пусть конец стержня шарнирно оперт. Будем считать, что опорное сечение не может поворачиваться. В таком случае обращаются в нуль угол закручивания  $\varphi$  и дополнительные нормальные напряжения  $\sigma_\omega$ , а, следовательно и бимомент. При этом граничные условия запишутся так:

$$\varphi(0) = 0; B(0) = 0; \text{ или } \varphi(l) = 0; B(l) = 0.$$

### 3.7. Решение дифференциального уравнения угла закручивания операционным методом

Для отыскания угла закручивания путем интегрирования уравнения (3.30) применим операционный метод.

Будем пользоваться изображением оригиналов по Карсону-Лапласу. Другими словами, считаем, что изображение  $\bar{\varphi}(p)$  оригинала  $\varphi(z)$  определяется при помощи интегрального преобразования:

$$\bar{\varphi}(p) = p \int_0^\infty e^{-pz} \varphi(z) dz. \quad (3.31)$$

Пусть изображением решения дифференциального уравнения (3.30) будет  $\Phi(p)$ , т.е.  $\varphi(z) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \Phi(p)$ .

Вычислим изображение второй производной от угла закручивания. Имеем:

$$\varphi''(z) \leftarrow \underset{\circ}{\dashrightarrow} p \int_0^{\infty} e^{-pz} \varphi''(z) dz. \quad (3.32)$$

Рассмотрим интеграл, входящий в (3.32). Взяв его по частям, получим:

$$p \int_0^{\infty} e^{-pz} \varphi''(z) dz = p \left[ e^{-pz} \varphi'(z) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pz} \varphi'(z) dz \right] = p \left[ -\varphi'(0) + p \int_0^{\infty} e^{-pz} \varphi'(z) dz \right].$$

$$\begin{aligned} \bar{u} &= e^{-pz}; & d\bar{u} &= -pe^{-pz} dz; \\ d\bar{v} &= \varphi''(z) dz; & \bar{v} &= \varphi'(z). \end{aligned}$$

Последний интеграл также вычислим по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pz} \varphi'(z) dz &= \left[ e^{-pz} \varphi(z) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pz} \varphi(z) dz \right] = -\varphi(0) + \Phi(p). \\ \bar{u} &= e^{-pz}; & d\bar{u} &= -pe^{-pz} dz \\ d\bar{v} &= \varphi'(z) dz; & \bar{v} &= \varphi(z). \end{aligned}$$

С учетом произведенных выкладок для изображения  $\varphi''(z)$  будем иметь:

$$\varphi''(z) \leftarrow \underset{\circ}{\dashrightarrow} p^2 \left[ \Phi(p) - \varphi(0) - \frac{\varphi'(0)}{p} \right].$$

Аналогичным образом для изображения  $\varphi^{IV}(z)$  можем записать:

$$\varphi^{IV}(z) \leftarrow \underset{\circ}{\dashrightarrow} p^4 \left[ \Phi(p) - \varphi(0) - \frac{\varphi'(0)}{p} - \frac{\varphi''(0)}{p} - \frac{\varphi'''(0)}{p} \right].$$

Изображающее (3.30) алгебраическое уравнение теперь будет таким:

$$\begin{aligned} p^4 \left[ \Phi(p) - \varphi(0) - \frac{\varphi'(0)}{p} - \frac{\varphi''(0)}{p} - \frac{\varphi'''(0)}{p} \right] - \\ - k^2 p^2 \left[ \Phi(p) - \varphi(0) - \frac{\varphi'(0)}{p} \right] = - \frac{m(p)}{E_1 J_{\omega}}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где  $m(p) \leftarrow \underset{\circ}{\dashrightarrow} m(z)$  – изображение интенсивности крутящего момента.

Решив уравнение (3.33), получим изображение решения уравнения (3.24) в виде:

$$\Phi(p) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot \frac{1}{p} + \varphi''(0) \cdot \frac{1}{p^2 - k^2} + \varphi'''(0) \cdot \frac{1}{p(p^2 - k^2)} - \frac{m(p)}{E_1 J_{\omega} \cdot p^2 (p^2 - k^2)}. \quad (3.34)$$

Оригиналы первых четырех слагаемых (3.28) определяются просто<sup>1</sup>. Вид последнего слагаемого зависит от изображения  $\omega(p)$  интенсивности крутящего момента и его определяют при решении конкретных задач. Обозначим пока оригинал этого слагаемого так:

$$\frac{m(p)}{E_1 J_{\omega} \cdot p^2 (p^2 - k^2)} \leftarrow \underset{\circ}{\dashrightarrow} \varphi^*(z). \quad (3.35)$$

Оригиналы первых двух слагаемых имеют вид:

$$\varphi(0) \leftarrow \underset{\circ}{\dashrightarrow} \varphi(0); \quad \varphi'(0) \frac{1}{p} \leftarrow \underset{\circ}{\dashrightarrow} \varphi'(0) \cdot z.$$

Оригинал третьего слагаемого:

$$\frac{1}{p^2 - k^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{p^2 + k^2 - p^2}{p^2 - k^2} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{p^2}{p^2 - k^2} - 1 \right) \leftarrow \underset{\circ}{\dashrightarrow} \frac{1}{k^2} (ch kz - 1).$$

<sup>1</sup> Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z – преобразования. – М.: Наука, 1971;

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970.

Оригинал четвертого слагаемого:

$$\frac{1}{p(p^2 - k^2)} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{p^2 + k^2 - p^2}{p(p^2 - k^2)} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{p}{p^2 - k^2} - \frac{1}{p} \right) \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{k^3} (shkz - kz).$$

Итак, решение уравнения (3.30) получается в форме:

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \varphi'(0)z + \frac{\varphi''(0)}{k^2} (chkz - 1) + \frac{\varphi'''(0)}{k^3} (shkz - kz) - \varphi^*(z). \quad (3.36)$$

Если учесть (3.18), (3.22) и, кроме того, (3.6), то имеем:

$$\varphi'''(z) = -\frac{M_z}{E_1 J_\omega} + k^2 \varphi'(z); \quad \varphi'''(0) = -\frac{M_z(0)}{E_1 J_\omega} + k^2 \varphi'(0).$$

Теперь решение (3.36) дифференциального уравнения (3.30) перепишется так:

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{k} shkz - \frac{B(0)}{GJ_k} (chkz - 1) - \frac{M_z(0)}{kGJ_k} (shkz - kz) - \varphi^*(z). \quad (3.37)$$

Произвольные постоянные по существу представляют собой начальные параметры –  $\varphi(0)$  есть абсолютный угол закручивания,  $\varphi'(0)$  – относительный угол закручивания,  $M_z(0)$  – внешний крутящий момент,  $B(0)$  – бимомент на левом конце стержня. Указанные параметры определяются из условий закрепления стержня.

После нахождения угла закручивания  $\varphi(z)$  остальные величины определяются достаточно просто:

– относительный угол закручивания будет равен

$$\theta(z) = \varphi'(z) = \varphi'(0)chkz - \frac{B(0)}{GJ_k} shkz - \frac{M_z(0)}{GJ_k} (chkz - 1) - \varphi^{*'}(z). \quad (3.38)$$

Запишем теперь вторую и третью производные от угла закручивания. Учитывая, что  $k^2 = \frac{GJ_k}{E_1 J_\omega}$ , получим:

$$\varphi''(z) = \varphi'(0)k \cdot shkz - \frac{B(0)}{E_1 J_\omega} chkz - \frac{M_z(0) \cdot k}{GJ_\omega} shkz - \varphi^{*''}(z);$$

$$\varphi'''(z) = \varphi'(0)k^2 chkz - \frac{B(0)k}{E_1 J_\omega} shkz - \frac{M_z(0)}{GJ_\omega} chkz - \varphi^{*'''}(z).$$

С использованием последних зависимостей для бимоента и изгибно-крутящего момента будем иметь:

$$B = E_1 J_\omega \varphi''(z) = -\frac{GJ_k}{k} \varphi'(0) shkz + B(0)chkz + \frac{M_z(0)}{k} shkz + E_1 J_\omega \varphi^{*''}(z);$$

$$M_\omega = -E_1 J_\omega \varphi'''(z) = -GJ_k \varphi'(0)chkz + B(0)kshkz + M_z(0)chkz + E_1 J_\omega \varphi^{*'''}(z). \quad (3.39)$$

Момент  $M_0$  свободного кручения принимает форму:

$$M_0 = GJ_k \varphi'(z) = GJ_k \varphi'(0)chkz - B(0)kshkz - M_z(0)(chkz - 1) - GJ_k \varphi^{*'}(z). \quad (3.40)$$

Величина крутящего момента в произвольном сечении определяется так:

$$M_z = M_0 + M_\omega = M_k(0) + E_1 J_\omega \left[ \varphi^{*'''}(z) - k^2 \varphi^{*'}(z) \right]. \quad (3.41)$$

Рассмотрим частный случай, соответствующий  $m(z) = m = const$ . При этом  $m(p) = m$  и тогда

$$\frac{m(p)}{E_1 J_\omega p^2 (p^2 - k^2)} = \frac{m}{E_1 J_\omega} \cdot \frac{1}{p^2 k^2} \left( \frac{p^2}{p^2 - k^2} - 1 \right) = \frac{m}{E_1 J_\omega} \cdot \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{p^2 - k^2} - \frac{1}{p^2} \right) \xrightarrow{\cdot} \xrightarrow{\cdot} \frac{m}{E_1 J_\omega} \cdot \frac{1}{k^2} \left( chkz - 1 - \frac{k^2 z^2}{2} \right) = \varphi^*(z). \quad (3.42)$$

В этом случае  $\varphi''''(z) - k^2 \varphi''(z) = \frac{mz}{E_1 J_\omega}$ .

Поэтому имеем

$$M_z = M_z(0) + mz. \quad (3.43)$$

Для упрощения определения  $\varphi(z)$ ,  $\theta(z)$ ,  $B(z)$  и  $M_z(0)$  составим таблицу функций влияния (табл. 3.1).

Таблица 3.1

	$M_z(0)$	$B(0)$	$\theta(z)$	$\varphi(z)$	$m = const$
$\varphi(z)$	$\frac{1}{kGJ_k}(kz - shkz)$	$\frac{1}{GJ_k}(1 - chkz)$	$\frac{1}{k} shkz$	1	$\frac{k^2 z^2}{2} + 1 - chkz$
$\theta(z)$	$\frac{1}{GJ_k}(1 - chkz)$	$-\frac{k}{GJ_k} shkz$	$chkz$	0	$\frac{kz - shkz}{k^2 GJ_k}$
$B(z)$	$\frac{1}{k} shkz$	$chkz$	$-\frac{GJ_k}{k} shkz$	0	$\frac{chkz - 1}{k^2}$
$M_z(z)$	1	0	0	0	$z$

**Пример.** Рассматривается задача кручения тонкостенного стержня с шарнирно-опертыми концами сосредоточенным моментом  $M_z^0$ , приложенным на расстояниях  $a$  и  $b$  от концов (рис. 3.13). Граничные условия: при  $z = 0$  –  $\varphi(0) = 0$ ;  $B(0) = 0$ ;  
при  $z = l$  –  $\varphi(l) = 0$ ;  $B(l) = 0$ .

При таких граничных условиях уравнение (3.37) запишется так:

$$\varphi(z) = \frac{\varphi'(0)}{k} shkz + \frac{M_z(0)}{kGJ_k}(kz - chkz) + \varphi^*(z).$$

Интенсивность сосредоточенного момента представим в виде

$$m(z) = M_z^0 \delta(z - a),$$

где  $\delta(z - a)$  – дельта-функция Дирака.

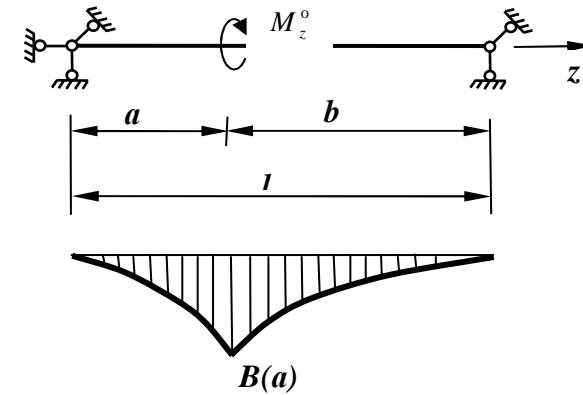


Рис. 3.13.

Изображение интенсивности сосредоточенного момента есть

$$m(p) = M_z^0 p e^{-pa}.$$

Поэтому в соответствии с (3.42) имеем:

$$\frac{m(p)}{E_1 J_\omega p^2 (p^2 - k^2)} = \frac{M_z^0}{E_1 J_\omega} \cdot \frac{p}{p^2 (p^2 - k^2)} e^{-pa} \rightarrow \frac{M_z^0}{E_1 J_\omega k^3} [shk(z - a)_+ - k(z - a)_+]$$

Следовательно,

$$\varphi^*(z) = \frac{M_z^0}{E_1 J_\omega k^3} [k(z - a)_+ - shk(z - a)_+].$$

Таким образом,

$$\varphi(z) = \frac{\theta(0)}{k} shkz + \frac{M_z(0)}{kGJ_k}(kz - chkz) + \frac{M_z^0}{kGJ_k} [k(z - a)_+ - shk(z - a)_+].$$

Для определения  $\theta(0)$  и  $M_z(0)$  воспользуемся условиями на правом конце стержня.

Нетрудно видеть, что в соответствии с (3.39) имеем:

$$B = -\frac{GJ_k}{k} \theta(0) shkz + \frac{M_z(0)}{k} shkz + \frac{M_z^0}{k} shk(z-a)_+.$$

Для нахождения  $\theta(0)$ ,  $M_z(0)$  получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{shkl}{k} \theta(0) + \frac{kl - shkl}{kGJ_k} M_z(0) &= -\frac{M_z^0}{kGJ_k} (kb - shkb); \\ -\frac{GJ_k}{k} shkl \theta(0) + \frac{shkl \theta(0)}{k} M_z(0) &= -\frac{M_z^0}{k} shkb. \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений дает:

$$\theta(0) = \frac{M_z^0}{GJ_k} \left( \frac{shkb}{shkl} - \frac{kb}{kl} \right); \quad M_z(0) = -M_z^0 \frac{b}{l}.$$

Решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего граничным условиям будет иметь вид:

$$\varphi(z) = \frac{M_z^0}{GJ_k} \left( \frac{shkb}{shkl} - \frac{kb}{kl} \right) \frac{shkz}{k} - \frac{M_z^0}{kGJ_k} \frac{b}{l} (kz - shkz) + \frac{M_z^0}{kGJ_k} [k(z-a)_+ - shk(z-a)_+].$$

Бимомент равен

$$B = -\frac{M_z^0}{k} \left[ \frac{shkb}{shkl} shkz - shk(z-a)_+ \right].$$

На рис. 3.13 приведена эпюра бимоментов.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	3
<b>1. Общие уравнения теории упругости</b> .....	4
1.1. Формулировка пространственной задачи теории упругости .....	4
1.2. О методах решения задач теории упругости .....	6
<b>2. Кручение стержней постоянного поперечного сечения</b> .....	9
2.1. Кручение стержня круглого поперечного сечения .....	9
2.2. Кручение стержня произвольного поперечного сечения .....	16
2.3. Функция напряжения Прандтля.....	21
2.4. Мембранная аналогия Прандтля.....	24
2.5. Теорема Бредта о циркуляции касательного напряжения.....	26
2.6. Кручение стержня эллиптического поперечного сечения.....	27
2.7. Кручение стержня прямоугольного поперечного сечения.....	29
<b>3. Кручение тонкостенных стержней</b> .....	34
3.1. Свободное кручение тонкостенного стержня.....	34
3.2. Стесненное кручение тонкостенного стержня .....	39
3.3. Деформация поперечных сечений тонкостенных стержней открытого профиля .....	43
3.4. Дополнительные напряжения при стесненном кручении тонкостенных стержней открытого профиля .....	47
3.5. Определение положения полюса и главной секториальной нулевой точки.....	51
3.6. Дифференциальное уравнение угла закручивания .....	54
3.7. Решение дифференциального уравнения угла закручивания операторным методом .....	55

*Я.И. Рудаев*

КРУЧЕНИЕ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Учебное пособие

Редактор *И.С. Волоскова*  
Технический редактор *О.А. Матвеева*  
Корректор *Е.И. Полихова*  
Компьютерная верстка *Г.Н. Курпа*

Подписано в печать 26.01.06. Формат 60×84<sup>1/16</sup>  
Офсетная печать. Объем 4,75 п.л.  
Тираж 50. Заказ 374.

Издательство Кыргызско-Российского  
Славянского университета  
720000, Бишкек, ул. Киевская, 44.

Отпечатано в типографии КРСУ  
720000, Бишкек, ул. Шопокова, 68.