

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра механики

В.Э. Еремьянц

**ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ
ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
МЕХАНИЗМОВ**

Часть 5

**Динамические модели машин с плоскими
шарнирно-рычажными механизмами**

Учебно-методическое пособие

Бишкек 2007

Рецензент
 докт. техн. наук, проф. *С. Абдраимов*

Печатается по решению
 кафедры механики и РИСО КРСУ

Е 70

Еремьянц В.Э.

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
 МЕХАНИЗМОВ. Ч. 5. Динамические модели машин с плоскими шарнирно-рычажными механизмами: Учебно-методическое пособие. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2007. – 56 с.

Описаны динамические модели и уравнения движения машины, в состав которой входит двигатель, передаточный механизм и исполнительный шарнирно-рычажный механизм. Рассмотрены случаи, когда звенья этих механизмов жесткие и когда они упругие. Приведена методика учета в модели податливости кинематических пар с шариковыми подшипниками качения.

Изложен вывод кинематических передаточных функций синусного, кривошипно-ползунного, кулисного и кривошипно-коромыслового механизмов. На примерах показано определение приведенных моментов сил сопротивлений, включая силы трения, и приведенных моментов инерции этих механизмов.

Для студентов-механиков при выполнении расчетных заданий и курсовых проектов по дисциплинам “Теория механизмов и машин”, “Аналитическая динамика и теория колебаний”, “Динамика машин”, а также при выполнении дипломных проектов по специальности “Динамика и прочность машин”.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение | 4 |
| 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАШИН | |
| 1.1. Динамическая модель машины с жесткими звеньями | 5 |
| 1.2. Динамическая модель машины с упругими звеньями передаточного механизма и жесткими звеньями исполнительного механизма | 10 |
| 1.3. Динамическая модель машины с упругими звеньями исполнительного шарнирно-рычажного механизма | 12 |
| 1.4. Учет в модели податливости соединений звеньев шарнирно-рычажного механизма | 17 |
| 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ МЕХАНИЗМОВ | |
| 2.1. Функции положения и кинематические передаточные функции механизма | 19 |
| 2.2. Передаточные функции синусного механизма | 20 |
| 2.3. Передаточные функции кривошипно-ползунного механизма | 22 |
| 2.4. Передаточные функции кулисного механизма | 25 |
| 2.5. Передаточные функции кривошипно-коромыслового механизма | 29 |
| 3. УЧЕТ СИЛ ТРЕНИЯ В МОДЕЛЯХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ | |
| 3.1. Синусный механизм | 39 |
| 3.2. Кривошипно-ползунный механизм | 45 |
| 3.3. Кулисный механизм | 50 |
| Литература | 55 |

ВВЕДЕНИЕ

В пособии рассматриваются динамические модели машин, состоящих из двигателя, передаточного механизма и шарнирно-рычажного исполнительного механизма. Особенностью этих моделей является то, что их параметры: приведенные моменты сил, приведенные моменты инерции и приведенные коэффициенты жесткости являются переменными величинами и зависят от положения механизма. Движение машины в этих случаях описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, которые имеют аналитическое решение только в некоторых частных случаях.

В первой главе пособия обсуждаются динамические модели и уравнения движения машин для различных случаев: когда звенья всех механизмов жесткие; звенья передаточного механизма упругие, а исполнительного – жесткие; звенья передаточного механизма жесткие, а исполнительного – упругие и, наконец, когда звенья обоих механизмов упругие. Отдельно обсуждены вопросы учета в моделях податливости кинематических соединений звеньев, включающих шариковые подшипники качения.

Зависимость параметров модели от обобщенной координаты и вид уравнения движения машины с шарнирно-рычажными механизмами определяются кинематическими передаточными функциями этих механизмов. В связи с этим вторая глава пособия посвящена выводу передаточных функций для наиболее распространенных механизмов: синусного, кривошипно-ползунного, кулисного, кривошипно-коромыслового механизма. При выводе передаточных функций для расширения информативности пособия автор старался использовать различные методы: аналитические, графические, графоаналитические.

В третьей главе представлены примеры определения приведенных моментов сил полезного сопротивления, сил сухого и жидкостного трения, приведенных моментов инерции масс для некоторых шарнирно-рычажных механизмов.

В конце пособия приведен список литературы по теории механизмов и машин [1–5], в которой читатель может найти более подробную или дополнительную информацию по обсуждаемым в пособии вопросам.

Пособие предназначено для студентов-механиков, изучающих дисциплины «Теория механизмов и машин», «Аналитическая динамика и теория колебаний», «Динамика машин», а также для аспирантов и молодых ученых, работающих в области исследования динамики машин.

1. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАШИН

1.1. Динамическая модель машины с жесткими звеньями

Рассмотрим машину, которая состоит из двигателя, передаточного механизма или трансмиссии и исполнительного шарнирно-рычажного механизма (рис. 1.1а). Если передаточный и исполнительный механизмы не содержат ременных и цепных передач, упругих муфт, тонких длинных валов, и все звенья машины и их соединения можно считать жесткими, то в модели машину можно представить в виде одной массы (рис. 1.1б, в) с приведенным моментом инерции, зависящим от обобщенной координаты $J(\varphi)$. На эту массу действует приведенный момент движущих сил M_D и приведенный момент сил сопротивления M_C .

Напомним, что приведенный момент инерции механизма находится из условия сохранения кинетической энергии механизма, а приведенный момент движущих сил или сил сопротивления – из условия сохранения элементарных работ или мощностей всех движущих сил и сил сопротивления, действующих на звенья механизма.

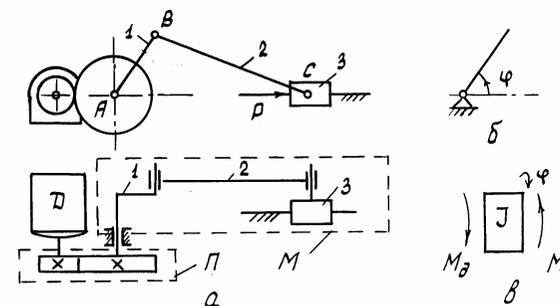


Рис. 1.1. Кинематическая схема машины с исполнительным шарнирно-рычажным механизмом (а) и её одномассовые модели (б, в): Д – двигатель; П – передаточный механизм; М – исполнительный механизм

В качестве звена приведения в машине с жесткими звеньями обычно принимают вал двигателя или входной вал исполнительного ме-

ханизма, а в качестве обобщенной координаты φ – соответственно угол поворота вала двигателя или кривошипа.

Допустим, звеном приведения является вал двигателя, а обобщенной координатой – угол его поворота. Тогда для примера, показанного на рис. 1.1, приведенный момент инерции определится в общем случае так:

$$J = J_{\delta} + J_{k1} + (J_{k2} + J_1)u_{1\delta}^2 + (J_{2S}u_{21}^2 + m_2\chi_{21}^2 + m_3u_{31}^2)u_{1\delta}^2, \quad (1.1)$$

где J_{δ} – момент инерции ротора двигателя; J_{k1}, J_{k2} – моменты инерции зубчатых колес, расположенных соответственно на валу двигателя и на валу кривошипа; J_1 – момент инерции кривошипа; J_{2S} – момент инерции шатуна 2 относительно его центра масс; m_2, m_3 – массы шатуна 2 и ползуна 3; $u_{1\delta}$ – передаточное отношение от кривошипного вала к валу двигателя; $u_{21}, u_{31}, \chi_{21}$ – кинематические передаточные функции от звеньев рычажного механизма 2 и 3 к кривошипу:

$$u_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad u_{31} = \frac{V_3}{\omega_1}, \quad \chi_{21} = \frac{V_{2S}}{\omega_1}, \quad (1.2)$$

где ω_1, ω_2 – угловые скорости соответственно кривошипа и шатуна; V_3 – скорость ползуна; V_{2S} – линейная скорость центра масс шатуна.

Приведенный момент инерции масс (1.1) можно представить в виде:

$$J = \bar{J} + \tilde{J}u_{1\delta}^2, \quad (1.3)$$

где \bar{J}, \tilde{J} – соответственно постоянная и переменная составляющие приведенного момента инерции машины, определяемые как

$$\bar{J} = J_{\delta} + J_{k1} + (J_{k2} + J_1)u_{1\delta}^2, \quad (1.4)$$

$$\tilde{J} = J_{2S}u_{21}^2 + m_2\chi_{21}^2 + m_3u_{31}^2. \quad (1.5)$$

Приведенный момент движущих сил в данном примере равен моменту сил на валу двигателя M_{δ} , а приведенный момент сил сопротивления:

$$M_C = Pu_{31}u_{1\delta},$$

где P – сила сопротивления движению ползуна (рис. 1.1а).

Уравнение, описывающее движение этой модели, может быть получено различными способами. Оно может быть записано в интегральной или в дифференциальной форме.

В основе уравнения движения механизма в интегральной форме лежит теорема об изменении его кинетической энергии, в соответствии с которой

$$T - T_0 = A_{\delta} - A_C. \quad (1.6)$$

где T_0, T – соответственно кинетическая энергия механизма в начальный момент времени и в момент времени t ; A_{δ}, A_C – соответственно работа всех движущих сил и работа всех сил сопротивления, действующих на звенья механизма.

Кинетическая энергия механизма выражается через приведенный момент инерции и угловую скорость звена приведения ω как

$$T = 0,5J\omega^2, \quad T_0 = 0,5J_0\omega_0^2, \quad (1.7)$$

где J_0, ω_0 – значения момента инерции и угловой скорости в начальном положении механизма (в начальный момент времени).

Работы всех сил запишем через приведенные моменты движущих сил и сил сопротивления как

$$A_{\delta} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{\delta} d\varphi, \quad A_C = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_C d\varphi. \quad (1.8)$$

Подставляя соотношения (1.7), (1.8) в (1.6), получим уравнение движения механизма в интегральной или энергетической форме:

$$J\omega^2 - J_0\omega_0^2 = 2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} (M_{\delta} - M_C) d\varphi. \quad (1.9)$$

Если приведенные моменты сил, стоящие под интегралом, зависят только от положения механизма, т.е. его обобщенной координаты или являются постоянными величинами, то угловая скорость звена приведения находится непосредственно из уравнения движения (1.9):

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{J} \left[J_0\omega_0^2 + 2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} (M_{\delta} - M_C) d\varphi \right]}. \quad (1.10)$$

При этом интеграл под корнем имеет знак, который следует учитывать.

Формула (1.10) позволяет построить зависимость угловой скорости звена приведения от угла его поворота $\omega(\varphi)$, которая называется фазовым портретом движения машины.

Зависимость угла поворота звена приведения от времени находится из соотношения $\omega = d\varphi/dt$ как

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega}, \quad t = t_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \omega^{-1} d\varphi. \quad (1.11)$$

Получив функцию $t(\varphi)$, можно преобразовать её в функцию $\varphi(t)$, а исключая из функций $\omega(\varphi)$ и $t(\varphi)$ параметр φ , можно построить функцию $\omega(t)$.

Зависимость углового ускорения звена приведения от угла его поворота определится из соотношений:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}. \quad (1.12)$$

В формулах (1.11), (1.12) функция ω имеет вид (1.10).

Таким образом, при постоянных моментах сил, или при моментах сил, зависящих от обобщенной координаты, все кинематические параметры движения машины находятся аналитически решением уравнения её движения.

Для получения уравнения движения в дифференциальной форме продифференцируем уравнение (1.6) по обобщенной координате φ , учитывая, что от неё зависит как угловая скорость, так и приведенный момент инерции машины. При этом имеем:

$$\frac{dT}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{J\omega^2}{2} \right) = 0,5 \frac{dJ}{d\varphi} \omega^2 + J\omega \frac{d\omega}{d\varphi}; \quad \frac{dT_0}{d\varphi} = 0;$$

$$\frac{d}{d\varphi} (A_o - A_c) = \frac{d}{d\varphi} \left(\int M_o d\varphi - \int M_c d\varphi \right) = M_o - M_c.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1.6) и учитывая соотношения (1.12), получим уравнение движения в дифференциальной форме:

$$J\dot{\omega} + 0,5 \frac{dJ}{d\varphi} \omega^2 = M_o - M_c, \quad (1.13)$$

где $\dot{\omega} = d\omega/dt$.

При постоянных значениях моментов сил или при моментах сил, зависящих от обобщенной координаты φ , это уравнение решается с помощью замены переменной.

Введем новую переменную z , связанную со старыми переменными соотношением:

$$z = J\omega^2.$$

Дифференцируя последнее выражение по обобщенной координате:

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{dJ}{d\varphi} \omega^2 + 2J\omega \frac{d\omega}{d\varphi}$$

и учитывая соотношение (1.12), запишем:

$$\frac{dz}{d\varphi} = 2 \left(J\dot{\omega} + 0,5 \frac{dJ}{d\varphi} \omega^2 \right).$$

Заметим, что выражение в скобках представляет собой левую часть уравнения (1.13). Отсюда следует:

$$\frac{dz}{d\varphi} = 2(M_o - M_c)$$

и

$$dz = 2(M_o - M_c) d\varphi.$$

Интегрируя последнее уравнение при начальных условиях $z(0) = J_0\omega_0^2$ и возвращаясь к прежним переменным, получим:

$$J\omega^2 = 2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} (M_o - M_c) d\varphi + J_0\omega_0^2,$$

откуда следует решение (1.10).

Уравнение движения в дифференциальной форме можно получить и из уравнения Лагранжа второго рода, которое в данном случае имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = M_o - M_c. \quad (1.14)$$

Подставляя в это уравнение выражение для кинетической энергии механизма (1.7) и учитывая, что

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = J\omega, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \frac{dJ}{d\varphi} \omega^2, \quad \frac{d}{dt} (J\omega) = \frac{dJ}{dt} \omega + J\dot{\omega} = \frac{dJ}{d\varphi} \omega^2 + J\dot{\omega},$$

получим уравнение (1.13).

Если в уравнениях (1.9), (1.13) момент движущих сил и момент сил сопротивления зависит не от положения механизма, а от каких-либо

других параметров, например от угловой скорости звена приведения или от времени, то эти уравнения не имеют аналитического решения и решаются численно по малым шагам движения.

1.2. Динамическая модель машины с упругими звеньями передаточного механизма и жесткими звеньями исполнительного механизма

Допустим, что машина состоит из приводного асинхронного электродвигателя (рис. 1.2а), передаточного механизма, включающего в себя ременную и зубчатую передачи, и исполнительного кривошипно-ползунного механизма. Поскольку податливость ременной передачи намного больше податливости остальных звеньев, то она разделит механизм на две части: до ременной передачи и после неё.

В этом случае динамическая модель машины может быть представлена в виде двухмассовой системы (рис. 1.2б), параметры которой приведены к валу двигателя или к валу кривошипа. Приведенный момент инерции первой массы этой модели J_1 учитывает моменты инерции ротора двигателя и ведущего шкива ременной передачи. Этот момент имеет постоянную величину: $J_1 = const$.

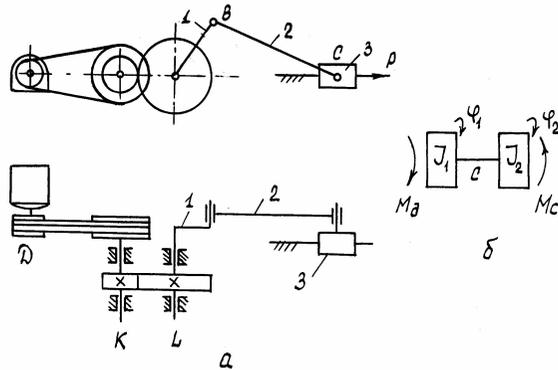


Рис. 1.2. Кинематическая схема машины (а) и её двухмассовая модель (б)

Приведенный момент инерции второй массы J_2 учитывает постоянные моменты инерции ведомого шкива, валов К и L, шестерни и колеса зубчатой передачи, а также приведенный момент инерции кривошипно-ползунного механизма, зависящий от обобщенной координаты: $J_2 = J_2(\varphi)$.

Массы связаны упругим элементом, приведенный коэффициент жесткости которого c учитывает в общем случае жесткость ременной передачи, валов D и K и шпоночных соединений шкивов с валами.

Если в качестве звена приведения выбран вал кривошипа L, то параметры модели определяются как

$$J_1 = (J_{\text{об}} + J_{u1})u_{DL}^2; \quad J_2 = (J_{u2} + J_{k1} + J_K)u_{KL}^2 + J_{k2} + J_1 + \tilde{J}_M, \quad (1.15)$$

$$c = 1/e, \quad e = (e_D + e_{c1} + e_p)u_{DL}^2 + (e_{c2} + e_K + e_{c3})u_{KL}^2 + e_{c4} + e_L, \quad (1.16)$$

$$M_\partial = M_\partial^* u_{DL}, \quad M_C = P u_{31}, \quad (1.17)$$

где $J_{\text{об}}$, J_{u1} , J_{u2} , J_{k1} , J_{k2} – соответственно моменты инерции ротора двигателя, ведущего и ведомого шкивов ременной передачи, ведущего и ведомого колес зубчатой передачи; J_K , J_1 – моменты инерции вала K и кривошипа 1 с валом L; \tilde{J}_M – переменная составляющая приведенного к валу кривошипа момента инерции кривошипно-ползунного механизма, определяемая по формуле (1.5); e – приведенный коэффициент податливости упругой связи; e_D , e_{c1} , e_p , e_{c2} , e_K , e_{c3} , e_{c4} , e_L – соответственно коэффициенты податливости вала D, шпоночного соединения ведущего шкива с валом, ременной передачи, шпоночного соединения ведомого шкива с валом, вала K и шпоночных соединений зубчатых колес с валами, вала L; u_{DL} , u_{KL} – соответственно передаточные отношения от вала D и вала K к валу L; M_∂^* – крутящий момент на валу двигателя.

Для составления уравнений движения модели примем в качестве обобщенных координат углы поворота масс и воспользуемся уравнением Лагранжа, учитывая обобщенную потенциальную энергию системы:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} = Q_i, \quad (1.18)$$

где Π – потенциальная энергия системы; Q_i – обобщенная сила; $i = 1, 2$.

Записывая для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{J_2 \dot{\varphi}_2^2}{2}, \quad \Pi = \frac{c(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} \quad (1.19)$$

и дифференцируя эти выражения с учетом, что $J_1 = const$, $c = const$,

$J_2 = J_2(\varphi)$, запишем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = \frac{d}{dt} (J_1 \dot{\varphi}_1) = J_1 \ddot{\varphi}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = c(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = \frac{d}{dt} (J_2 \dot{\varphi}_2) = \frac{dJ_2}{d\varphi_2} \dot{\varphi}_2^2 + J_2 \ddot{\varphi}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = \frac{1}{2} \frac{dJ_2}{d\varphi_2} \dot{\varphi}_2^2, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = -c(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Подставляя эти выражения в уравнения Лагранжа (1.18), получим:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) = M_o, \quad (1.20)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + 0,5 \frac{dJ_2}{d\varphi_2} \dot{\varphi}_2^2 - c(\varphi_1 - \varphi_2) = -M_c. \quad (1.21)$$

Если в качестве приводного двигателя используется достаточно мощный асинхронный электродвигатель, то можно принять $\dot{\varphi}_1 = \omega = const$, $\ddot{\varphi}_1 = 0$ и переписать уравнения движения в виде:

$$c(\varphi_1 - \varphi_2) = M_o, \quad (1.22)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + 0,5 \frac{dJ_2}{d\varphi_2} \dot{\varphi}_2^2 + c\varphi_2 = c\omega t - M_c. \quad (1.23)$$

При этом второе уравнение решается численными или приближенными методами независимо от первого, а первое служит для определения движущего момента.

1.3. Динамическая модель машины с упругими звеньями исполнительного шарнирно-рычажного механизма

Допустим, что в механизме, показанном на рис. 1.1а, вал кривошипа и шатун обладают податливостями намного большими податливостей остальных звеньев, и их необходимо учесть в динамической модели машины.

Податливость вала кривошипа определяется по известной формуле:

$$e_1 = L_l / GI_{p1}, \quad (1.24)$$

где L_l – длина деформируемой части вала кривошипа; G – модуль сдвига материала вала; I_{p1} – полярный момент инерции поперечного сечения вала.

Если инерционные силы шатуна малы по сравнению с внешними силами, действующими на звенья механизма, то реакции в шарнирах В и С будут направлены вдоль шатуна 2 и он будет подвергаться чистому растяжению или сжатию. При этом коэффициент податливости шатуна, имеющего форму стержня, определится как

$$e_2 = l_2 / EF_2, \quad (1.25)$$

где l_2 – длина шатуна; E – модуль упругости его материала; F_2 – площадь поперечного сечения шатуна.

Примем в качестве звена приведения кривошип. Тогда приведенный к кривошипу коэффициент податливости рычажного механизма определится как

$$e = e_1 + e_2 \lambda_{12}^2, \quad (1.26)$$

где λ_{12} – передаточная функция, равная отношению угловой скорости кривошипа 1 к скорости перемещения точки В в направлении деформации шатуна:

$$\lambda_{12} = \omega_1 / V_B^*. \quad (1.27)$$

Для определения передаточной функции λ_{12} необходимо вместо механизма, показанного на рис. 1.1а, рассмотреть заменяющий его механизм, допускающий перемещение точки В в направлении деформации шатуна. Таким механизмом является кулисный механизм (рис. 1.3а), полученный при жестком закреплении на стойке ползуна 3 и введением дополнительного звена 4. Скорость V_B^* определится из плана скоростей заменяющего механизма как скорость точки В₂, принадлежащей кулисе 2, относительно точки В₁, принадлежащей кривошипу ($V_{B_2B_1}$).

Построив план скоростей заменяющего механизма (рис. 1.3б), и учитывая, что угол b_1pb_2 на плане скоростей равен $\varphi + \psi$, а угол b_1b_2p – прямой, запишем:

$$V_{B_2B_1} / V_{B_1} = \sin(\varphi + \psi) \cdot$$

Поскольку $V_{B_1} = \omega_1 l_1$, где ω_1 , l_1 – угловая скорость и длина кривошипа, то

$$V_B^* = V_{B_2B_1} = \omega_1 l_1 \sin(\varphi + \psi)$$

и

$$\lambda_{12} = 1 / l_1 \sin(\varphi + \psi) \cdot \quad (1.28)$$

Подставляя это соотношение в выражение (1.26), найдем:

$$e = e_1 + \frac{e_2}{l_1^2 \sin^2(\varphi + \psi)}, \quad c = 1/e. \quad (1.29)$$

В формулах (1.28), (1.29) угол ψ является функцией обобщенной координаты φ . Вывод этой функции приводится в последующем разделе данного пособия.

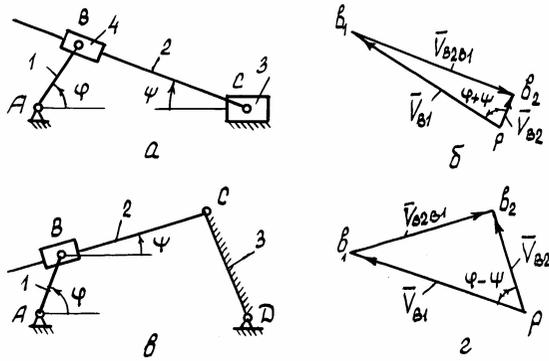


Рис. 1.3. Заменяющие механизмы (а, в) и их планы скоростей (б, г)

Таким образом, динамическую модель машины с упругими звеньями исполнительного механизма можно представить, как и в предыдущем случае, в виде двух масс, связанных упругим элементом с приведенным коэффициентом жесткости c (рис. 1.2б). При этом момент инерции первой массы J_1 величина постоянная, а момент инерции второй массы зависит от положения механизма (рис. 1.1а):

$$J_1 = (J_0 + J_{k1})u_{01}^2 + J_{k2} + J_1, \quad J_2 = \tilde{J}_M, \quad (1.30)$$

где \tilde{J}_M – переменная составляющая момента инерции исполнительного механизма, определяемая выражением (1.5).

В этой модели, в отличие от предыдущей, приведенный коэффициент жесткости является функцией обобщенной координаты и определяется соотношениями (1.29). В этом случае производные от потенциальной энергии в уравнении Лагранжа описываются выражениями:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = c(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = 0,5 \frac{dc}{d\varphi_2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 - c(\varphi_1 - \varphi_2),$$

а уравнения движения модели имеют вид:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) = M_0, \quad (1.31)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + 0,5 \frac{dJ_2}{d\varphi_2} \dot{\varphi}_2^2 + 0,5 \frac{dc}{d\varphi_2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 - c(\varphi_1 - \varphi_2) = -M_C. \quad (1.32)$$

Если в качестве исполнительного механизма используется кривошипно-коромысловый механизм, то заменяющий механизм и его план скоростей будут иметь вид, показанный на рис. 1.3 в, г. При этом передаточная функция λ_{12} описывается выражением:

$$\lambda_{12} = 1/l_1 \sin(\varphi - \psi), \quad (1.33)$$

а приведенный коэффициент податливости исполнительного механизма:

$$e = e_1 + e_2 \lambda_{12}^2 + e_3 u_{13}^2, \quad (1.34)$$

где $e_3 = L_3 / GI_{p3}$; L_3 – длина деформируемой части вала коромысла; I_{p3} – полярный момент инерции его поперечного сечения; u_{13} – передаточная функция от кривошипа 1 к коромыслу 3, равная отношению угловых скоростей этих звеньев.

При этом в уравнении движения машины (1.32) переменный момент инерции J_2 вместо формулы (1.5) будет описываться формулой:

$$J_2 = J_{23} u_{21}^2 + m_2 \chi_{21}^2 + J_3 u_{31}^2, \quad (1.35)$$

где J_3 – момент инерции коромысла относительно его оси вращения; u_{31} – передаточная функция от коромысла к кривошипу.

Наконец, если звенья и передаточного и исполнительного механизмов обладают податливостью, которой нельзя пренебречь, то динамическая модель машины может быть либо двухмассовой (рис. 1.2б), либо трехмассовой (рис. 1.4).

Например, если в схеме, представленной на рис. 1.2а, исполнительный механизм имеет упругие звенья, а моменты инерции валов К и Л с установленными на них деталями настолько малы по сравнению с моментами инерции двигателя и исполнительного механизма, что ими можно пренебречь, то модель машины будет двухмассовой. При этом приведенный момент инерции первой массы учитывает момент инерции ротора двигателя и шкива, установленного на валу двигателя. Приведенный момент инерции второй массы учитывает моменты инерции звеньев исполнительного механизма, а упругая связь имеет коэффициент податливости, равный сумме приведенных коэффициентов податли-

ности передаточного и исполнительного механизмов. Уравнения движения этой модели имеют вид (1.31), (1.32).

Если моментами инерции звеньев передаточного механизма пренебречь нельзя, то динамическая модель машины будет трехмассовой (рис. 1.4).

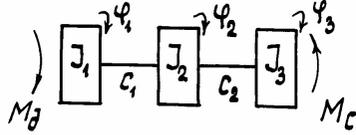


Рис. 1.4. Трехмассовая модель машины

При этом приведенный момент инерции первой массы учитывает моменты инерции ротора двигателя и ведущего шкива ременной передачи, момент инерции второй массы учитывает моменты инерции звеньев передаточного механизма, а момент инерции третьей массы – это приведенный момент инерции исполнительного механизма. Первая упругая связь с приведенным коэффициентом жесткости c_1 учитывает податливость передаточного механизма, а вторая – с коэффициентом жесткости c_2 – податливость исполнительного механизма:

$$J_1 = (J_{o6} + J_{u1})u_{DL}^2; \quad J_2 = (J_{u2} + J_{k1} + J_K)u_{KL}^2 + J_{k2} + J_1; \quad J_3 = \tilde{J}_M, \quad (1.36)$$

$$c_1 = 1/e_1, \quad e_1 = (e_D + e_{c1} + e_p)u_{DL}^2 + (e_{c2} + e_K + e_{c3})u_{KL}^2; \quad e_2 = e_M, \quad (1.37)$$

$$M_o = M_o^* u_{DL}, \quad M_c = P u_{31}, \quad (1.38)$$

где e_M – приведенный коэффициент податливости шарнирно-рычажного механизма, определяемый формулой (1.29).

В этой модели:

$J_1 = const$, $J_2 = const$, $J_3 = J_3(\varphi_3)$, $c_1 = const$, $c_2 = c_2(\varphi_3)$, кинетическая и потенциальная энергия определяются соотношениями:

$$T = \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{J_2 \dot{\varphi}_2^2}{2} + \frac{J_3 \dot{\varphi}_3^2}{2}, \quad \Pi = \frac{c_1 (\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} + \frac{c_2 (\varphi_2 - \varphi_3)^2}{2}. \quad (1.39)$$

Вычисляя производные от энергий:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = J_1 \ddot{\varphi}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = c_1 (\varphi_1 - \varphi_2);$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = J_2 \ddot{\varphi}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = -c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + c_2 (\varphi_2 - \varphi_3);$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} \right) = \frac{dJ_3}{d\varphi_3} \dot{\varphi}_3^2 + J_2 \ddot{\varphi}_3; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = 0,5 \frac{dJ_3}{d\varphi_3} \dot{\varphi}_3^2;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_3} = 0,5 \frac{dc_2}{d\varphi_3} (\varphi_2 - \varphi_3)^2 - c_2 (\varphi_2 - \varphi_3)$$

и подставляя эти выражения в соответствующие уравнения Лагранжа, получим систему уравнений движения:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = M_o, \quad (1.40)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) = 0, \quad (1.41)$$

$$J_3 \ddot{\varphi}_3 + 0,5 \frac{dJ_3}{d\varphi_3} \dot{\varphi}_3^2 + 0,5 \frac{dc_2}{d\varphi_3} (\varphi_2 - \varphi_3)^2 - c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) = -M_c. \quad (1.42)$$

Решение этих уравнений проводится численными или приближенными методами.

1.4. Учет в модели податливости соединений звеньев шарнирно-рычажного механизма

Если соединения звеньев рычажного механизма производятся с помощью подшипников качения, то податливость таких соединений может оказаться больше податливости самих звеньев и её следует учитывать в динамической модели механизма. Рассмотрим учет податливости соединений звеньев на примере кривошипно-ползунного механизма, показанного на рис. 1.1а. Как и в предыдущем случае будем считать, что инерционные силы шатуна пренебрежимо малы по сравнению с другими силами, действующими на звенья, и реакции в шарнирах В и С направлены вдоль шатуна.

Допустим, что в шарнирах В и С установлены шариковые подшипники качения, обладающие податливостью, соизмеримой с податливостью звеньев механизма. Тогда общая податливость шарнирно-рычажного механизма определится суммой податливостей его звеньев (1.26) и податливостей подшипников качения:

$$e = e_1 + (e_2 + e_B + e_C) \lambda_{12}^2, \quad (1.43)$$

где e_B, e_C – соответственно податливости подшипников качения в шарнирах В и С; λ_{12} – передаточная функция, определяемая по формуле (1.28).

Приведенный коэффициент жесткости шарикового подшипника качения в соответствии с данными работ [6, 7] определяется по формуле:

$$c_n = \frac{3,34(zk_B)^{2/3}}{\left(1 + \sqrt[3]{r_1/r_2}\right)} R_m^{1/3}, \quad (1.44)$$

полученной в предположении, что усилия в контакте тел качения с кольцами подшипника подчиняются закону Герца.

В этой формуле:

$$k_B = \frac{2E}{3(1-\mu^2)} \sqrt{r_1},$$

r_1, r_2 – соответственно радиусы поверхностей внутреннего и наружного колец подшипника, соприкасающихся с телами качения; z – число тел качения в подшипнике; E, μ – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала подшипника; R_m – максимальное значение реакции, действующей на подшипник.

Поскольку в начале расчета величина R_m неизвестна, приведенный коэффициент жесткости подшипника находится методом последовательных приближений. Вначале расчет проводится в предположении, что подшипник абсолютно жесткий и определяется максимальное значение реакции R_m . Затем по нему с использованием формулы (1.44) находится приведенный коэффициент жесткости подшипника. Далее определяется максимальное значение реакции с учетом жесткости подшипника и по нему уточняется коэффициент жесткости.

После определения коэффициента жесткости каждого подшипника находится коэффициент его податливости как величина, обратная коэффициенту жесткости. Затем по формуле (1.43) определяется коэффициент податливости всего механизма и коэффициент жесткости. Математическая модель механизма и всей машины при этом описывается теми же уравнениями, что и в предыдущем случае: (1.31), (1.32) или (1.40) – (1.42).

2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ МЕХАНИЗМОВ

2.1. Функции положения и кинематические передаточные функции механизма

В предыдущем разделе было введено понятие кинематической передаточной функции (1.2), под которой понимается отношение скорости какого-либо звена к скорости начального звена, которому приписывается обобщенная координата. Кинематические передаточные функции являются свойством самого механизма, определяются размерами его звеньев и не зависят ни от сил, действующих на звенья, ни от начальных условий движения. Как следует из предыдущего раздела, эти функции должны быть известны при составлении и анализе динамических моделей машин и механизмов. Для их нахождения могут быть использованы различные методы, которые рассмотрены ниже.

При определении кинематических передаточных функций аналитическим методом вначале необходимо составить функцию положения выходного звена.

Функцией положения звена называется функция, отражающая зависимость его линейного или углового перемещения от обобщенной координаты: $x(\varphi)$ или $\psi(\varphi)$.

Кинематическая передаточная функция первого порядка определяется как первая производная от функции положения по обобщенной координате:

$$u = \frac{dx}{d\varphi} \quad \text{или} \quad u = \frac{d\psi}{d\varphi},$$

а передаточная функция второго порядка – как вторая производная от функции положения по обобщенной координате:

$$u' = \frac{d^2x}{d\varphi^2} \quad \text{или} \quad u' = \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}.$$

Если начальное звено, которому приписывается обобщенная координата, совершает вращательное движение, то линейная или угловая скорость выходного звена связана с угловой скоростью начального звена следующими соотношениями:

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\varphi} \dot{\varphi}, \quad \dot{\psi} = \frac{d\psi}{d\varphi} \dot{\varphi}.$$

Линейное или угловое ускорение выходного звена связано со скоростью и ускорением начального звена соотношениями:

$$\ddot{x} = \dot{\varphi} \frac{dx}{d\varphi} + \dot{\varphi}^2 \frac{d^2x}{d\varphi^2} \quad \text{или} \quad \ddot{\psi} = \dot{\varphi} \frac{d\psi}{d\varphi} + \dot{\varphi}^2 \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}.$$

Таким образом, зная передаточные функции механизма, можно определить скорости и ускорения его звеньев при известной скорости и ускорении начального звена.

2.2. Передаточные функции синусного механизма

Синусный механизм состоит из неподвижной стойки 0 и трех подвижных звеньев: кривошипа 1, камня 2 и ползуна 3 (рис. 2.1а).

При вращении кривошипа 1 ползун 3 совершает возвратно-поступательное движение относительно стойки. Положение кривошипа определяется углом его поворота φ , положение ползуна – его перемещением x от правого крайнего положения.

Звено 2 совершает поступательное движение по окружности радиуса l_1 , равного длине кривошипа. Его положение можно определить либо радиус-вектором l_1 и углом поворота кривошипа φ , либо координатами x и y . При этом координата y определяет положение звена 2 относительно звена 3.

Принимая за обобщенную координату угол поворота кривошипа, запишем функцию положения звена 3 в виде:

$$x = l_1(1 - \cos\varphi). \quad (2.1)$$

Функция положения звена 2 относительно звена 3 имеет вид:

$$y = l_1 \sin\varphi. \quad (2.2)$$

Дифференцируя функцию (2.1) по обобщенной координате φ , найдем кинематические передаточные функции первого и второго порядка от звена 3 к звену 1:

$$u_{31} = \frac{dx}{d\varphi} = l_1 \sin\varphi, \quad (2.3)$$

$$u'_{31} = \frac{d^2x}{d\varphi^2} = l_1 \cos\varphi. \quad (2.4)$$

Дифференцируя функцию (2.2) по обобщенной координате, получим передаточные функции:

$$u_{21} = \frac{dy}{d\varphi} = l_1 \cos\varphi, \quad (2.5)$$

$$u'_{21} = \frac{d^2y}{d\varphi^2} = -l_1 \sin\varphi. \quad (2.6)$$

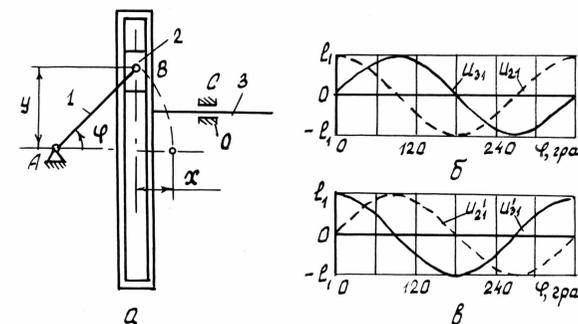


Рис. 2.1. Синусный механизм (а) и диаграммы его передаточных функций (б, в)

Выясним смысл передаточной функции u_{21} . Для этого умножим и разделим $dy/d\varphi$ на dt . Получим:

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{V_{23}}{\omega_1}.$$

Из последнего соотношения видно, что передаточная функция u_{21} представляет собой отношение скорости звена 2 относительно звена 3 к угловой скорости кривошипа. Эту передаточную функцию необходимо знать, например, при приведении сил трения между звеньями 2 и 3 к звену 1.

Графики функций (2.3) – (2.6) показаны на рис. 2.1 б, в.

Из этих графиков видно, что передаточные функции синусного механизма представляют собой гармонические функции, состоящие из одной гармоники.

2.3. Передаточные функции кривошипно-ползунного механизма

При выводе функций положения кривошипно-ползунного механизма примем за его начальное положение такое, при котором ползун находится в крайнем левом положении (рис. 2.2) и воспользуемся методом векторных контуров [2]. В соответствии с этим методом представим звенья механизма 1 и 2 в виде векторов длиной l_1 и l_2 (рис. 2.2б) и запишем сумму проекций этих векторов на оси x и y :

$$-l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \psi = l_2 - l_1 + x, \quad (2.7)$$

$$l_1 \sin \varphi - l_2 \sin \psi = 0. \quad (2.8)$$

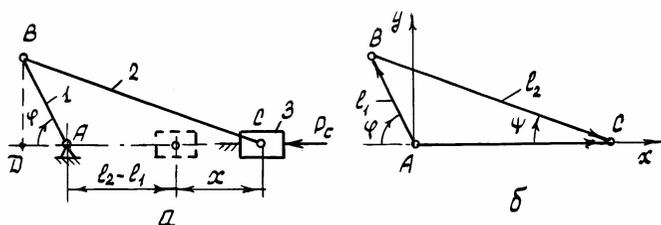


Рис. 2.2. К выводу передаточных функций кривошипно-ползунного механизма

Выражая из второго уравнения:

$$\sin \psi = \frac{l_1}{l_2} \sin \varphi, \quad \cos \psi = \pm \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2} \sin^2 \varphi} \quad (2.9)$$

и подставляя последнее соотношение в уравнение (2.7), запишем:

$$-l_1 \cos \varphi \pm l_2 \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2} \sin^2 \varphi} = l_2 - l_1 + x. \quad (2.10)$$

Двойной знак перед корнем показывает, что существуют две сборки механизма, когда ползун находится справа или слева от опоры кривошипа.

Правильный знак определяется из начальных условий. При $\varphi = 0$ должно выполняться условие $x = 0$. При подстановке этих значений в

уравнение (2.10) оно обращается в тождество, если знак перед корнем положительный.

С учетом этого функция положения ползуна рассматриваемого механизма запишется в виде:

$$x = l_1 - l_2 - l_1 \cos \varphi + l_1 \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} - \sin^2 \varphi}.$$

Вводя безразмерный параметр $\lambda = l_2/l_1$, окончательно получим:

$$x = l_1 (1 - \lambda - \cos \varphi + \sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi}). \quad (2.11)$$

Дифференцируя эту функцию по обобщенной координате, найдем передаточную функцию от ползуна к кривошипу первого порядка:

$$u_{31} = \frac{dx}{d\varphi} = l_1 \left(\sin \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi}} \right) \quad (2.12)$$

и второго порядка:

$$u'_{31} = l_1 \left[\cos \varphi - \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi}} - \frac{\sin^2 2\varphi}{4\sqrt{(\lambda^2 - \sin^2 \varphi)^3}} \right]. \quad (2.13)$$

Графики этих функций, построенные для различных значений λ , показаны на рис. 2.3а, б.

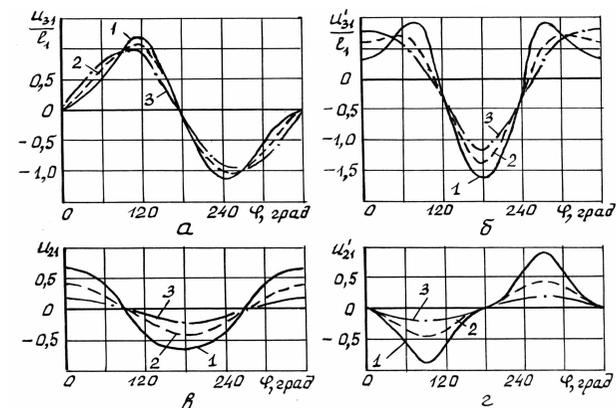


Рис. 2.3. Диаграммы кинематических передаточных функций первого (а, в) и второго (б, г) порядков для кривошипно-ползунного механизма: 1 - $\lambda = 1,5$; 2 - $\lambda = 3,0$; 3 - $\lambda = 5,0$

Функция положения для второго звена может быть найдена из соотношения (2.9) как

$$\psi = \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2} \sin^2 \varphi}.$$

Дифференцируя эту функцию по обобщенной координате, найдем передаточную функцию первого порядка от шатуна к кривошипу в его вращательном движении:

$$u_{21} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi}}. \quad (2.14)$$

Знак плюс перед корнем выбран потому, что при изменении угла φ от минус $\pi/2$ до плюс $\pi/2$ шатун вращается в ту же сторону, что и кривошип (по часовой стрелке), а при $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ – в обратную сторону.

Передаточная функция второго порядка для звена 2 имеет вид:

$$u'_{21} = \frac{(1 - \lambda^2) \sin \varphi}{\sqrt{(\lambda^2 - \sin^2 \varphi)^3}}. \quad (2.15)$$

Графики функций (2.14) – (2.15) показаны на рис. 2.3в, г.

При $\lambda > 3$ с достаточной для инженерных расчетов точностью можно пренебречь членом $\sin^2 \varphi$ в подкоренном выражении формул (2.12) – (2.15) и записать эти формулы в следующем виде:

$$u_{31} = l_1 \left(\sin \varphi - \frac{1}{2\lambda} \sin 2\varphi \right), \quad u_{21} = \frac{1}{\lambda} \cos \varphi, \quad (2.16)$$

$$u'_{31} = l_1 \left(\cos \varphi - \frac{1}{\lambda} \cos 2\varphi - \frac{1}{8\lambda^3} \cos 4\varphi \right), \quad u'_{21} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^3} \sin \varphi. \quad (2.17)$$

Из соотношений (2.16) следует, что передаточная функция u_{31} состоит из двух гармоник, причем частота второй гармоники в два раза больше, а амплитуда в 2λ раз меньше соответствующих параметров первой гармоники.

Передаточная функция u_{21} содержит только одну гармонику с основной частотой ω и амплитудой, обратно пропорциональной коэффициенту λ .

Передаточная функция второго порядка u'_{31} содержит три гармоники с частотами ω , 2ω , 4ω , кратными основной частоте, причем при $\lambda > 3$ третьей гармоникой можно пренебречь, поскольку её амплитуда составляет менее 0,5% от амплитуды первой гармоники. Передаточная

функция u'_{21} содержит только одну – основную – гармонику, амплитуда которой обратно пропорциональна коэффициенту λ .

2.4. Передаточные функции кулисного механизма

Рассмотрим кулисный механизм, схема которого показана на рис. 2.4а. В начальном положении механизма кривошип 1 и коромысло 3 расположены вертикально. Напомним, что в точке В совмещены три точки, принадлежащие различным звеньям: точка В₁ кривошипа, точка В₂, принадлежащая звену 2, и точка В₃, лежащая на кулисе.

Положение кулисы определяется углом её поворота ψ . Принимая за обобщенную координату механизма угол поворота кривошипа φ , для передаточной функции первого порядка от коромысла к кривошипу имеем:

$$u_{31} = \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\omega_3}{\omega_1}, \quad (2.18)$$

где ω_3 – угловая скорость кулисы.

Положение звена 2 относительно звена 3 определяется координатой y . При этом:

$$y = l_0 + l_1 - l_{BC}, \quad (2.19)$$

где l_1 – длина кривошипа; l_0 – расстояние между опорами кривошипа и коромысла; l_{BC} – длина отрезка ВС.

Обозначая производную функции (2.19) по обобщенной координате через u_{21} , запишем:

$$u_{21} = \frac{dy}{d\varphi} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi} = \frac{V_{B_3B_2}}{\omega_1}. \quad (2.20)$$

Из последнего соотношения видно, что передаточная функция u_{21} представляет собой отношение скорости точки В₃, принадлежащей кулисе, относительно скорости точки В₂, принадлежащей звену 2 ($V_{B_3B_2}$), к угловой скорости кривошипа ω_1 .

Для определения кинематических передаточных функций кулисного механизма удобно воспользоваться его планом скоростей (рис. 2.4б).

Выражая угловые скорости кривошипа и кулисы через линейные скорости точек В₁ и В₃, можно записать:

$$u_{31} = \frac{V_{B_3} l_1}{V_{B_1} l_{BC}}, \quad (2.21)$$

где V_{B_1} , V_{B_3} – соответственно линейные скорости точек В₁ и В₃,

$$u_{21} = \frac{V_{B3B2} l_1}{V_{B1}}. \quad (2.22)$$

Отношения линейных скоростей, входящие в формулы (2.21), (2.22), легко определяются из плана скоростей.

Для этого на схеме механизма (рис. 2.4а) опустим из точки В перпендикуляр на линию, проходящую через центры вращения кривошипа и кулисы, получим точку D. Из точки А опустим перпендикуляр на линию ВС, получим точку К.

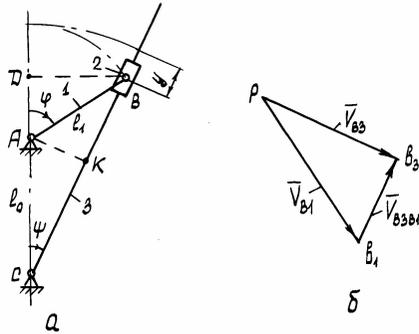


Рис. 2.4. Кулисный механизм (а) и его план скоростей (б)

Так как вектор скорости V_{B1} перпендикулярен кривошипу (линии АВ), а вектор скорости V_{B3} перпендикулярен кулисе (линии ВС), то угол АВК на схеме механизма равен углу b_1pb_3 на плане скоростей, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Следовательно, треугольники АВК и b_1pb_3 подобны как треугольники с одинаковыми углами. Из подобия этих треугольников следует:

$$\frac{V_{B3}}{V_{B1}} = \frac{l_{BK}}{l_1} = \frac{l_{BC} - l_{CK}}{l_1}, \quad (2.23)$$

где l_{BK} , l_{CK} – соответственно длины отрезков ВК и СК (рис. 2.4а).

Длину отрезка ВС определим из треугольника ВСД как

$$l_{BC} = \sqrt{l_{BD}^2 + l_{CD}^2}.$$

Так как

$$l_{BD} = l_1 \sin \varphi, \quad l_{CD} = l_0 + l_1 \cos \varphi, \quad (2.24)$$

то можно записать:

$$l_{BC} = \sqrt{l_1^2 + l_0^2 + 2l_1l_0 \cos \varphi}. \quad (2.25)$$

Треугольники ВСД и АСК на рис. 2.4а так же подобны, как треугольники с одинаковыми углами. Из этого подобия следует:

$$l_{CK} = \frac{l_{CD}l_0}{l_{BC}}. \quad (2.26)$$

Подставляя соотношения (2.23) – (2.26) в формулу (2.21), получим:

$$u_{31} = \frac{l_1^2 + l_1l_0 \cos \varphi}{l_0^2 + l_1^2 + 2l_0l_1 \cos \varphi}.$$

Как уже отмечалось, передаточную функцию удобно представлять в безразмерных параметрах. Разделив числитель и знаменатель последнего выражения на l_1^2 и вводя безразмерный параметр $\lambda = l_0/l_1$, окончательно получим:

$$u_{31} = \frac{1 + \lambda \cos \varphi}{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \varphi}. \quad (2.27)$$

Дифференцируя эту функцию по обобщенной координате, найдем передаточную функцию второго порядка:

$$u'_{31} = \frac{\lambda(1 - \lambda^2) \sin \varphi}{(1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \varphi)^2}. \quad (2.28)$$

Для нахождения передаточной функции u_{21} запишем из подобия треугольников АВК и b_1pb_3 :

$$\frac{V_{B3B2}}{V_{B1}} = \frac{l_{AK}}{l_1}, \quad (2.29)$$

где l_{AK} – длина отрезка АК.

Из подобия треугольников АСК и ВСД найдем:

$$l_{AK} = \frac{l_0 l_{BD}}{l_{BC}} = \frac{l_0 l_1 \sin \varphi}{\sqrt{l_1^2 + l_0^2 + 2l_1l_0 \cos \varphi}}. \quad (2.30)$$

Подставляя выражения (2.29), (2.30) в формулу (2.22) и переходя к безразмерным параметрам, получим:

$$u_{21} = \frac{l_1 \lambda \sin \varphi}{\sqrt{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \varphi}}, \quad (2.31)$$

$$u'_{21} = \frac{\lambda l_1}{\sqrt{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \varphi}} \left(\cos \varphi + \frac{\lambda \sin^2 \varphi}{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \varphi} \right). \quad (2.32)$$

В качестве примера на рис. 2.5 приведены графики передаточных функций кулисного механизма, построенные при различных значениях параметра λ , равных 0,5, 1 и 2.

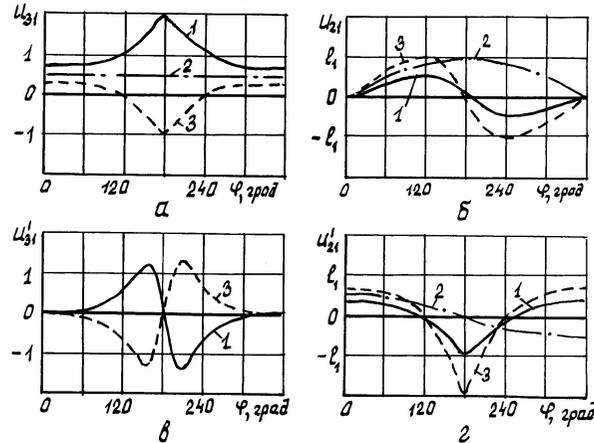


Рис. 2.5. Графики передаточных функций кулисного механизма:
1 – $\lambda = 0,5$; 2 – $\lambda = 1,0$; 3 – $\lambda = 2,0$

Из этих графиков видно, что при $\lambda \leq 1$ механизм является двух-кривошипным (рис. 2.5а, кривая 1). При этом кулиса вращается в ту же сторону, что и кривошип, причем если $\lambda < 1$, то передаточная функция u_{31} изменяется от $1/(1+\lambda)$ до $1/(1-\lambda)$. Если $\lambda = 1$, то $u_{31} = 0,5$, т.е. кулиса вращается в ту же сторону, что и кривошип, но со скоростью в два раза меньшей скорости кривошипа (рис. 2.5а, кривая 2).

При выполнении условия $\lambda > 1$ передаточная функция u_{31} изменяется по знаку в зависимости от угла поворота кривошипа (рис. 2.5а, кривая 3) и кулиса совершает качательные движения на некоторый угол γ , определяемый из соотношения:

$$\gamma = 2\psi_{\max} = 2\arcsin(1/\lambda).$$

Можно отметить, что передаточные функции кулисного механизма на первый взгляд являются более сложными по сравнению с передаточными функциями кривошипно-ползунного механизма. Но поскольку эти функции периодические, они могут быть разложены в ряд Фурье по частотам, кратным основной частоте. То есть передаточные функции кулисного, как и любого другого механизма, могут быть представлены в виде суммы гармоник с кратными частотами.

Для вывода передаточных функций мы воспользовались планом скоростей. Но их можно было получить и другим путем, записав вначале функцию положения требуемого звена.

Функция положения коромысла определится из рис. 2.4а как:

$$\psi = \arctg \left[\frac{l_{BD}}{l_{CD}} \right] = \arctg \left[\frac{\sin \varphi}{\lambda + \cos \varphi} \right]. \quad (2.33)$$

Дифференцируя эту функцию по обобщенной координате φ , получим выражения (2.27), (2.28).

Функция положения звена 2 относительно звена 3 запишется с учетом соотношения (2.19) как:

$$y = l_1 \left(1 + \lambda - \sqrt{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \varphi} \right). \quad (2.34)$$

Дифференцирование этой функции по обобщенной координате приводит к выражениям (2.31), (2.32).

2.5. Передаточные функции кривошипно-коромыслового механизма

Рассмотрим кривошипно-коромысловый механизм (рис. 2.6а), в котором длина кривошипа равна l_1 , шатуна – l_2 и коромысла – l_3 . Расстояние между опорами кривошипа и коромысла AD равно l_0 . В качестве обобщенной координаты примем угол поворота кривошипа φ . В начальном положении механизма кривошип расположен горизонтально справа от его опоры.

Для вывода функции положения коромысла воспользуемся методом диагоналей или, как его еще называют, методом Зиновьева. Для этого проведем в четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD , соединяющую внешние кинематические пары группы Ассур BCD (рис. 2.6б). Обозна-

чим углы, образуемые этой диагональю с коромыслом и основанием, соответственно через ψ_1 и ψ_2 .

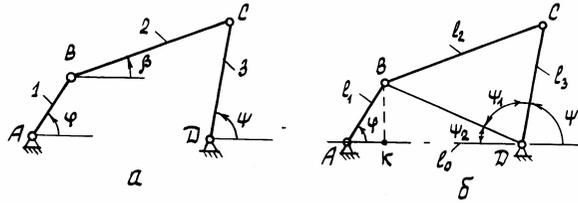


Рис. 2.6. Кривошипно-коромысловый механизм (а) и его расчетная схема (б)

Угол ψ , определяющий положение коромысла, тогда будет равен:

$$\psi = \pi - \psi_1 - \psi_2. \quad (2.35)$$

Для определения угла ψ_2 опустим из точки B перпендикуляр на линию AD , проходящую через опоры кривошипа и коромысла. Точку пересечения этих линий обозначим буквой K .

Отрезок BK определится как

$$BK = l_1 \sin \varphi, \quad (2.36)$$

а отрезок KD :

$$KD = l_0 - l_1 \cos \varphi. \quad (2.37)$$

Поскольку $\operatorname{tg} \psi_2 = BK/KD$, то с учетом выражений (2.36), (2.37) можно записать:

$$\psi_2 = \operatorname{arctg} \left[\frac{l_1 \sin \varphi}{l_0 - l_1 \cos \varphi} \right].$$

Вводя безразмерные параметры $\lambda_0 = l_0/l_1$, $\lambda_1 = l_1/l_1 = 1$, $\lambda_2 = l_2/l_1$, $\lambda_3 = l_3/l_1$, перепишем последнюю функцию в безразмерных параметрах:

$$\psi_2 = \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \varphi}{\lambda_0 - \cos \varphi} \right]. \quad (2.38)$$

Для определения угла ψ_1 вначале найдем длину b диагонали BD . Из треугольника BKD следует:

$$b = \sqrt{BK^2 + KD^2} = \sqrt{l_1^2 + l_0^2 - 2l_1 l_0 \cos \varphi}. \quad (2.39)$$

Из теоремы косинусов для треугольника BCD можно записать:

$$\cos \psi_1 = \frac{l_3^2 - l_2^2 + b^2}{2l_3 b}.$$

Из этого равенства, переходя к безразмерным параметрам и учитывая соотношение (2.39), найдем:

$$\psi_1 = \arccos \left[\frac{\lambda_3^2 - \lambda_2^2 + \lambda_0^2 + 1 - 2\lambda_0 \cos \varphi}{2\lambda_3 \sqrt{1 + \lambda_0^2 - 2\lambda_0 \cos \varphi}} \right]. \quad (2.40)$$

Подставляя выражения (2.38), (2.40) в соотношение (2.35), получим функцию положения коромысла:

$$\psi = \pi - \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \varphi}{\lambda_0 - \cos \varphi} \right] - \arccos \left[\frac{\lambda_3^2 - \lambda_2^2 + \lambda_0^2 + 1 - 2\lambda_0 \cos \varphi}{2\lambda_3 \sqrt{1 + \lambda_0^2 - 2\lambda_0 \cos \varphi}} \right]. \quad (2.41)$$

Дифференцируя эту функцию по обобщенной координате, найдем кинематическую передаточную функцию первого порядка от коромысла к кривошипу:

$$u_{31} = \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{1 - \lambda_0 \cos \varphi}{d(\lambda_0 - \cos \varphi)} - \frac{\lambda_0 (d^2 - \lambda_3^2 + \lambda_2^2)}{d^2 \sqrt{4\lambda_3^2 d^2 - (\lambda_3^2 - \lambda_2^2 + d^2)^2}}, \quad (2.42)$$

где $d = b/l_1 = \sqrt{1 + \lambda_0^2 - 2\lambda_0 \cos \varphi}$.

Дифференцируя повторно последнее выражение по обобщенной координате, можно найти кинематическую передаточную функцию второго порядка. Вследствие громоздкости здесь она не приводится.

Для определения передаточной функции от шатуна к кривошипу:

$$u_{21} = d\beta/d\varphi$$

запишем из треугольника BCD :

$$l_3^2 = l_2^2 + b^2 - 2l_2 b \cos(\beta + \psi_2),$$

откуда найдем:

$$\beta = \arccos \left[\frac{l_2^2 - l_3^2 + b^2}{2l_2 b} \right] - \psi_2.$$

Переходя к безразмерным параметрам и подставляя в это выражение функцию (2.38), получим функцию положения для звена 2:

$$\beta = \arccos \left[\frac{\lambda_2^2 - \lambda_3^2 + \lambda_0^2 + 1 - 2\lambda_0 \cos \varphi}{2\lambda_2 \sqrt{1 + \lambda_0^2 - 2\lambda_0 \cos \varphi}} \right] - \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \varphi}{\lambda_0 - \cos \varphi} \right]. \quad (2.43)$$

Дифференцируя эту функцию по обобщенной координате, найдем передаточную функцию первого порядка для второго звена:

$$u_{21} = \frac{1 - \lambda_0 \cos \varphi}{d(\lambda_0 - \cos \varphi)} + \frac{\lambda_0(d^2 + \lambda_3^2 - \lambda_2^2)}{d^2 \sqrt{4\lambda_2^2 d^2 - (\lambda_2^2 - \lambda_3^2 + d^2)^2}}. \quad (2.44)$$

Полученные функции (2.42) и (2.44) имеют сложный вид и кроме обобщенной координаты зависят от трех безразмерных параметров λ_0 , λ_2 , λ_3 . Поэтому при анализе этих функций ограничимся некоторыми частными случаями, когда указанные безразмерные параметры связаны между собой определенными соотношениями.

К таким случаям можно отнести кривошипно-коромысловые механизмы с особыми положениями звеньев. Под особыми положениями будем понимать такие, когда все четыре шарнира механизма располагаются на одной линии. Для возникновения особых положений длины звеньев механизма должны удовлетворять одному из следующих условий:

$$l_0 - l_1 = l_2 - l_3, \quad l_0 - l_1 = l_3 - l_2, \quad l_0 + l_1 = l_2 + l_3.$$

Эти соотношения можно записать через безразмерные параметры в виде:

$$\lambda_0 - 1 = \lambda_2 - \lambda_3, \quad (2.45)$$

$$\lambda_0 - 1 = \lambda_3 - \lambda_2, \quad (2.46)$$

$$\lambda_0 + 1 = \lambda_2 + \lambda_3. \quad (2.47)$$

Этим условиям соответствуют и три различные схемы механизма. В первой из них (рис. 2.7а), удовлетворяющей условию (2.45), из всех звеньев наибольшую длину имеет шатун.

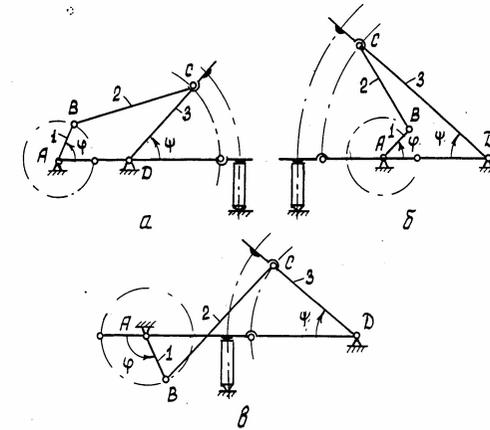


Рис. 2.7. Схемы кривошипно-коромысловых механизмов с особыми положениями звеньев: а – с наибольшим шатуном; б – с наибольшим коромыслом; в – с наибольшим основанием

Во второй схеме (рис. 2.7б), удовлетворяющей условию (2.46), наибольшей длиной обладает коромысло, а в третьей схеме (условие (2.47), рис. 2.7в) – стойка.

Особое положение механизма характерно тем, что при вращении кривошипа в определенном направлении коромысло может двигаться из этого положения как в сторону вращения кривошипа, так и в обратную сторону.

Например, в механизме, показанном на рис. 2.8а, при вращении кривошипа против часовой стрелки коромысло перемещается из начального горизонтального положения тоже против часовой стрелки. После достижения своего крайнего левого положения, коромысло изменяет направление движения и начинает вращаться по часовой стрелке (рис. 2.8б), пока не достигнет особого положения, в котором все шарниры механизма располагаются на одной прямой (рис. 2.8в).

Если при прохождении через особое положение коромысло не испытывает сопротивления движению, то по инерции оно продолжает двигаться в том же направлении, что и ранее (рис. 2.8г, сплошные линии), достигая второго крайнего положения. Затем коромысло движется в обратную сторону, проходит через особое положение и цикл движения механизма повторяется.

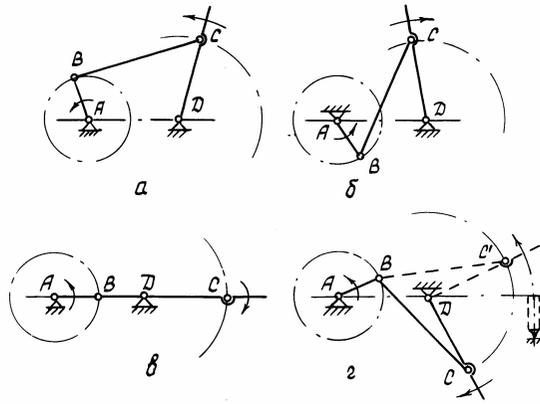


Рис. 2.8. Планы положений механизма

При наличии ограничителя хода коромысла в особом положении, например, инструмента отбойного молотка, коромысло, ударя по ограничителю, отскакивает от него, изменяя направление движения (рис. 2.8г, штриховые линии). Затем цикл движения механизма повторяется.

Таким образом, в первом случае цикл движения механизма соответствует повороту кривошипа на два оборота, а во втором случае – на один оборот.

Принимая за начало отсчета углов φ и ψ особое положение звеньев, когда все шарниры лежат на одной прямой (рис. 2.7) и используя описанную выше методику, получим функции положения звена 3 в виде:

для схемы 1 (рис. 2.7а):

$$\psi = p - \arctg(A_1) - \arccos(B_1); \quad (2.48)$$

для схемы 2 (рис. 2.7б):

$$\psi = \arctg(A_1) - \arccos(B_1); \quad (2.49)$$

для схемы 3 (рис. 2.7в):

$$\psi = -\arctg(A_2) + \arccos(B_2), \quad (2.50)$$

где
$$A_1 = \frac{\sin \varphi}{\lambda_0 - \cos \varphi}, \quad B_1 = \frac{\lambda_3^2 - \lambda_2^2 + d_1}{2\lambda_2 \sqrt{d_1}}, \quad d_1 = 1 + \lambda_0^2 - 2\lambda_0 \cos \varphi,$$

$$A_2 = \frac{\sin \varphi}{\lambda_0 + \cos \varphi}, \quad B_2 = \frac{\lambda_3^2 - \lambda_2^2 + d_2}{2\lambda_3 \sqrt{d_2}}, \quad d_2 = 1 + \lambda_0^2 + 2\lambda_0 \cos \varphi.$$

В принципе можно выбрать начала отсчета углов φ и ψ таким образом, что функции положения для всех трех схем будут описываться одним выражением. Однако в этом случае в каких-то схемах начальные углы поворота кривошипа и коромысла будут не равны нулю, что неудобно для проведения динамического анализа механизма.

Дифференцируя функцию положения (2.48) по обобщенной координате и учитывая соотношение (2.45), приходим к выражению:

$$u_{31} = \frac{1}{d_1} \left[1 - \lambda_0 \cos \varphi + \frac{[\lambda_0(1 - \cos \varphi) + \lambda_2(\lambda_0 - 1)] \sin \varphi}{\sqrt{(1 - \cos \varphi)[2\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0(1 - \cos \varphi)] / \lambda_0}} \right]. \quad (2.51)$$

Дифференцируя функцию (2.49) и используя соотношение (2.46), приходим к тому же выражению (2.51).

При подстановке в формулу (2.51) значений угла поворота кривошипа, равных 0 или 2π , в третьем слагаемом возникает неопределенность типа 0/0. Однако эта неопределенность легко устраняется заменой

$$1 - \cos \varphi = 2 \sin^2(\varphi/2), \quad \sin \varphi = 2 \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2).$$

После проведения такой замены и сокращения числителя и знаменателя дроби в скобках на $\sin(\varphi/2)$, получаем:

$$u_{31} = \frac{1}{d_1} \left[1 - \lambda_0 + 2\lambda_0 \sin^2(\varphi/2) + \frac{[2\lambda_0 \sin^2(\varphi/2) + \lambda_2(\lambda_0 - 1)] \cos(\varphi/2)}{\sqrt{(\lambda_2 \lambda_3 / \lambda_0) - \sin^2(\varphi/2)}} \right]. \quad (2.52)$$

Формула (2.52) уже не содержит неопределенности при углах поворота кривошипа 0 и 2π .

Проводя процедуры, аналогичные изложенным выше, для третьей схемы механизма, соответствующей условию (2.50), получим передаточную функцию в виде:

$$u_{31} = -\frac{1}{d_2} \left[1 + \lambda_0 - 2\lambda_0 \sin^2(\varphi/2) + \frac{[2\lambda_0 \sin^2(\varphi/2) - \lambda_2(\lambda_0 + 1)] \cos(\varphi/2)}{\sqrt{(\lambda_2 \lambda_3 / \lambda_0) - \sin^2(\varphi/2)}} \right]. \quad (2.53)$$

При пользовании формулами (2.52), (2.53) следует иметь в виду, что при непрерывном изменении аргумента φ от нуля до $4\pi n$, (где $n = 1, 2, 3, \dots$) эти формулы описывают передаточную функцию механизма, в котором коромысло не имеет ограничителя хода в особом положении. При этом один цикл движения механизма соответствует углу поворота кривошипа, равному 4π . При наличии ограничителя хода коромысла цикл движения соответствует углу поворота кривошипа, равному 2π и при переходе от одного цикла к другому передаточная функция имеет разрыв первого рода. Это обстоятельство можно учесть, приняв, что в каждом цикле движения аргумент φ в передаточной функции изменяется от 0 до 2π .

В качестве примера на рис. 2.9 приведены графики изменения передаточных функций u_{31} для механизма с наибольшим шатуном (кривая 1), наибольшим коромыслом (кривая 2) и наибольшим основанием (кривая 3) при отсутствии ограничителя хода коромысла (а) и при наличии ограничителя (б).

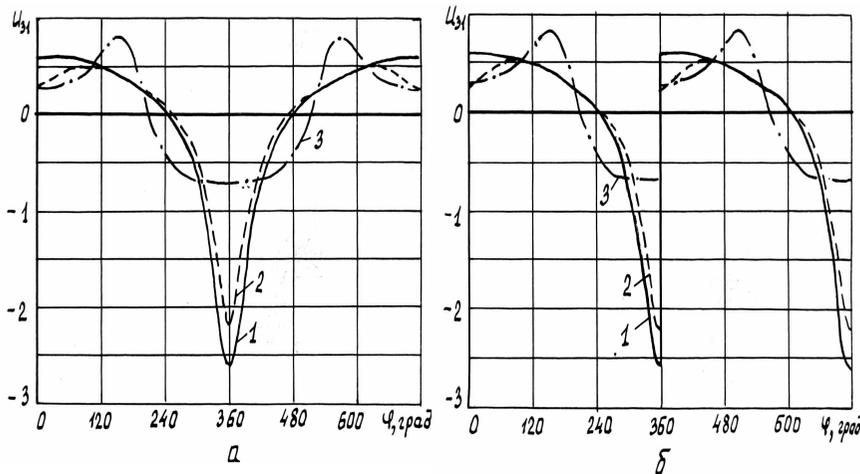


Рис. 2.9. Графики передаточных функций первого порядка кривошипно-коромысловых механизмов при отсутствии (а) и наличии (б) ограничителя хода коромысла:

1 - $\lambda_2 = 4; \lambda_3 = 3; \lambda_0 = 2$. 2 - $\lambda_2 = 3; \lambda_3 = 4; \lambda_0 = 2$. 3 - $\lambda_2 = 3; \lambda_3 = 2; \lambda_0 = 4$

На рис. 2.9б видно, что удар коромыслом по ограничителю происходит в момент времени, когда его скорость, а следовательно, и кинетическая энергия максимальны. Это обстоятельство, а также возможность отскока коромысла после удара без нарушения кинематических

связей звеньев и послужили основанием для создания на основе таких схем кривошипно-коромысловых ударных механизмов.

На рис. 2.9б также видно, что в схемах с наибольшим шатуном и наибольшим коромыслом угловая скорость коромысла в момент удара может в несколько раз превосходить угловую скорость кривошипа. Это позволяет создавать достаточно мощные ударные механизмы при небольших скоростях вращения кривошипа. Но следует отметить, что при выборе схем и параметров кривошипно-коромысловых ударных механизмов необходимо удовлетворить ряду геометрических и прочностных требований, которые изложены в специальной литературе.

Для определения передаточных функций второго порядка u'_{31} продифференцируем выражения (2.52), (2.53) по обобщенной координате. В результате получим:

для схем 1 и 2 (рис. 2.7а, б):

$$u'_{31} = -\frac{\sin(\varphi/2)}{4(a_1 - y^2)^2} \left[by + \frac{[g + 2(c_1 - a_1)]y^4 + g(c_1 - 3a_1)y^2 + a_1c_1g}{\sqrt{(g + y^2)^3}} \right], \quad (2.54)$$

для схемы 3 (рис. 2.7в):

$$u'_{31} = -\frac{\sin(\varphi/2)}{4(a_2 + y^2)^2} \left[by + \frac{[g - 2(c_2 - a_2)]y^4 - g(c_2 - 3a_2)y^2 + a_2c_2g}{\sqrt{(g + y^2)^3}} \right], \quad (2.55)$$

где

$$y = \cos(\varphi/2), \quad b = \frac{1 - \lambda_0^2}{2\lambda_0}, \quad g = \frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_0} - 1, \quad a_1 = \frac{(\lambda_0 + 1)^2}{4\lambda_0}, \quad a_2 = \frac{(\lambda_0 - 1)^2}{4\lambda_0},$$

$$c_1 = \frac{\lambda_2(\lambda_0 - 1)}{2\lambda_0} + 1, \quad c_2 = \frac{\lambda_2(\lambda_0 + 1)}{2\lambda_0} - 1.$$

На рис. 2.10 приведены графики функций (2.54), (2.55), полученные при тех же значениях соотношений звеньев, что и графики на рис. 2.9.

Передаточные функции второго порядка связаны с ускорениями звеньев. Поэтому из полученных графиков можно сделать вывод, что ускорения, а следовательно, и силы инерции в механизмах, построенных по первым двум схемам, будут наибольшими вблизи особых положений звеньев. На остальных участках движения они малы.

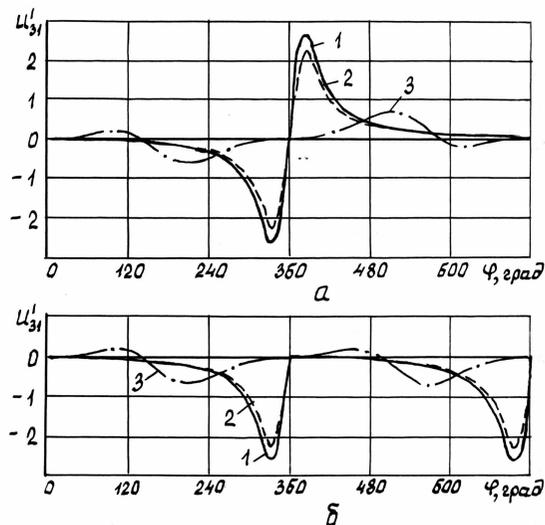


Рис. 2.10. Графики передаточных функций второго порядка кривошипно-коромысловых механизмов при отсутствии (а) и наличии (б) ограничителя хода коромысла:

1 - $\lambda_2 = 4; \lambda_3 = 3; \lambda_0 = 2$. 2 - $\lambda_2 = 3; \lambda_3 = 4; \lambda_0 = 2$. 3 - $\lambda_2 = 3; \lambda_3 = 2; \lambda_0 = 4$

В механизмах, построенных по третьей схеме, т.е. в механизмах с наибольшей длиной основания, максимальные значения ускорений и сил инерции достигаются тогда, когда кривошип находится в положении, близком к его среднему положению в цикле движения.

В механизмах с наибольшей длиной основания максимальные ускорения и силы инерции всегда меньше, чем в механизмах с наибольшим шатуном или наибольшим коромыслом при одинаковой скорости вращения кривошипа.

3. УЧЕТ СИЛ ТРЕНИЯ В МОДЕЛЯХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

3.1. Синусный механизм

В синусном механизме силы трения скольжения между звеньями 2 и 3 (рис. 2.1а) и между звеном 3 и стойкой могут быть весьма существенны и должны учитываться в динамической модели механизма. Допустим, что *трение сухое*. Тогда силы трения могут быть найдены методом последовательных приближений.

В соответствии с этим методом вначале определяются нормальные реакции, действующие на звенья, без учета сил трения. По этим реакциям находятся силы трения и вновь определяются нормальные реакции, но уже с учетом сил трения. Затем по полученным значениям реакций уточняются силы трения и т.д., пока отличие в результатах двух последовательных приближений не станет пренебрежимо малым. Рассмотрим учет сил сухого трения в модели синусного механизма.

Для упрощения предположим, что на выходное звено механизма 3 (рис. 2.1а) действует постоянная по величине сила сопротивления P_c . Выделим это звено из механизма (рис. 3.1а), заменив отброшенные звенья 2 и 0 соответствующими реакциями $(R_{23})_0$ и $(R_{03})_0$. Индекс «0» после скобки показывает, что это нулевое приближение.

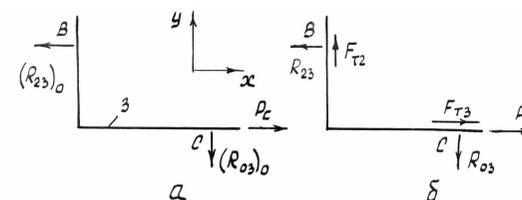


Рис. 3.1. К определению сил трения между звеньями механизма

В нулевом приближении допустим, что силы трения отсутствуют. Тогда реакции $(R_{23})_0$ и $(R_{03})_0$ будут направлены по нормальным к звену 3. Составляя уравнения проекций сил на оси x и y , найдем:

$$(R_{23})_0 = P_c, \quad (R_{03})_0 = 0.$$

Зная нормальную реакцию, найдем в первом приближении силу трения между звеньями 2 и 3 (рис. 3.16):

$$(F_{T2})_1 = f(R_{23})_0 = P_c f,$$

где f – коэффициент трения.

При этом из суммы проекций сил на ось y следует, что нормальная реакция R_{03} в первом приближении равна:

$$(R_{03})_1 = (F_{T2})_1 = P_c f,$$

а сила трения между звеном 3 и стойкой:

$$(F_{T3})_1 = f(R_{03})_1 = P_c f^2.$$

Из уравнения проекций сил на ось x определим реакцию R_{23} в первом приближении:

$$(R_{23})_1 = P_c + (F_{T3})_1 = P_c(1+f^2).$$

Аналогично определяем силы трения и реакции во втором приближении:

$$(F_{T2})_2 = f(R_{23})_1 = P_c f(1+f^2),$$

$$(R_{03})_2 = (F_{T2})_2, \quad (F_{T3})_2 = f(R_{03})_2 = P_c f^2(1+f^2),$$

$$(R_{23})_2 = P_c + (F_{T3})_2 = P_c(1+f^2+f^4)$$

и в n -ом приближении:

$$(R_{03})_n = (F_{T2})_n = P_c f \sum_{i=1}^n f^{2(i-1)},$$

$$(F_{T3})_n = P_c f^2 \sum_{i=1}^n f^{2(i-1)},$$

$$(R_{23})_n = P_c \sum_{i=0}^n f^{2i}.$$

Учитывая, что коэффициент трения скольжения стали по стали при сухом трении обычно не превышает 0,2, в последних формулах под знаком суммы можно пренебречь членами, содержащими коэффициент f в степени равной четырем и более, поскольку $0,2^4 = 0,0016$ и составляет доли процентов от первого члена суммы.

Тогда окончательно для сил трения и приведенных к кривошипу моментов сил трения с учетом передаточных функций (2.3), (2.5) имеем:

$$0 < \varphi < \pi/2, \quad 3\pi/2 < \varphi < 2\pi$$

$$F_{T2} = P_c f(1+f^2), \quad M_{T2} = F_{T2}u_{21} = P_c l_1 f(1+f^2) \cos \varphi, \quad (3.1)$$

$$\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$$

$$F_{T2} = -P_c f(1+f^2), \quad M_{T2} = -P_c l_1 f(1+f^2) \cos \varphi, \quad (3.2)$$

$$0 < \varphi < \pi$$

$$F_{T3} = P_c f^2, \quad M_{T3} = F_{T3}u_{31} = P_c l_1 f^2 \sin \varphi, \quad (3.3)$$

$$\pi < \varphi < 2\pi$$

$$F_{T3} = -P_c f^2, \quad M_{T3} = -P_c l_1 f^2 \sin \varphi. \quad (3.4)$$

Приведенный момент сил технологического сопротивления определится как

$$M_p = P_c u_{31} = \pm P_c l_1 \sin \varphi, \quad (3.5)$$

где знак плюс соответствует углу поворота кривошипа от нуля до π , а знак минус – углу поворота кривошипа от π до 2π .

С учетом последних выражений общий момент сил сопротивления, приведенный к кривошипу запишется в виде:

$$M_c = M_{T2} + M_{T3} + M_p$$

или

$$0 < \varphi < \pi/2$$

$$M_{c1} = P_c l_1 (1+f^2)(f \cos \varphi + \sin \varphi); \quad (3.6)$$

$$\pi/2 < \varphi < \pi$$

$$M_{c2} = P_c l_1 (1+f^2)(-f \cos \varphi + \sin \varphi); \quad (3.7)$$

$$\pi < \varphi < 3/2\pi$$

$$M_{c3} = -P_c l_1 (1+f^2)(f \cos \varphi + \sin \varphi); \quad (3.8)$$

$$3/2\pi < \varphi < 2\pi$$

$$M_{C4} = P_c l_1 (1 + f^2) (f \cos \varphi - \sin \varphi). \quad (3.9)$$

Формулы (3.6)–(3.9) можно записать также в виде:

$$\begin{aligned} M_{C1} &= A \sin(\varphi + \theta), & 0 < \varphi < \pi/2; \\ M_{C2} &= A \sin(\varphi - \theta), & \pi/2 < \varphi < \pi; \\ M_{C3} &= -A \sin(\varphi + \theta), & \pi < \varphi < 3\pi/2; \\ M_{C4} &= -A \sin(\varphi - \theta), & 3\pi/2 < \varphi < 2\pi, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где θ – угол трения, $\theta = \arctg(f)$, $A = P_c l_1 (1 + f^2)^{3/2}$.

В качестве примера на рис. 3.2а приведен график функции $M_C / P_c l_1$ (3.10), построенный при $f = 0,15$.

Представим приведенный момент сопротивления в виде суммы некоторой постоянной составляющей M_{C0} и переменной составляющей \tilde{M}_C . Постоянная составляющая определится как

$$M_{C0} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} M_{C1} d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} M_{C2} d\varphi + \int_{\pi}^{3\pi/2} M_{C3} d\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi} M_{C4} d\varphi \right). \quad (3.11)$$

После подстановки в это выражение соответствующих функций (3.6)–(3.9) и вычисления интегралов, получим:

$$M_{C0} = 2P_c l_1 (1 + f^2) (1 + f) / \pi. \quad (3.12)$$

При $f = 0,15$ $M_{C0} = 0,748 P_c l_1$. Значение среднего момента сопротивления показано на рис. 3.2а штриховой линией.

Переменная составляющая приведенного момента сопротивления определится из соотношения:

$$\tilde{M}_C = M_C - M_{C0}. \quad (3.13)$$

Если трение жидкостное, то оно подчиняется закону вязкого трения:

$$F_T = \beta V, \quad (3.14)$$

где V – относительная скорость скольжения трущихся поверхностей; β – коэффициент вязкого трения, равный:

$$\beta = \frac{\mu S}{\delta},$$

где μ – динамическая вязкость смазочного материала; S – площадь трущихся поверхностей; δ – величина зазора между трущимися поверхностями.

Относительная скорость звеньев 2 и 3 определится через передаточную функцию (2.5):

$$V_{23} = \omega u_{21},$$

а относительная скорость звена 3 и стойки – через передаточную функцию (2.3):

$$V_3 = \omega u_{31},$$

где ω – угловая скорость кривошипа.

Принимая, что коэффициент вязкого сопротивления для обеих кинематических пар одинаков и учитывая последние соотношения, для сил вязкого трения и приведенных к кривошипу моментов сил трения можно записать:

$$F_{T2} = \beta \omega u_{21}, \quad M_{T2} = F_{T2} u_{21} = \beta \omega u_{21}^2, \quad (3.15)$$

$$F_{T3} = \beta \omega u_{31}, \quad M_{T3} = F_{T3} u_{31} = \beta \omega u_{31}^2. \quad (3.16)$$

При этом суммарный момент сил трения, приведенный к кривошипу, определится как

$$M_T = \beta \omega (u_{21}^2 + u_{31}^2) = \beta \omega l_1^2. \quad (3.17)$$

Из полученного выражения следует, что для синусного механизма при вязком трении приведенный момент сил трения не зависит ни от сил полезного сопротивления, ни от обобщенной координаты и изменяется пропорционально угловой скорости кривошипа. При постоянной угловой скорости кривошипа приведенный момент сил вязкого трения есть величина постоянная.

Если в качестве привода механизма используется асинхронный электродвигатель, установленный на валу кривошипа, то с достаточной для инженерной практики точностью движущий момент можно описать линейной функцией [8]:

$$M_o = M_{o0} - b\omega,$$

где ω – угловая скорость вала кривошипа; b – коэффициент, определяемый из паспортных данных двигателя.

Приведенный к кривошипу момент инерции механизма запишется через передаточные функции как

$$J_M = J_1 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 \sin^2 \varphi, \quad (3.18)$$

где m_2, m_3 – массы соответственно второго и третьего звеньев.

График функции (3.18) показан на рис. 3.2б

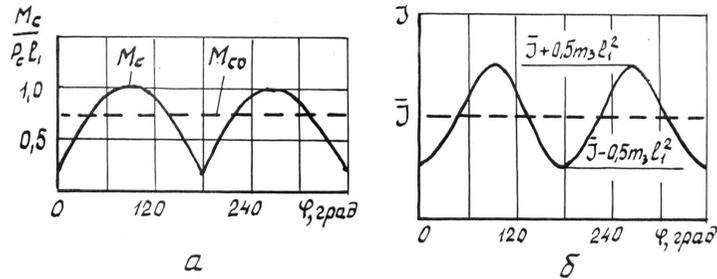


Рис. 3.2. Графики изменения приведенного к кривошипу момента сопротивления (а) и приведенного момента инерции механизма (б)

Представим функцию момента инерции механизма также в виде суммы некоторой постоянной составляющей \bar{J} и переменной составляющей \tilde{J} , которые находятся по формулам:

$$\bar{J} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_M(\varphi) d\varphi, \quad \tilde{J} = J_M - \bar{J}. \quad (3.19)$$

После подстановки в эти формулы функции (3.18) и вычисления интеграла получим:

$$\bar{J} = J_1 + m_2 l_1^2 + 0,5 m_3 l_1^2, \quad (3.20)$$

$$\tilde{J} = -0,5 m_3 l_1^2 \cos 2\varphi. \quad (3.21)$$

Уравнение движения механизма тогда запишется в общем виде как:

$$(\bar{J} + \tilde{J})\dot{\omega} + 0,5 \frac{d\tilde{J}}{d\varphi} \omega^2 = M_{\varphi 0} - b\omega - M_{c0} - \tilde{M}_c. \quad (3.22)$$

Подставляя в него соответствующие выражения для приведенных моментов инерции и приведенных моментов сил, получим уравнение движения для конкретного механизма.

Приближенные методы решения этого уравнения рассмотрены в следующей части данного пособия.

3.2. Кривошипно-ползунный механизм

Для определения сил трения в кривошипно-ползунном механизме (рис. 2.2) воспользуемся, как и в предыдущем случае, методом последовательных приближений. При этом предположим, что существенной является только сила трения между ползунком и его направляющей и эта сила подчиняется закону сухого трения.

Выделим из механизма группу Асура, состоящую из звеньев 2 и 3, заменив отброшенные звенья реакциями R_{12} и R_{03} (рис. 3.3а). Направление реакции R_{12} выбираем произвольно, поскольку оно пока неизвестно, а реакция R_{03} при отсутствии трения между ползунком и стойкой направлена перпендикулярно направляющей ползуна. При движении ползуна вправо (при рабочем ходе) на него действует постоянная сила сопротивления P_c , а при движении влево (при холостом ходе) – сила сопротивления P_c^* , причем $P_c^* = k_p P_c$, где k_p – постоянный коэффициент, меньший единицы.

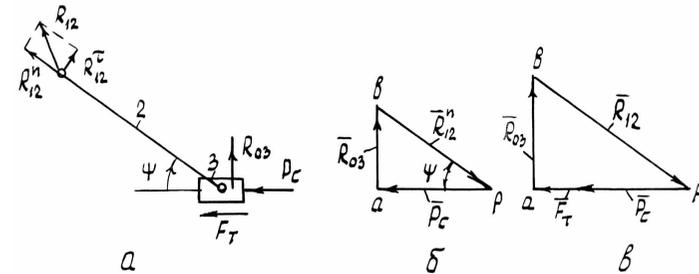


Рис. 3.3. К определению силы трения в кривошипно-ползунном механизме

Допустим, что силы тяжести и силы инерции, действующие на звенья механизма, пренебрежимо малы по сравнению с внешними силами.

Разложим реакцию R_{12} на нормальную и тангенциальную составляющие: R_{12}^n, R_{12}^t (рис. 3.3а). Записывая уравнение моментов сил, действующих на звено 2, относительно точки С, найдем: $R_{12}^t = 0$.

Составим векторное уравнение суммы сил, действующих на звенья 2 и 3 при отсутствии силы трения:

$$\bar{P}_c + \bar{R}_{03} + \bar{R}_{12}^n = 0 \quad (3.23)$$

и построим план сил, соответствующий этому уравнению.

Для этого выберем полюс плана, точку p (рис. 3.3б), и отложим от этой точки в определенном масштабе вектор силы сопротивления P_c . Из конца этого вектора (точка a) проведем линию параллельную вектору R_{03} , а из полюса плана проведем линию параллельную вектору R_{12}^n . На пересечении этих линий получим точку b . Отрезки ab и bp изображают в масштабе вектора сил R_{03} и R_{12}^n . Направления этих векторов определяются уравнением (3.23), в соответствии с которым каждый последующий вектор выходит из конца предыдущего.

Очевидно, что угол apb на плане сил равен углу ψ и, следовательно, справедливы соотношения:

$$(R_{12}^n)_0 = P_c / \cos \psi; \quad (R_{03})_0 = P_c \operatorname{tg} \psi.$$

Индекс «0» в этих выражениях показывает, что это нулевое приближение.

Сила трения между ползуном и направляющей в первом приближении определится как

$$(F_T)_1 = (R_{03})_0 f = P_c f \operatorname{tg} \psi.$$

С учетом силы трения векторное уравнение сил, действующих на звенья 2 и 3, принимает вид:

$$\bar{P}_c + \bar{F}_T + \bar{R}_{03} + \bar{R}_{12}^n = 0.$$

План сил, соответствующий этому уравнению, показан на рис. 3.3в. Из него следует:

$$(R_{12}^n)_1 = (P_c + F_T) / \cos \psi = P_c (1 + f \operatorname{tg} \psi) / \cos \psi,$$

$$(R_{03})_1 = (P_c + F_T) \operatorname{tg} \psi = P_c (1 + f \operatorname{tg} \psi) \operatorname{tg} \psi.$$

Сила трения во втором приближении будет равна:

$$(F_T)_2 = (R_{03})_1 f = P_c f \operatorname{tg} \psi (1 + f \operatorname{tg} \psi).$$

Продолжая решение задачи, для следующего приближения получим:

$$(R_{12}^n)_2 = P_c (1 + f \operatorname{tg} \psi + f^2 \operatorname{tg}^2 \psi) / \cos \psi,$$

$$(R_{03})_2 = P_c (1 + f \operatorname{tg} \psi + f^2 \operatorname{tg}^2 \psi) \operatorname{tg} \psi,$$

$$(F_T)_3 = P_c f \operatorname{tg} \psi (1 + f \operatorname{tg} \psi + f^2 \operatorname{tg}^2 \psi).$$

Сила трения в k -том приближении определится как

$$(F_T)_k = P_c \sum_{i=1}^k (f \operatorname{tg} \psi)^i. \quad (3.24)$$

Учитывая соотношения (2.9), выразим $\operatorname{tg} \psi$ через обобщенную координату:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi}}.$$

Очевидно, что при $\lambda^2 > 2$ всегда выполняется условие $\operatorname{tg} \psi < 1$. Тогда при коэффициенте трения меньше 0,2 в формуле (3.24) можно ограничиться членами, содержащими $(f \operatorname{tg} \psi)$ в степени не выше второй и записать:

$$F_T = P_c f \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi}} + f \frac{\sin^2 \varphi}{\lambda^2 - \sin^2 \varphi} \right), \quad 0 < \varphi < \pi;$$

$$F_T = -k_p P_c f \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi}} + f \frac{\sin^2 \varphi}{\lambda^2 - \sin^2 \varphi} \right), \quad \pi < \varphi < 2\pi.$$

При $\lambda^2 \gg 1$ последние выражения с достаточной для инженерных расчетов точностью можно представить в более простом виде:

$$F_T = P_c \frac{f}{\lambda} \left(\frac{f}{2\lambda} + \sin \varphi - \frac{f}{2\lambda} \cos 2\varphi \right), \quad 0 < \varphi < \pi; \quad (3.25)$$

$$F_T = -k_p P_c \frac{f}{\lambda} \left(\frac{f}{2\lambda} + \sin \varphi - \frac{f}{2\lambda} \cos 2\varphi \right), \quad \pi < \varphi < 2\pi, \quad (3.26)$$

т.е. в виде суммы гармоник с частотами, кратными основной частоте.

Если и отношение $(f/2\lambda)$ много меньше единицы, то можно принять:

$$F_T = P_c \frac{f}{\lambda} \sin \varphi \quad \text{при } 0 < \varphi < \pi; \quad (3.27)$$

$$F_T = -k_p P_c \frac{f}{\lambda} \sin \varphi \quad \text{при } \pi < \varphi < 2\pi.$$

Приведенный к кривошипу момент сил трения определится как

$$M_T = F_T u_{31}.$$

При $\lambda^2 \gg 1$ он может быть описан приближенной функцией:

$$M_T = P_c l_1 \frac{f}{\lambda} \sin^2 \varphi \left(1 + \frac{f}{\lambda} \sin \varphi \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda} \cos \varphi \right), \quad 0 < \varphi < \pi; \quad (3.28)$$

$$M_T = -k_p P_c l_1 \sin^2 \varphi \left(1 + \frac{f}{\lambda} \sin \varphi \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda} \cos \varphi \right), \quad \pi < \varphi < 2\pi.$$

Общий момент сопротивления на кривошипе при изменении угла его поворота в пределах $0 < \varphi < \pi$ будет равен:

$$M_{c1} = (P_c + F_T) u_{31} = P_c \left(1 + \frac{f}{\lambda} \sin \varphi + \frac{f^2}{\lambda^2} \sin^2 \varphi \right) l_1 \sin \varphi \left(1 - \frac{1}{\lambda} \cos \varphi \right).$$

Раскрывая скобки и пренебрегая членами, при которых коэффициенты равны f/λ^2 , f^2/λ^2 , f^3/λ^3 , после преобразований получим:

$$M_{c1} = P_c l_1 \left[\sin \varphi + \frac{f}{2\lambda} - \frac{f}{2\lambda} \cos 2\varphi - \frac{1}{2\lambda} \sin 2\varphi \right]. \quad (3.29)$$

Аналогично найдем, что при изменении угла поворота кривошипа в диапазоне $\pi < \varphi < 2\pi$:

$$M_{c2} = -k_p P_c l_1 \left[\sin \varphi + \frac{f}{2\lambda} - \frac{f}{2\lambda} \cos 2\varphi - \frac{1}{2\lambda} \sin 2\varphi \right]. \quad (3.30)$$

Выделим в этой функции постоянную и переменную составляющие. Постоянная составляющая определится как

$$M_{c0} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi M_{c1} d\varphi + \int_\pi^{2\pi} M_{c2} d\varphi \right). \quad (3.31)$$

После подстановки в это выражение функций (3.29), (3.30) и вычисления интеграла, найдем:

$$M_{c0} = P_c l_1 \left[\frac{1+k_p}{\pi} + \frac{(1-k_p)f}{4\lambda} \right]. \quad (3.32)$$

Переменная составляющая, как и в предыдущем случае, определяется формулой (3.13).

График функции $M_C(\varphi)$, построенный при $f = 0,2$, $\lambda = 3$, $k_p = 0,2$, представлен на рис. 3.4а. Там же штриховой линией показано среднее значение момента сопротивления, который при указанных значениях f , λ и k_p равен $0,395 P_c l_1$.

Если трение между ползуном и стойкой жидкостное, то сила трения определится как

$$F_T = \beta \omega u_{31},$$

а приведенный к кривошипу момент силы трения как

$$M_T = \beta \omega u_{31}^2 = \beta \omega l_1^2 \left(\sin \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi}} \right)^2. \quad (3.33)$$

При $\lambda^2 \gg 1$ это выражение можно упростить, записав:

$$M_T = \beta \omega l_1^2 \sin^2 \varphi \left(1 - \frac{1}{\lambda} \cos \varphi \right)^2. \quad (3.34)$$

Как видно, этот момент в отличие от момента вязкого трения в синусном механизме является функцией не только угловой скорости кривошипа, но и обобщенной координаты.

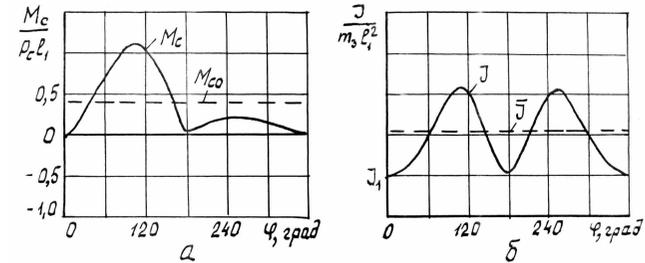


Рис. 3.4. Диаграммы изменения приведенного момента сил сопротивления (а) и приведенного момента инерции механизма (б) от угла поворота кривошипа

При пренебрежении массой шатуна приведенный к кривошипу момент инерции механизма определится из выражения:

$$J_M = J_1 + m_3 u_{31}^2, \quad (3.35)$$

где J_1 – момент инерции кривошипа, m_3 – масса ползуна.

Принимая, что $\lambda^2 \gg 1$ и подставляя в равенство (3.35) передаточную функцию (2.12), получим:

$$J_M = J_1 + m_3 l_1^2 \sin^2 \varphi \left(1 - \frac{1}{\lambda} \cos \varphi \right)^2. \quad (3.36)$$

Среднее значение приведенного момента инерции или его постоянную составляющую найдем из соотношения (3.19). После подстановки в него функции (3.36) и вычисления интеграла получим:

$$\bar{J} = J_1 + \frac{m_3 l^2}{2} \left(1 + \frac{1}{4\lambda^2} \right). \quad (3.37)$$

Переменная составляющая определится как

$$\tilde{J} = J - \bar{J} = -\frac{m_3 l^2}{2} \left[1 + \frac{1}{4\lambda^2} - \sin^2 \left(1 - \frac{2}{\lambda} \cos \varphi \right) + \frac{1}{\lambda^2} \cos^2 \varphi \right]. \quad (3.38)$$

Пренебрегая, по возможности, членами, содержащими множитель $1/\lambda^2$, получим:

$$\tilde{J} = -\frac{m_3 l^2}{2} \left[1 - \sin^2 \varphi \left(1 - \frac{2}{\lambda} \cos \varphi \right) \right]. \quad (3.39)$$

График функции $J(\varphi)$ показан на рис. 3.46. Там же штриховой линией показано среднее значение момента инерции.

Подставляя функции (3.13), (3.32), (3.37), (3.38) в общее уравнение (3.22), получим уравнение движения кривошипно-ползунного механизма с учетом сил трения.

3.3. Кулисный механизм

В кулисном механизме (рис. 3.5а) с шарнирами, оснащенными подшипниками качения, наибольшие силы трения возникают между ползуном 2 и кулисой 3. Определим эти силы, предполагая, что на кулису действует момент сил сопротивления M_3 . Силами и моментами сил инерции, действующими на звенья пренебрегаем.

Для нахождения сил трения между ползуном и кулисой выделим из механизма группу Ассур, состоящую из звеньев 2 и 3, заменив отброшенные звенья реакциями R_{03} и R_{12} (рис. 3.5б). Величина и направление этих реакций пока не известны.

Разложим реакцию R_{12} на нормальную составляющую R_{12}^n , направленную вдоль звена 3 и тангенциальную составляющую R_{12}^t , направленную перпендикулярно этому звену. Тангенциальную составляющую реакции найдем из уравнения моментов сил, действующих на звенья 2 и 3 относительно точки С:

$$R_{12}^t = M_3 / l_{BC}, \quad (3.40)$$

где l_{BC} – расстояние от точки В до точки С, определяемое по формуле (2.25).

Если теперь рассмотреть только ползун, отбросив остальные звенья и заменив их реакциями (рис. 3.5в), то видно, что тангенциальная составляющая R_{12}^t уравнивается давлением между ползуном и кулисой R_{32}^r , а нормальная составляющая R_{12}^n уравнивается силой трения между ползуном и кулисой. Следовательно, для силы трения можно записать:

$$F_T = R_{12}^n = R_{12}^t f, \quad (3.41)$$

а для момента трения, приведенного к кривошипу:

$$M_T = F_T u_{21},$$

где u_{21} – передаточная функция, определяемая выражениями (2.20), (2.31).

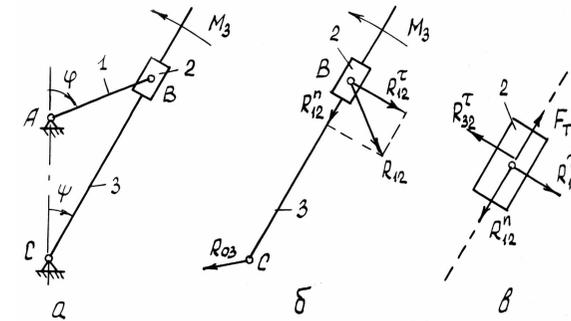


Рис. 3.5. К определению сил трения в кулисном механизме

Учитывая соотношения (3.40), (3.41), последнее выражение можно записать в виде:

$$M_T = \pm M_3 f \frac{\lambda \sin \varphi}{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \varphi}, \quad (3.42)$$

где знак плюс соответствует углу поворота кривошипа от нуля до π , а знак минус – углу поворота от π до 2π .

Общий момент сил сопротивления, приведенный к кривошипу, описывается выражением:

$$M_C = M_3 u_{31} + M_T. \quad (3.43)$$

Далее рассмотрим два случая.

Случай 1: $\lambda < 1$.

В этом случае при вращении кривошипа на полный оборот кулиса также поворачивается на полный оборот в том же направлении, что и кривошип. При постоянном моменте сил M_3 приведенный момент сил сопротивления будет определяться выражениями:

$$0 < \varphi < \pi$$

$$M_c = \frac{M_3}{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \varphi} [1 + \lambda(\cos \varphi + f \sin \varphi)], \quad (3.44)$$

$$\pi < \varphi < 2\pi$$

$$M_c = \frac{M_3}{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \varphi} [1 + \lambda(\cos \varphi - f \sin \varphi)]. \quad (3.45)$$

График этой функции, построенный при значениях: $\lambda = 0,5; f = 0,2$, показан на рис. 3.6а кривой 1.

Случай 2: $\lambda > 1$.

В этом случае, как было показано во втором разделе данного пособия, кулиса совершает качательные движения с размахом $\psi_{\max} = \arcsin(1/\lambda)$.

Допустим, что при рабочем ходе (при движении кулисы вправо) момент сил сопротивления, действующий на кулису, равен M_3 , а при холостом ходе (при движении кулисы влево) момент сил сопротивления равен $k_M M_3$, где k_M – постоянный коэффициент, меньший единицы. Тогда, вместо формул (3.44), (3.45) будем иметь:

$$0 < \varphi < (0,5\pi + \psi_{\max})$$

$$M_c = \frac{M_3}{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \varphi} [1 + \lambda(\cos \varphi + f \sin \varphi)], \quad (3.46)$$

$$(0,5\pi + \psi_{\max}) < \varphi < \pi$$

$$M_c = \frac{k_M M_3}{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \varphi} [1 + \lambda(\cos \varphi + f \sin \varphi)], \quad (3.47)$$

$$\pi < \varphi < (1,5\pi - \psi_{\max})$$

$$M_c = \frac{k_M M_3}{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \varphi} [1 + \lambda(\cos \varphi - f \sin \varphi)], \quad (3.48)$$

$$(1,5\pi - \psi_{\max}) < \varphi < 2\pi$$

$$M_c = \frac{M_3}{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \varphi} [1 + \lambda(\cos \varphi - f \sin \varphi)]. \quad (3.49)$$

В качестве примера на рис. 3.6а кривая 2 показывает график функции (3.46) – (3.49), построенный при значениях: $\lambda = 2,0; f = 0,2; k_M = 0,5$.

При жидкостном трении между ползуном и кулисой сила трения равна

$$F_T = \beta \omega u_{21}.$$

Приведенный момент сил трения с учетом передаточной функции (2.31) описывается выражением:

$$M_T = \beta \omega u_{21}^2 = \beta \omega l_1^2 \lambda \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \varphi)} \quad (3.50)$$

и зависит как от угловой скорости кривошипа, так и от обобщенной координаты механизма.

Приведенный момент инерции кулисного механизма в общем случае описывается выражением:

$$J = J_1 + J_{2S} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + m_2 \frac{V_{B2}^2}{\omega_1^2} + J_3 \frac{\omega_3^2}{\omega_1^2},$$

где ω_i – угловая скорость соответствующего звена; V_{B2} – линейная скорость точки В, принадлежащей звену 2; J_{2S} – момент инерции звена 2 относительно его центра тяжести; m_2 – масса звена 2; J_1, J_3 – моменты инерции звеньев 1 и 3 относительно их осей вращения.

Если учесть, что угловые скорости звеньев 2 и 3 одинаковы ($\omega_2 = \omega_3$) и принять $J_{2S} \ll J_3$, то последнее выражение приобретает вид:

$$J = J_1 + m_2 l_1^2 + J_3 u_{31}^2. \quad (3.51)$$

Передаточная функция u_{31} в этом выражении находится по формуле (2.27).

Графики функции (3.51), построенные при значениях λ , равных 0,5 и 2,0, приведены на рис. 3.6б.

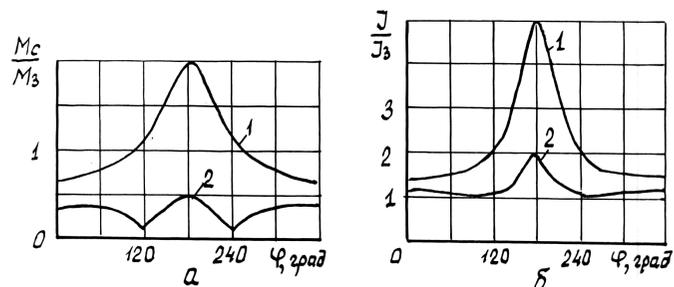


Рис. 3.6. Диаграммы изменения приведенного момента сил сопротивления (а) и приведенного момента сил инерции (б) кулисного механизма
б: 1 – $\lambda = 0,5$; 2 – $\lambda = 2,0$

Если в кулисном механизме выполняется условие $\lambda = 1$, то формула (3.42) принимает вид:

$$M_T = \pm M_3 f \frac{\sin \varphi}{2(1 + \cos \varphi)} = \pm 0,5 M_3 f t g(\varphi/2), \quad (3.52)$$

а формула (3.50)

$$M_T = \beta \omega_1^2 \frac{\sin^2 \varphi}{2(1 + \cos \varphi)} = \beta \omega_1^2 \sin^2(\varphi/2). \quad (3.53)$$

Из этих формул следует, что при сухом трении и выполнении условия $\varphi = \pi$ приведенный к кривошипу момент трения стремится к бесконечности, то есть в этом положении должно произойти заклинивание механизма при любом как угодно малом значении момента M_3 . В действительности этого не происходит из-за наличия зазоров в кинематических парах.

При жидкостном трении приведенный момент трения также максимальный при выполнении условия $\varphi = \pi$, но в отличие от предыдущего случая он имеет конечную величину.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коловский М.З. Динамика машин. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отделение, 1989. – 263 с.
2. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 592 с.
3. Левитский Н.И. Колебания в механизмах: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 336 с.
4. Теория механизмов и машин: Учеб. для вузов / К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др. / Под ред. К.В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1987. – 496 с.
5. Филонов И.П., Анципорович П.П., Акулич В.К. Теория механизмов, машин и манипуляторов. – Минск: Дизайн ПРО, 1988. – 656 с.
6. Спришевский А.И. Подшипники качения. – М.: Машиностроение, 1968. – 632 с.
7. Еремьянц В.Э., Хренова М.В. Определение приведенного коэффициента жесткости опорного узла коромысла ударного механизма // Повышение эксплуатационной эффективности транспортных, строительного-дорожных машин и коммуникаций в условиях высокогорья и жаркого климата: Матер. междунар. научно-практич. конф. / Кыргыз. гос. ун-т строит-ва, трансп. и архит. – Бишкек, 2002. – С. 97 – 104.
8. Еремьянц В.Э. Построение и анализ динамических моделей механизмов. Ч. 3. Модели приводов: Учебно-метод. пособие / Кыргызско-Российский Славянский ун-т. – Бишкек, 2001. – 50 с.

В.Э. Еремьянц

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ
ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
МЕХАНИЗМОВ

Часть 5

Динамические модели машин с плоскими
шарнирно-рычажными механизмами

Учебно-методическое пособие

Редактор *И.С. Волоскова*
Технический редактор *О.А. Матвеева*
Корректор *Е.И. Полихова*
Компьютерная верстка *Э.Ю. Вислевской*

Подписано в печать 07.08.2007. Формат 60×84 ¹/₁₆
Офсетная печать. Объем 3,5 п.л.
Тираж 50 экз. Заказ 209.

Издательство Кыргызско-Российского
Славянского университета
720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44

Отпечатано в типографии КРСУ
720000, г. Бишкек, ул. Шопокова, 68