

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В.Э. Еремьянц, Я.И. Рудаев, Г.В. Тютюкин

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Учебное пособие

Часть 2

*Допущено Министерством образования и науки
Кыргызской Республики в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

Бишкек 2014

УДК 531.3
ББК 22.213
Е 70

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор *С.А. Абдрахманов*,
д-р техн. наук, профессор *М.У. Ураимов*

Рекомендовано к изданию Ученым советом ГОУВПО КРСУ

Еремьянц В.Э.

Е 70 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ: Учебное пособие. Часть 2 / В.Э. Еремьянц, Я.И. Рудаев, Г.В. Тютюкин. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2014. 247 с.

ISBN 978-9967-19-067-2

В учебном пособии представлен курс лекций в 2-х частях, читаемых студентам специальности «Динамика и прочность машин» Кыргызско-Российского Славянского университета.

Часть 2 состоит из четырех глав. В четвертой главе изложены методы расчета и анализа колебаний систем с конечным числом степеней свободы. Пятая глава посвящена изучению продольных, крутильных и изгибных колебаний стержней с распределенными параметрами. В шестой главе рассматривается колебание пластин. В отдельную – седьмую главу вынесено описание колебаний систем при ударе. Приводятся примеры использования изучаемых методов для решения инженерных задач.

Для студентов технических вузов, изучающих дисциплины «Аналитическая динамика и теория колебаний», «Динамика машин», а также для инженеров, аспирантов и научных сотрудников, работающих в области создания и исследования различных машин и механических систем.

Е 1603030000-14

УДК 531.3
ББК 22.213

ISBN 978-9967-19-067-2

© ГОУВПО КРСУ, 2014

4. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

4.1. Уравнения движения системы в прямой и обратной форме

Рассмотрим системы, состоящие из нескольких сосредоточенных масс, связанных между собой упругими элементами. Эти системы могут быть различными. Например, на рисунке 4.1 а показана балочная система, состоящая из упругой балки, несущей сосредоточенные грузы, совершающие поперечные колебания. На рисунке 4.1 б представлена система, состоящая из грузов, совершающих продольные колебания, а на рисунке 4.1 в – система, состоящая из дисков, совершающих крутильные колебания. Две последние системы называются *цепными системами*.

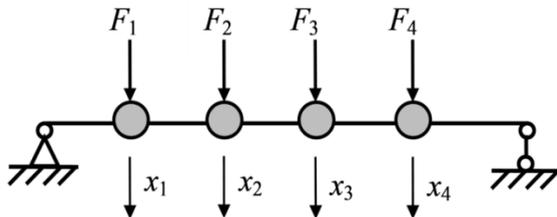
Под цепной системой понимается такая система, в которой упругие силы, действующие на i -ую массу, зависят от перемещения только соседних масс, а более удаленные массы на эти силы не влияют.

Балочная система к цепным не относится, поскольку в ней на перемещение i -ой массы и упругие силы, действующие на эту массу, оказывают влияние перемещения всех остальных масс.

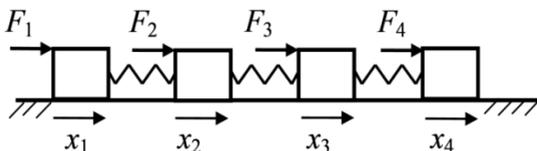
Положения всех масс в системе с n степенями свободы определяется n независимыми обобщенными координатами $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Например, в системах, показанных на рисунке 4.1, число степеней свободы равно числу сосредоточенных масс и положения всех масс определяются четырьмя обобщенными координатами ($n = 4$).

Для составления уравнений движения этих систем можно воспользоваться уравнениями Лагранжа второго рода или уравнениями кинестатики, основанными на принципе Даламбера. В данном случае удобнее применить

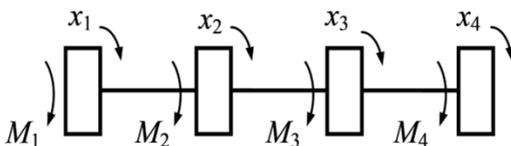
метод кинестатики, учитывая известные из сопротивления материалов соотношения между действующими на систему силами и перемещениями точек системы.



а



б



в

Рисунок 4.1

При этом уравнения движения могут быть записаны *в прямой форме* в виде уравнений сил или *в обратной форме* – в виде уравнений перемещений. Для балочных систем (рисунок 4.1 а) более удобной является вторая – обратная форма, при которой уравнения движения записываются в виде:

$$x_1 = F_1 \delta_{11} + F_2 \delta_{12} + F_3 \delta_{13} + \dots + F_n \delta_{1n},$$

$$x_2 = F_1 \delta_{21} + F_2 \delta_{22} + F_3 \delta_{23} + \dots + F_n \delta_{2n},$$

$$x_n = F_1 \delta_{n1} + F_2 \delta_{n2} + F_3 \delta_{n3} + \dots + F_n \delta_{nn}.$$

В общем виде эту систему уравнений можно записать так

$$x_i = \sum_{j=1}^n F_j \delta_{ij}, \quad (4.1)$$

где δ_{ij} – коэффициенты влияния, аналогичные коэффициентам влияния сил в строительной механике.

Удобство записи уравнений движения балочных систем в форме (4.1) объясняется тем, что в строительной механике хорошо отработана процедура нахождения коэффициентов влияния δ_{ij} . Для этого надо приложить к каждой из масс, на которые действуют внешние силы, единичную силу и построить отдельно для каждой единичной силы эпюру изгибающих моментов. Затем перемножением площадей этих эпюр на координаты под центрами их тяжести по правилу Верещагина, находятся значения коэффициентов влияния δ_{ij} .

Коэффициенты влияния представляют собой коэффициенты податливости системы в точке приложения силы и равны перемещениям соответствующих точек под действием единичной силы.

Если в уравнении (4.1) все силы F_j внешние и не меняются во времени, то это уравнение статики. Для получения уравнения движения необходимо согласно принципу Даламбера ко всем внешним силам добавить силы инерции. После этого можно рассматривать движущуюся систему как находящуюся в равновесии и вместо (4.1) записать:

$$x_i = \sum_{j=1}^n F_j \delta_{ij} - \sum_{j=1}^n m_j \ddot{x}_j \delta_{ij}. \quad (4.2)$$

Здесь $-m_j \ddot{x}_j$ это сила инерции j -ой массы.

Уравнение (4.2) – это уравнение движения системы, записанное в *обратной форме*, т. е. в виде уравнения перемещений.

В качестве примера приведем уравнения движения системы, представленной на рисунке 4.1 а, полагая, что

внешние силы отсутствуют ($F_j = 0$) и система совершает свободные колебания:

$$\begin{aligned} x_1 + m_1 \ddot{x}_1 \delta_{11} + m_2 \ddot{x}_2 \delta_{12} + m_3 \ddot{x}_3 \delta_{13} + m_4 \ddot{x}_4 \delta_{14} &= 0, \\ x_2 + m_1 \ddot{x}_1 \delta_{21} + m_2 \ddot{x}_2 \delta_{22} + m_3 \ddot{x}_3 \delta_{23} + m_4 \ddot{x}_4 \delta_{24} &= 0, \\ x_3 + m_1 \ddot{x}_1 \delta_{31} + m_2 \ddot{x}_2 \delta_{32} + m_3 \ddot{x}_3 \delta_{33} + m_4 \ddot{x}_4 \delta_{34} &= 0, \\ x_4 + m_1 \ddot{x}_1 \delta_{41} + m_2 \ddot{x}_2 \delta_{42} + m_3 \ddot{x}_3 \delta_{43} + m_4 \ddot{x}_4 \delta_{44} &= 0. \end{aligned}$$

Для цепных систем удобнее пользоваться уравнениями движения в прямой форме, т. е. выразить все силы через перемещения и коэффициенты влияния r_{ij} , которые являются коэффициентами жесткостей.

В статике для систем, показанных на рисунке 4.1 б, в, в общем случае можно записать

$$\begin{aligned} F_1 &= r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 + \dots + r_{1n}x_n, \\ F_2 &= r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + r_{23}x_3 + \dots + r_{2n}x_n, \\ F_n &= r_{n1}x_1 + r_{n2}x_2 + r_{n3}x_3 + \dots + r_{nn}x_n, \end{aligned}$$

или

$$F_i = \sum_{j=1}^n r_{ij}x_j, \quad i = 1, 2 \dots n. \quad (4.3)$$

Добавив к действующим силам F_i силы инерции ($-m_i \ddot{x}_i$), получим уравнение движения системы в *прямой форме*:

$$F_i = \sum_{j=1}^n r_{ij}x_j + m_i \ddot{x}_i, \quad i = 1, 2 \dots n. \quad (4.4)$$

Матрицы коэффициентов δ и r :

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

являются симметричными относительно главных диагоналей

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad r_{ij} = r_{ji},$$

и взаимобратные, т. е. $\delta = 1/r$.

Для иллюстрации удобства применения при описании цепных систем уравнений движения в прямой форме запишем эти уравнения для системы, показанной на рисунке 4.1 б. При этом положим, что коэффициенты жесткостей упругих элементов соответственно равны c_1, c_2, c_3, c_4 , внешние силы на систему не действуют и система совершает свободные колебания. Тогда $F_i = 0$ и уравнения (4.4) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_1 x_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_1 x_1 + (c_1 + c_2) x_2 - c_2 x_3 &= 0, \\ m_3 \ddot{x}_3 - c_2 x_2 + (c_2 + c_3) x_3 - c_3 x_4 &= 0, \\ m_4 \ddot{x}_4 - c_3 x_3 + c_3 x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Сравнивая эти уравнения с развернутыми уравнениями (4.4), для коэффициентов влияния r_{ij} запишем:

$$\begin{aligned} r_{11} &= c_1, \quad r_{12} = -c_1, \quad r_{13} = 0, \quad r_{14} = 0, \\ r_{21} &= -c_1, \quad r_{22} = c_1 + c_2, \quad r_{23} = -c_2, \quad r_{24} = 0, \\ r_{31} &= 0, \quad r_{32} = -c_2, \quad r_{33} = c_2 + c_3, \quad r_{34} = -c_3, \\ r_{41} &= 0, \quad r_{42} = 0, \quad r_{43} = -c_3, \quad r_{44} = c_3. \end{aligned}$$

Из этой записи видно, что коэффициенты влияния представляют собой комбинации коэффициентов жесткостей. Матрица коэффициентов влияния имеет вид:

$$\begin{pmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & (c_1 + c_2) & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Она симметрична относительно её диагонали, каждый коэффициент влияния зависит только от жесткостей одного или двух соседних упругих элементов, при этом часть коэффициентов влияния обращается в ноль. В этом и заключается удобство записи уравнений движения цепных систем в прямой форме.

Если записать уравнение движения цепной системы в обратной форме, то все коэффициенты влияния δ_{ij} будут отличны от нуля, что усложнит дальнейшее решение.

4.2. Определение частот и форм свободных колебаний системы

При отсутствии возмущающих внешних сил система будет совершать свободные колебания, описываемые однородными уравнениями движения:

$$x_i + \sum_{j=1}^n m_j \ddot{x}_j \delta_{ij} = 0, \quad i = 1, 2 \dots n. \quad (4.5)$$

Очевидно, что эти колебания будут гармоническими. Решение системы уравнений (4.5), соответствующее гармоническим колебаниям можно представить в виде:

$$x_i = u_i \cos(pt + \varphi), \quad (4.6)$$

где u_i – постоянные амплитудные значения перемещений, различные для различных масс; p – круговая частота колебаний; φ – начальная фаза колебаний.

Подставляя это решение в уравнение движения (4.5) и учитывая, что

$$\ddot{x}_i = -p^2 u_i \cos(pt + \varphi), \quad (4.7)$$

получим

$$u_i \cos(pt + \varphi) = p^2 \cos(pt + \varphi) \sum_{j=1}^n m_j u_j \delta_{ij},$$

или после сокращения левой и правой части уравнения на $\cos(pt + \varphi)$:

$$u_i = p^2 \sum_{j=1}^n m_j u_j \delta_{ij}. \quad (4.8)$$

В развернутом виде это уравнение запишется как система уравнений:

$$u_1 = p^2 m_1 u_1 \delta_{11} + p^2 m_2 u_2 \delta_{12} + p^2 m_3 u_3 \delta_{13} + \dots + p^2 m_n u_n \delta_{1n},$$

$$u_2 = p^2 m_1 u_1 \delta_{21} + p^2 m_2 u_2 \delta_{22} + p^2 m_3 u_3 \delta_{23} + \dots + p^2 m_n u_n \delta_{2n},$$

$$u_n = p^2 m_1 u_1 \delta_{n1} + p^2 m_2 u_2 \delta_{n2} + p^2 m_3 u_3 \delta_{n3} + \dots + p^2 m_n u_n \delta_{nn}.$$

Эта система имеет решения отличные от нуля, если определитель, составленный из коэффициентов при u_1, u_2, \dots, u_n , равен нулю, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} (p^2 m_1 \delta_{11} - 1) & p^2 m_2 \delta_{12} & \dots & p^2 m_n \delta_{1n} \\ p^2 m_1 \delta_{21} & (p^2 m_2 \delta_{22} - 1) & \dots & p^2 m_n \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^2 m_1 \delta_{n1} & p^2 m_2 \delta_{n2} & \dots & (p^2 m_n \delta_{nn} - 1) \end{vmatrix} = 0.$$

Разворачивая определитель, получим частотное уравнение n -ой степени относительно p^2 . Это уравнение называется *частотным или вековым*. Решая его относительно p^2 можно найти частоты свободных колебаний системы. Эти частоты называются *собственными частотами* системы. Система с n степенями свободы имеет n собственных частот колебаний.

Каждой собственной частоте соответствует своя форма колебаний (собственная форма), которая характеризуется амплитудными отклонениями:

$$\begin{aligned} &u_{11}, u_{12}, u_{13}, \dots, u_{1n}, \\ &u_{21}, u_{22}, u_{23}, \dots, u_{2n}, \\ &u_{n1}, u_{n2}, u_{n3}, \dots, u_{nn}. \end{aligned}$$

В этой записи первый индекс означает номер перемещения, а второй – номер формы колебания.

Каждой форме колебания соответствует решение уравнения движения в виде

$$x_{ik} = u_{ik} \cos(p_k t + \varphi_k), \quad (4.9)$$

где k – номер формы колебаний.

Движения, происходящие в соответствии с этим уравнением, называются *главными или нормальными колебаниями* системы. Так как исходная система уравнений движе-

ния линейная, то линейная комбинация решений (4.9) также является её решением. Тогда можно записать:

$$x_i = \sum_{k=1}^n C_k u_{ik} \cos(p_k t + \varphi_k), \quad (4.10)$$

где C_k и φ_k – постоянные, которые находятся из начальных условий

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad \dot{x}_i(0) = \dot{x}_{i0}. \quad (4.11)$$

Рассмотрим порядок определения собственных частот и форм колебаний на примере.

Пример 4.1

Допустим, необходимо определить собственные частоты и формы колебаний системы, состоящей из балки, несущей сосредоточенные грузы m_1 , m_2 (рисунок 4.2). Массой балки пренебречь.

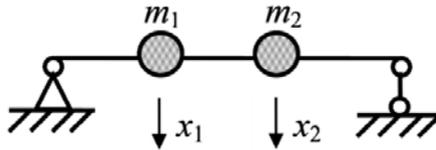


Рисунок 4.2

Решение.

Уравнения движения рассматриваемой системы запишутся в виде (4.5):

$$x_1 + m_1 \ddot{x}_1 \delta_{11} + m_2 \ddot{x}_2 \delta_{12} = 0, \quad (4.12)$$

$$x_2 + m_1 \ddot{x}_1 \delta_{21} + m_2 \ddot{x}_2 \delta_{22} = 0.$$

Решение этих уравнений при гармонических колебаниях имеет вид

$$x_1 = u_1 \cos(pt + \varphi), \quad x_2 = u_2 \cos(pt + \varphi). \quad (4.13)$$

Подставляя эти решения в уравнения движения, и сокращая все члены уравнения на $\cos(pt + \varphi)$, запишем:

$$(1 - p^2 m_1 \delta_{11}) u_1 - p^2 m_2 \delta_{12} u_2 = 0, \quad (4.14)$$

$$p^2 m_1 \delta_{21} u_1 - (1 - p^2 m_2 \delta_{22}) u_2 = 0. \quad (4.15)$$

Составим определитель этой системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1 - p^2 m_1 \delta_{11}) & -p^2 m_2 \delta_{12} \\ p^2 m_1 \delta_{21} & -(1 - p^2 m_2 \delta_{22}) \end{vmatrix}.$$

Развертывая определитель и приравнявая его к нулю, получим частотное уравнение:

$$p^4 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) - p^2 (m_2 \delta_{22} + m_1 \delta_{11}) + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$p_{12}^2 = \frac{m_2 \delta_{22} + m_1 \delta_{11}}{2 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{12} - \delta_{12}^2)} \pm \frac{\sqrt{(m_2 \delta_{22} + m_1 \delta_{11})^2 - 4 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{12} - \delta_{12}^2)}. \quad (4.16)$$

Система имеет две собственные частоты p_1 , p_2 и две формы колебаний.

Соотношения между амплитудами отклонений грузов можно найти из уравнения (4.14) или (4.15). Из уравнения (4.14) следует

$$u_{2k} = \frac{1 - p_k^2 m_1 \delta_{11}}{p_k^2 m_2 \delta_{12}} u_{1k}.$$

Тогда для первой формы имеем

$$u_{21} = \frac{1 - p_1^2 m_1 \delta_{11}}{p_1^2 m_2 \delta_{12}} u_{11},$$

а для второй формы

$$u_{22} = \frac{1 - p_2^2 m_1 \delta_{11}}{p_2^2 m_2 \delta_{12}} u_{12}.$$

Эти соотношения удобно представлять в безразмерном виде:

$$\chi_1 = \frac{u_{21}}{u_{11}} = \frac{1 - p_1^2 m_1 \delta_{11}}{p_1^2 m_2 \delta_{12}}, \quad \chi_2 = \frac{u_{22}}{u_{12}} = \frac{1 - p_2^2 m_1 \delta_{11}}{p_2^2 m_2 \delta_{12}}. \quad (4.17)$$

С учетом этих соотношений движения грузов описываются уравнениями:

$$x_1 = u_{11} \cos(p_1 t + \varphi_1) + u_{12} \cos(p_2 t + \varphi_2), \quad (4.18)$$

$$x_2 = u_{11}\chi_1 \cos(p_1 t + \varphi_1) + u_{12}\chi_2 \cos(p_2 t + \varphi_2). \quad (4.19)$$

Из системы уравнений (4.18), (4.19) видно, что введение безразмерных форм колебаний χ_1, χ_2 позволило уменьшить число неизвестных. Теперь вместо шести неизвестных постоянных $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, \varphi_1, \varphi_2$ эти уравнения содержат лишь четыре постоянных $u_{11}, u_{12}, \varphi_1, \varphi_2$. Они находятся из начальных условий, которые в общем случае выражаются соотношениями (4.11).

Примем в качестве начальных условий

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = V_0.$$

Подставляя в них решения (4.18), (4.19), получим систему уравнений:

$$u_{11} \cos \varphi_1 + u_{12} \cos \varphi_2 = 0,$$

$$u_{11}\chi_1 \cos \varphi_1 + u_{12}\chi_2 \cos \varphi_2 = 0,$$

$$u_{11}p_1 \sin \varphi_1 + u_{12}p_2 \sin \varphi_2 = 0,$$

$$-u_{11}p_1\chi_1 \sin \varphi_1 - u_{12}p_2\chi_2 \sin \varphi_2 = V_0.$$

Записывая из первого уравнения этой системы

$$u_{12} \cos \varphi_2 = -u_{11} \cos \varphi_1,$$

и подставляя это выражение во второе уравнение, получим:

$$u_{11}(\chi_1 - \chi_2) \cos \varphi_1 = 0.$$

Так как в общем случае $\chi_1 \neq \chi_2$, $u_{11} \neq 0$, то остается

$$\cos \varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично, находим

$$\cos \varphi_2 = 0, \quad \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Примем $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$.

С учетом этого из третьего и четвертого уравнения системы найдем:

$$u_{11} = -\frac{V_0}{p_1(\chi_1 - \chi_2)}, \quad u_{12} = \frac{V_0}{p_2(\chi_1 - \chi_2)}.$$

Подставляя значения найденных постоянных в решения (4.18), (4.19), и учитывая, что

$$\cos\left(p_1 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin p_1 t,$$

$$\cos\left(p_2 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin p_2 t,$$

окончательно получим:

$$x_1 = \frac{V_0}{p_1(\chi_1 - \chi_2)} \left(\sin p_1 t - \frac{p_1}{p_2} \sin p_2 t \right),$$

$$x_2 = \frac{V_0 \chi_1}{p_1(\chi_1 - \chi_2)} \left(\sin p_1 t - \frac{p_1 \chi_2}{p_2 \chi_1} \sin p_2 t \right).$$

Так как $p_2 > p_1$, то из полученных решений следует, что амплитуда второй гармоники меньше, чем первой, по крайней мере, для первой массы.

4.3. Ортогональность форм собственных колебаний

В предыдущем разделе отмечалось, что колебания, описываемые функцией

$$x_{ik} = u_{ik} \cos(p_k t + \varphi_k),$$

называются главными или нормальными колебаниями.

Если двум разным главным колебаниям с собственными частотами p_k и p_r соответствуют формы u_{ik} и u_{ir} , то эти формы обладают свойством ортогональности, которое имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n m_i u_{ik} u_{ir} = 0, \quad (k \neq r). \quad (4.20)$$

Если какая-то масса имеет пространственное перемещение, например, по двум координатам x и y , то условие ортогональности имеет вид:

$$\sum_{i=1}^n m_i (u_{ixk} u_{ixr} + u_{iyk} u_{iyr}) = 0, \quad (k \neq r). \quad (4.21)$$

Забегая вперед, отметим, что если система имеет распределенные параметры, то вместо суммирования соответствующих произведений производится их интегрирование.

Например, для балки длиной l с распределенной по её длине массой m_0 , зависящей от координаты сечения z , условие ортогональности собственных форм запишется так

$$\int_0^l m_0(z) u_k(z) u_r(z) dz = 0. \quad (4.22)$$

Докажем свойство ортогональности для систем с конечным числом степеней свободы.

Обозначим через x_{ik} и x_{ir} перемещения i -ой точки системы, соответствующие двум формам колебаний с номерами k и r (рисунок 4.3). При этом

$$x_{ik} = u_{ik} \cos(p_k t + \varphi_k),$$

$$x_{ir} = u_{ir} \cos(p_r t + \varphi_r).$$

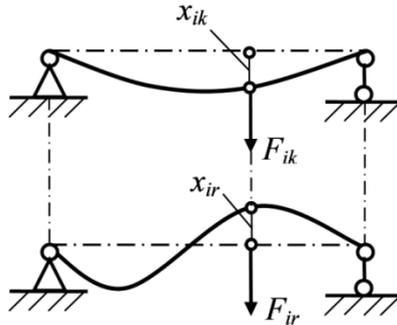


Рисунок 4.3

При перемещениях на точку действуют силы инерции F_{ik} , F_{ir} , соответствующие двум формам колебаний, причем

$$F_{ik} = m_i p_k^2 u_{ik} \cos(p_k t + \varphi_k),$$

$$F_{ir} = m_i p_r^2 u_{ir} \cos(p_r t + \varphi_r).$$

По теореме Бетти о взаимности работ при двух нагружениях упругой системы можно записать:

$$\sum_{i=1}^n F_{ik} x_{ir} = \sum_{i=1}^n F_{ir} x_{ik}.$$

Подставляя в это равенство выражения для перемещений и сил инерции, запишем:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n m_i p_k^2 u_{ik} \cos(p_k t + \varphi_k) u_{ir} \cos(p_r t + \varphi_r) = \\ & = \sum_{i=1}^n m_i p_r^2 u_{ir} \cos(p_r t + \varphi_r) u_{ik} \cos(p_k t + \varphi_k). \end{aligned}$$

Сокращая обе части равенства на $\cos(p_r t + \varphi_r)$ $\cos(p_k t + \varphi_k)$ и вынося частоты, не зависящие от номера массы i за знак суммы, приходим к уравнению

$$(p_k^2 - p_r^2) \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} u_{ir} = 0,$$

из которого при $p_k \neq p_r$ следует условие ортогональности (4.20).

Рассмотрим несколько численных примеров.

Пример 4.2

Определить собственные частоты и формы колебаний балки постоянного сечения (рисунок 4.4) с сосредоточенными массами $m_1 = m$, $m_2 = 2m$. Изгибная жесткость балки EJ . Масса балки пренебрежимо мала.

Решение.

Определим вначале коэффициенты влияния δ_{ij} . Для этого рассмотрим две схемы, нагруженные единичными силами в точках расположения сосредоточенных масс (рисунок 4.4). Построим эпюры изгибающих моментов от единичных сил и перемножим их по правилу Верещагина. В результате получим:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{3}{256} \cdot \frac{l^3}{EJ},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7}{768} \cdot \frac{l^3}{EJ}.$$

Уравнения движения масс имеют вид (4.12), а их решения описываются функциями (4.13). Подставляя эти функции в уравнение движения, и сокращая все члены на $\cos(pt + \varphi)$, получим систему уравнений относительно амплитуд колебаний (4.14), (4.15).

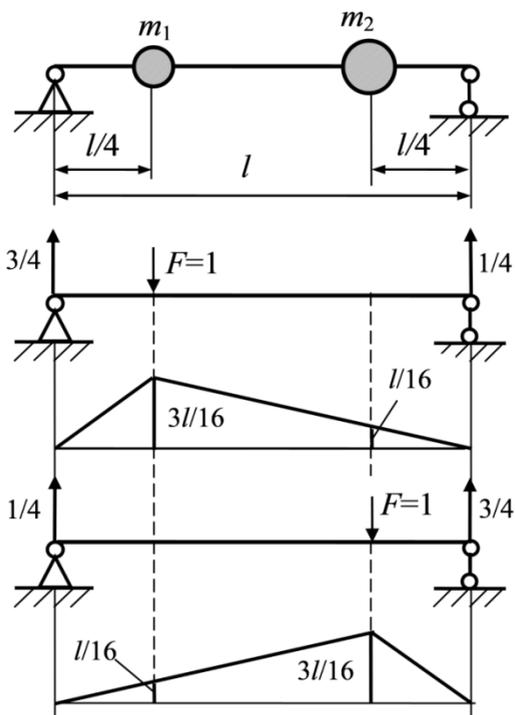


Рисунок 4.4

Введем обозначения:

$$z = \frac{mp^2 l^3}{768EJ} \quad (4.23)$$

и учитывая найденные выражения для коэффициентов влияния, перепишем уравнения (4.14), (4.15) в виде

$$(1 - 9z)u_1 - 14zu_2 = 0, \quad (4.24)$$

$$7zu_1 - (1 - 18z)u_2 = 0.$$

Составляя определитель этой системы, разворачивая его и приравнявая к нулю, получим частотное уравнение:

$$64z^2 - 27z + 1 = 0.$$

Решая это уравнение, найдем

$$z_{1,2} = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 64 \cdot 4}}{128}, \quad z_1 = 0,041, \quad z_2 = 0,381.$$

Выражая из формулы (4.23)

$$p = \sqrt{768zEJ/ml^3},$$

и подставляя в это соотношение значения z_1 и z_2 , найдем:

$$p_1 = 5,611\sqrt{EJ/ml^3},$$

$$p_2 = 17,105\sqrt{EJ/ml^3}.$$

Формы колебаний определяются из уравнения (4.24) как соотношения между амплитудами колебаний масс:

$$u_{21} = \frac{1-9z_1}{14z_1} u_{11} = 1,099u_{11},$$

$$u_{22} = \frac{1-9z_2}{14z_2} u_{12} = -0,455u_{12}.$$

Принимая $u_{11} = 1$, $u_{12} = 1$, получим формы колебаний, показанные на рисунке 4.5.

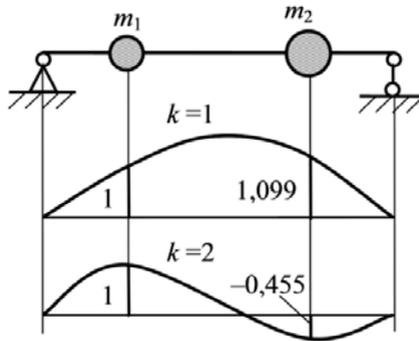


Рисунок 4.5

Проверим правильность решения. Для этого подставим найденные формы в условие ортогональности

$$m_1 u_{11} u_{12} + m_2 u_{21} u_{22} = 0.$$

В результате получим:

$$m \cdot 1 \cdot 1 + 2m \cdot 1,099 \cdot (-0,455) = 0.$$

Условие ортогональности выполняется. Следовательно, собственные частоты и формы найдены правильно.

Пример 4.3

Определить собственные частоты и формы колебаний системы, состоящей из упругой балки длиной l , на конце которой закреплен жесткий груз (рисунок 4.6 а). Масса груза m , его момент инерции I относительно оси перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через центр тяжести груза C равен $ml^2/8$. Изгибная жесткость балки EJ , масса балки пренебрежимо мала.

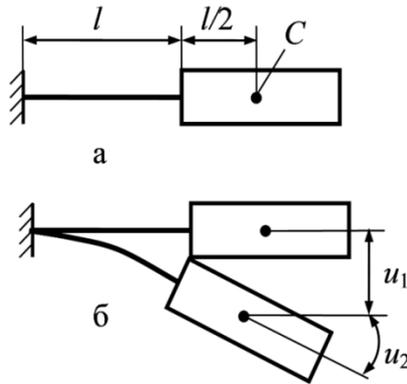


Рисунок 4.6

Решение.

Система имеет две степени свободы. При деформации балки груз может перемещаться по вертикали и поворачиваться относительно центра тяжести. Обозначим амплитудные перемещения груза по вертикали через u_1 (рисунок 4.6 б), а амплитудные значения угла поворота груза – через u_2 .

При колебаниях груза амплитудные значения силы инерции и момента сил инерции определяются формулами:

$$F = p^2 m u_1, \quad M = p^2 I u_2.$$

Уравнения движения груза запишутся через амплитудные значения перемещений в виде

$$u_1 = F \delta_{11} + M \delta_{12},$$

$$u_2 = F \delta_{21} + M \delta_{22}.$$

Для нахождения коэффициентов влияния δ_{ij} построим эпюры изгибающих моментов от действия единичных нагрузок (силы и момента) в направлении перемещений (рисунок 4.7). Перемножая эпюры по правилу Верещагина, найдем

$$\delta_{11} = \frac{13 l^3}{12 EJ}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l^2}{EJ}, \quad \delta_{22} = \frac{l}{EJ}.$$

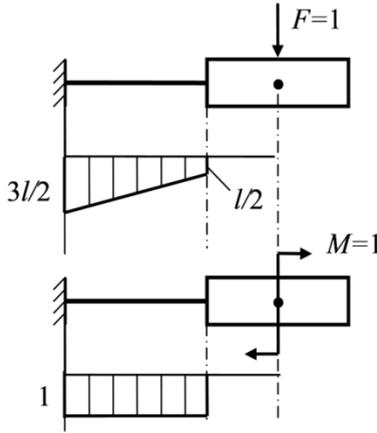


Рисунок 4.7

Подставляя эти значения в уравнения движения, и учитывая, что $I = ml^2/8$, запишем:

$$u_1 = p^2 m u_1 \frac{13 l^3}{12 EJ} + m u_2 \frac{13 l^4}{8 EJ},$$

$$u_2 = p^2 m u_1 \frac{l^2}{EJ} + m u_2 \frac{l^3}{8 EJ}.$$

Обозначая

$$z = \frac{pl^3}{24EJ},$$

перепишем уравнения движения в виде

$$(26z - 1)u_1 + 3lzu_2 = 0,$$

$$24zu_1 + (3z - 1)lu_2 = 0.$$

Составляя определитель этой системы уравнений, и приравнявая его к нулю, получим квадратное уравнение:

$$6z^2 - 29z + 1 = 0.$$

Решая это уравнение, найдем:

$$z_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{29^2 - 24}}{12}, \quad z_1 = 0,03473, \quad z_2 = 4,7986.$$

Собственные частоты определяются как

$$p_i = \sqrt{24z_i \frac{EJ}{ml^3}}, \quad i = 1, 2.$$

После подстановки в это выражение численных значений z_i , получим:

$$p_1 = 0,913\sqrt{EJ/ml^3}, \quad p_2 = 10,732\sqrt{EJ/ml^3}.$$

Для форм колебаний из первого уравнения движения запишем:

$$u_{2i} = \frac{26z_i - 1}{3lz_i} u_{1i}, \quad i = 1, 2.$$

Подставляя в это соотношение численные значения z_i , найдем:

$$u_{21} = -\frac{0,931}{l} u_{11}, \quad u_{22} = \frac{8,597}{l} u_{12}.$$

Первая форма колебаний показана на рисунке 4.8 а, а вторая – на рисунке 4.8 б, где принято $u_{11} = 1, u_{12} = 1$.

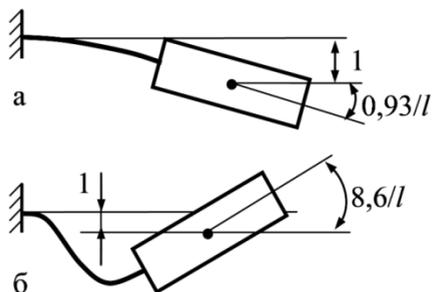


Рисунок 4.8

Для проверки правильности полученного решения подставим найденные формы колебаний в условие ортогональности (4.20):

$$m \cdot 1 \cdot 1 - \frac{ml^2}{8} \cdot \frac{0,931}{l} \cdot \frac{8,597}{l} = 0.$$

Условие ортогональности выполняется, следовательно, решение найдено правильно.

Пример 4.4

Определить собственные частоты и формы крутильных колебаний вала с двумя массами, имеющими одинаковые моменты инерции J_1 и J_2 (рисунок 4.9). Коэффициент жесткости вала c .

Решение.

Данная система имеет две степени свободы и её положение в любой момент времени описывается двумя обобщенными координатами: углами поворота масс φ_1 и φ_2 . Система цепная, поэтому целесообразно записывать её уравнения движения в прямой форме, т. е. в виде уравнений сил:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c\varphi_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - c(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0. \end{aligned}$$

Частные решения этих уравнений ищем в виде:

$$\varphi_1 = u_1 \cos(pt + \theta), \varphi_2 = u_2 \cos(pt + \theta).$$

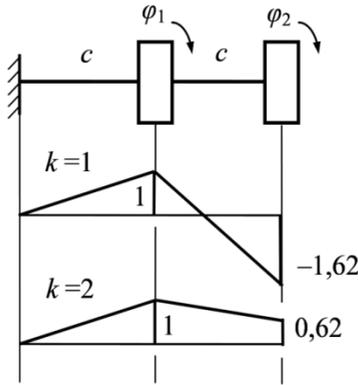


Рисунок 4.9

Подставляя эти решения в уравнения движения, и учитывая, что $J_1 = J_2 = J$, приходим к системе уравнений:

$$(Jp^2 - 2c)u_1 + cu_2 = 0,$$

$$cu_1 + (Jp^2 - c)u_2 = 0.$$

Составляя определитель этой системы, разворачивая его и приравнивая к нулю, получим частотное уравнение:

$$p^4 - \frac{3c}{J}p^2 + \frac{c^2}{J^2} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$p^2 = \frac{3c}{2J} \pm \sqrt{\frac{9c^2}{4J^2} - \frac{c^2}{J^2}} = 0,5(3 \pm \sqrt{5}) c/J,$$

откуда следует:

$$p_1 = 0,618\sqrt{c/J}, \quad p_2 = 1,618\sqrt{c/J}.$$

Соотношения между амплитудами колебаний первой и второй массы найдем из первого уравнения системы алгебраических уравнений:

$$u_{2k} = \frac{Jp_k^2 - 2c}{c} u_{1k}, \quad k = 1, 2.$$

Подставляя в эту формулу выражения для p_1 и p_2 , вычислим:

$$u_{21} = -1,618u_{11}, \quad u_{22} = 0,618u_{12}.$$

Принимая $u_{11} = 1$, $u_{12} = 1$, получим формы колебаний, показанные на рисунке 4.9. Проверим ортогональность найденных форм колебаний:

$$J(u_{11}u_{12} + u_{21}u_{22}) = J(1 \cdot 1 - 1,618 \cdot 0,618) = 0.$$

Условие ортогональности выполняется, следовательно, собственные формы и частоты колебаний найдены правильно.

4.4. Учет симметрии системы при расчете собственных форм и частот колебаний

Рассмотрим систему, состоящую из упругой балки, на которой расположены три сосредоточенные массы, как показано на рисунке 4.10. Все массы имеют одинаковую величину m . Изгибная жесткость балки EJ , а масса балки пренебрежимо мала по сравнению с сосредоточенными массами.

Определим собственные частоты и формы колебаний этой системы. Для этого запишем уравнения движения масс в амплитудных значениях перемещений:

$$u_1 = mp^2 u_1 \delta_{11} + mp^2 u_2 \delta_{12} + mp^2 u_3 \delta_{13}, \quad (4.25)$$

$$u_2 = mp^2 u_1 \delta_{21} + mp^2 u_2 \delta_{22} + mp^2 u_3 \delta_{23}, \quad (4.26)$$

$$u_3 = mp^2 u_1 \delta_{31} + mp^2 u_2 \delta_{32} + mp^2 u_3 \delta_{33}.$$

Для нахождения собственных частот необходимо составить определитель этой системы

$$\Delta = \begin{bmatrix} (mp^2 \delta_{11} - 1) & mp^2 \delta_{12} & mp^2 \delta_{13} \\ mp^2 \delta_{21} & (mp^2 \delta_{22} - 1) & mp^2 \delta_{23} \\ mp^2 \delta_{31} & mp^2 \delta_{32} & (mp^2 \delta_{33} - 1) \end{bmatrix}$$

и развернув его, приравнять к нулю. В результате получим частотное уравнение третьего порядка относительно p^2 . Решение этого уравнения можно выполнить, только зная численные значения входящих в него коэффициентов, а общее решение записать невозможно.

Задача существенно упрощается, если заметить, что система симметрична относительно плоскости, проходящей через середину балки. В этом случае можно воспользоваться свойством симметричных систем, заключающемся в том, что в системах могут возникать только симметричные и кососимметричные формы колебаний, показанные на рисунке 4.10.

При симметричных колебаниях амплитудные смещения крайних масс одинаковы, т. е. $u_3 = u_1$. Поэтому для симметричных форм уравнения (4.25), (4.26) примут вид:

$$u_1 = mp^2 u_1 (\delta_{11} + \delta_{13}) + mp^2 u_2 \delta_{12},$$

$$u_2 = mp^2 u_1 (\delta_{21} + \delta_{23}) + mp^2 u_2 \delta_{22}.$$

Для определения коэффициентов влияния необходимо рассмотреть три схемы нагружения балки единичными силами (рисунок 4.11).

Строя эпюры моментов от единичных сил и используя правило Верещагина, найдем:

$$\delta_{11} = \frac{25}{3888} \frac{l^3}{EJ}, \quad \delta_{12} = \frac{39}{3888} \frac{l^3}{EJ}, \quad \delta_{13} = \frac{17}{3888} \frac{l^3}{EJ}, \quad \delta_{22} = \frac{1}{48} \frac{l^3}{EJ},$$

$$\delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{12}, \quad \delta_{11} = \delta_{33}.$$

Обозначим:

$$z = \frac{mp^2 l^3}{3888 EJ}$$

и перепишем уравнения (4.25), (4.26) в виде

$$(42z - 1)u_1 + 39zu_2 = 0, \tag{4.27}$$

$$78zu_1 + (81z - 1)u_2 = 0.$$

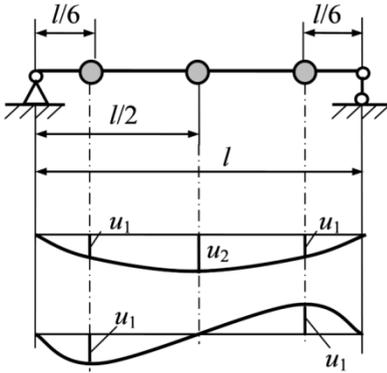


Рисунок 4.10

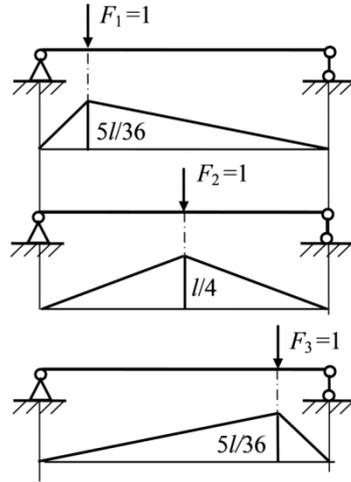


Рисунок 4.11

Составляя определитель этой системы уравнений, развертывая его и приравнявая к нулю, получим частотное уравнение:

$$360z^2 - 123z + 1 = 0.$$

Решая его, найдем: $z^* = 0,00833$, $z^{**} = 0,3496$. Здесь в индексах величины z и далее в индексах собственных частот и форм не используются порядковые номера, потому что пока неизвестно какой номер в порядке возрастания будет иметь та или иная частота и форма колебаний.

Полученным значениям z соответствуют частоты:

$$p^* = \sqrt{3888z^* EJ/ml^3} = 5,691\sqrt{EJ/ml^3},$$

$$p^{**} = \sqrt{3888z^{**} EJ/ml^3} = 36,868\sqrt{EJ/ml^3}.$$

Связь амплитудных значений перемещений масс (формы колебаний) определится из уравнения (4.27):

$$u_{2i} = \frac{(42z_i - 1)}{39z_i} u_{1i}.$$

Подставляя в эту формулу соответствующие значения z , найдем:

$$u_2^* = 2u_1^*, \quad u_2^{**} = -u_1^{**}.$$

При кососимметричной форме колебаний средняя масса неподвижна. При этом $u_2 = 0$, $u_3 = -u_1$ и из (4.25) следует:

$$u_1 = mp^2 u_1 (\delta_{11} - \delta_{13}).$$

Из этой формулы сразу находится собственная частота:

$$p^{***} = \frac{1}{\sqrt{m(\delta_{11} + \delta_{13})}}.$$

Подставляя в эту формулу соответствующие коэффициенты влияния, найдем:

$$p^{***} = \sqrt{3888EJ/8ml^3} = 22,045\sqrt{EJ/ml^3}.$$

Располагая частоты в порядке их возрастания, получим:

$$p_1 = 5,691\sqrt{EJ/ml^3}, \quad p_2 = 22,045\sqrt{EJ/ml^3},$$

$$p_3 = 36,868\sqrt{EJ/ml^3}.$$

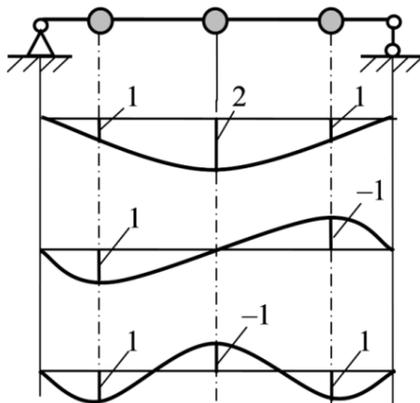


Рисунок 4.12

Формы колебаний, соответствующие этим частотам, следующие:

$$u_{21} = 2u_{11}, \quad u_{22} = 0, \quad u_{23} = -u_{13},$$

$$u_{31} = u_{11}, \quad u_{32} = -u_{12}, \quad u_{33} = u_{13}.$$

Принимая $u_{11} = u_{12} = u_{13} = 1$, получим формы колебаний, показанные на рисунке 4.12.

Проверим выполнение условия ортогональности, которое в данном случае имеет вид:

$$m(u_{11}u_{12}u_{13} + u_{21}u_{22}u_{23} + u_{31}u_{32}u_{33}) = 0.$$

Подставляя в это равенство численные значения, получим:

$$m(1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1) = 0.$$

Условие ортогональности выполняется. Следовательно, решение найдено правильно.

4.5. Приближенные методы оценки низшей собственной частоты

Метод Релея

Допустим, упругая система, состоящая из n масс, совершает собственные колебания с частотой p , причем смещение x_i массы m_i изменяется по гармоническому закону

$$x_i = u_i \sin pt,$$

где u_i – амплитуда колебаний.

При этом

$$\dot{x}_i = u_i p \cos pt.$$

Кинетическая энергия всей системы определится как

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} p^2 \cos^2 pt \sum_{i=1}^n m_i u_i^2.$$

Потенциальная энергия системы изменяется пропорционально квадратам перемещений

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 = \frac{1}{2} \sin^2 pt \sum_{i=1}^n c_i u_i^2,$$

где c_i – коэффициент жесткости.

Обозначая

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i u_i^2 = U_0,$$

где U_0 – потенциальная энергия при амплитудных перемещениях масс, запишем

$$U = U_0 \sin^2 pt.$$

Из закона сохранения энергии следует

$$T + U = U_0.$$

Подставляя в это соотношение выражения для T и U , получим:

$$\frac{1}{2} p^2 \cos^2 pt \sum_{i=1}^n m_i u_i^2 + U_0 \sin^2 pt = U_0.$$

Учитывая, что $\sin^2 pt = 1 - \cos^2 pt$, перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{1}{2} p^2 \cos^2 pt \sum_{i=1}^n m_i u_i^2 + U_0 - U_0 \cos^2 pt = U_0.$$

Сокращая левую и правую части этого равенства на U_0 и деля оставшиеся члены полученного выражения на $\cos^2 pt$, запишем:

$$\frac{1}{2} p^2 \sum_{i=1}^n m_i u_i^2 = U_0,$$

откуда следует

$$p^2 = \frac{2U_0}{\mathfrak{M}}, \quad (4.28)$$

где \mathfrak{M} – обобщенная масса системы,

$$\mathfrak{M} = \sum_{i=1}^n m_i u_i^2; \quad (4.29)$$

U_0 – потенциальная энергия деформации системы. При деформации упругой балки

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(z)}{EJ} dz, \quad (4.30)$$

где $M(z)$ – амплитудное значение изгибающего момента в сечении балки с координатой z . Так как

$$M(z) = EJ \frac{d^2 u(z)}{dz^2},$$

то выражение для потенциальной энергии может быть представлено в виде:

$$U_0 = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz. \quad (4.31)$$

Формула (4.28) называется формулой Релея. Она дает приближенное значение низшей собственной частоты с превышением. То есть действительное значение частоты всегда ниже, найденного по формуле Релея.

Очевидно, что для оценки низшей собственной частоты необходимо знать форму колебаний u . Если она неизвестна, то её можно задать в виде, не сильно отличающемся от истинной формы. Чем ближе будет задаваемая форма к истинной форме, тем меньше будет погрешность определения низшей частоты по формуле Релея. *Но следует обратить внимание на то, что задаваемая форма обязательно должна удовлетворять граничным условиям задачи.*

Рассмотрим применение метода Релея на простом примере определения частоты колебаний консольной балки длиной l , на конце которой закреплена сосредоточенная масса m (рисунок 4.13 а). Изгибная жесткость балки EJ . Масса балки пренебрежимо мала.

Вначале найдем точное решение задачи. Составим уравнение движения массы m в амплитудных значениях перемещений

$$u = m r^2 u \delta_{11}.$$

Величину δ_{11} найдем, построив эпюру изгибающих моментов от единичной силы, приложенной к концу балки (рисунок 4.13 б) и умножив площадь этой эпюры на ординату под её центром тяжести. Получим

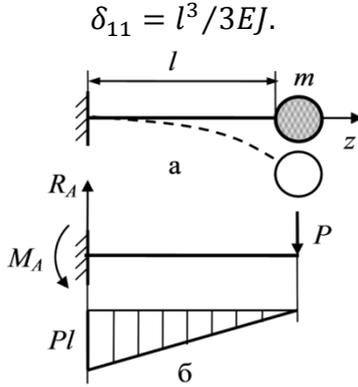


Рисунок 4.13

С учетом этого из уравнения движения найдем:

$$p^2 = \frac{3EJ}{ml^3}, \quad p = 1,732\sqrt{EJ/ml^3}. \quad (4.32)$$

Определим теперь собственную частоту приближенным методом Релея. Для этого примем, что форма колебаний в безразмерном виде описывается параболической функцией (рисунок 4.13 а):

$$u(z) = \left(\frac{z}{l}\right)^2. \quad (4.33)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям задачи, которые имеют вид:

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dz}(0) = 0, \quad \frac{d^2u}{dz^2}(0) \neq 0. \quad (4.34)$$

Дифференцируя выражение (4.33) дважды по аргументу z , и подставляя в формулу потенциальной энергии (4.31), найдем:

$$U_0 = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{2}{l^2}\right)^2 dz = \frac{2EJ}{l^3}.$$

Обобщенная масса в соответствии с формулой (4.29) равна

$$\mathfrak{M} = mu^2(l) = m.$$

Подставляя соответствующие выражения в формулу Релея (4.28) получим:

$$p^2 = 4EJ/ml^3. \quad p = 2,0\sqrt{EJ/ml^3}.$$

Это значение частоты превышает точное значение, найденное ранее, на 15 %. Это связано с погрешностью при выборе формы колебаний.

Формула Донкерли

Формула Релея дает завышенное значение низшей собственной частоты колебаний. Для того чтобы оценить диапазон, в котором находится истинное значение частоты, необходимо иметь формулу, позволяющую найти заниженное значение частоты. Такую формулу предложил Донкерли. Приведем эту формулу, не останавливаясь на её выводе:

$$p^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i \delta_{ii}}, \quad (4.35)$$

где δ_{ii} – податливость балки при приложении силы в точке закрепления массы $\delta_{ii} = u_{ii}/P$.

Чтобы воспользоваться формулой Донкерли необходимо форму колебаний записать в размерном виде. Для рассмотренного выше примера вместо (4.33) следует записать:

$$u(z) = \frac{Pl^3}{EJ} \left(\frac{z}{l}\right)^2. \quad (4.36)$$

Тогда

$$\delta_{11} = \frac{u(l)}{P} = \frac{l^3}{EJ}, \quad p^2 = \frac{EJ}{ml^3}, \quad p = \sqrt{EJ/ml^3}.$$

Напомним, что по формуле Релея было получено $p = 2\sqrt{EJ/ml^3}$. Истинное значение лежит между этими двумя значениями:

$$\sqrt{EJ/ml^3} < p < 2\sqrt{EJ/ml^3}.$$

Выбирая форму колебаний, мы принимали, что она должна удовлетворять граничным условиям, не налагая на

неё никаких других требований. Но эту форму можно уточнить, пользуясь различными методами.

Примем в качестве гипотезы, что форма колебаний повторяет упругую линию балки при её статическом нагружении. Для определения этой формы приложим к концу балки, на котором расположена масса, силу P (рисунок 4.13 б) и запишем уравнение изгибающих моментов от этой силы. Если начало оси z расположено в заделке, то

$$M(z) = M_A - R_A z.$$

Учитывая, что $M_A = M(0) = Pl$, $R_A = P$, перепишем уравнение моментов в виде

$$M(z) = P(l - z). \quad (4.37)$$

Но

$$M(z) = EJ \frac{d^2 u}{dz^2}.$$

Приравнявая два последних выражения, запишем:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{P}{EJ} (l - z).$$

Интегрируя это выражение дважды по аргументу z , получим:

$$\frac{du}{dz} = \frac{P}{EJ} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right) + C_1, \quad u = \frac{P}{EJ} \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + C_1 z + C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из граничных условий (4.34). Они равны нулю. Следовательно, форма колебаний имеет вид:

$$u = \frac{Pl^3}{2EJ} \left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{z^3}{3l^3} \right). \quad (4.38)$$

Подставляя эту форму в выражение для приведенной массы (4.29), получим:

$$\mathfrak{M} = mu^2(l) = \frac{mP^2 l^6}{9(EJ)^2}. \quad (4.39)$$

Потенциальную энергию деформации в данном случае проще найти через функцию изгибающих моментов (4.37). Подставляя её в формулу (4.30), получим:

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{P^2(l-z)^2}{EJ} dz = \frac{P^2 l^3}{6EJ}. \quad (4.40)$$

Собственная частота колебаний системы, найденная по формуле (4.28), с учетом выражений (4.39), (4.40) равна

$$p^2 = 3EJ/ml^3, \quad p = 1,732\sqrt{EJ/ml^3}.$$

Мы получили точное значение частоты колебаний (4.32).

Проведем теперь расчет по формуле Донкерли для уточненной формы колебаний (4.38):

$$\delta_{11} = \frac{u(l)}{P} = \frac{l^3}{3EJ}, \quad p^2 = \frac{3EJ}{ml^3}, \quad p = 1,732\sqrt{EJ/ml^3}.$$

При уточненной форме оба приближенных метода дают один и тот же результат, который к тому же совпадает с точным результатом. Это связано с тем, что при уточнении мы получили истинную форму колебаний.

Пример 4.5

Определить приближенными методами низшую частоту колебаний шарнирно опертой балки длиной l , несущей две сосредоточенные массы m_1 и m_2 различной величины (рисунок 4.14). При этом $m_1 = m$, $m_2 = 2m$. Изгибная жесткость балки EJ , масса балки пренебрежимо мала.

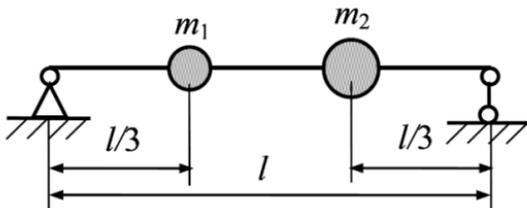


Рисунок 4.14

Решение.

Примем, что низшая форма колебаний имеет вид

$$u(z) = \frac{Pl^3}{EJ} \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (4.41)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям задачи:

$$u(0) = 0, \quad \frac{d^2u}{dz^2}(0) = 0, \quad u(l) = 0, \quad \frac{d^2u}{dz^2}(l) = 0,$$

и примерно описывает упругую линию балки. В реальной упругой линии из-за различий в величинах масс экстремум функции $u(z)$ смещен в сторону большей массы.

Дифференцируя функцию (4.41) дважды, и подставляя в уравнение потенциальной энергии (4.31), запишем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dz^2} &= -\frac{Pl\pi^2}{EJ} \sin \frac{\pi z}{l}, \\ U_0 &= \frac{P^2 l^2 \pi^4}{2(EJ)^2} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = \frac{P^2 l^2 \pi^4}{4(EJ)^2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{l}\right) dz = \\ &= \frac{P^2 l^3 \pi^4}{4(EJ)^2}. \end{aligned}$$

Обобщенная масса системы определится как

$$\mathfrak{M} = m_1 u^2(l/3) + m_2 u^2(2l/3).$$

Подставляя в эту формулу выражение (4.41) и учитывая величины масс, найдем:

$$\mathfrak{M} = \frac{P^2 l^6}{(EJ)^2} (0,75m + 1,5m) = \frac{2,25mP^2 l^6}{(EJ)^2}.$$

Используя формулу Релея (4.28), вычислим:

$$p^2 = \frac{2\pi^4 EJ}{9ml^3}, \quad p = 4,652\sqrt{EJ/ml^3}.$$

Это завышенное значение низшей частоты. Найдем теперь заниженное значение, используя формулу Донкерли.

Из (4.41) следует

$$\delta_1 = \frac{u(l/3)}{P} = \frac{0,866l^3}{EJ}, \quad \delta_2 = \frac{u(2l/3)}{P} = \frac{0,866l^3}{EJ}.$$

Подставляя эти выражения в формулу Донкерли (4.35), получим:

$$p^2 = \frac{EJ}{2,598ml^3}, \quad p = 0,620\sqrt{EJ/ml^3}.$$

Таким образом, можно утверждать, что истинное значение низшей частоты лежит в диапазоне

$$0,620\sqrt{EJ/ml^3} < p < 4,652\sqrt{EJ/ml^3}.$$

Этот диапазон достаточно велик, но расчеты показывают, что точное значение низшей частоты $p = 4,629\sqrt{EJ/ml^3}$ отличается от найденного по формуле Релея всего на 0,5 %. Следовательно, форма колебаний была подобрана удачно.

Метод Граммеля

В методе Граммеля для повышения точности определения низшей частоты дифференцирование амплитудной функции $u(z)$ заменяется интегрированием. Последовательность расчета этим методом следующая.

1. Задают форму колебаний $u(z)$ как и в методе Релея.
2. Определяют максимальную кинетическую энергию системы.

Так как

$$x_i = u_i \cos pt, \quad \dot{x}_i = -pu_i \sin pt,$$

то

$$T_{max} = \frac{1}{2}p^2 \sum_{i=1}^n m_i u_i^2.$$

3. Определяют максимальные силы инерции масс:
 $F_i = p^2 m_i u_i.$
4. Определяют внутренние силы в элементах системы, вызываемые нагрузкой $F_i.$
5. По внутренним силам вычисляют максимальную потенциальную энергию деформации $U_0.$
6. Из равенства $T_{max} = U_0$ находят частоту колебаний.

Пример 4.6

Определим частоту колебаний консольной балки с грузом, показанной на рисунке 4.13.

1. Примем низшую собственную форму в виде

$$u = \frac{Pl^3}{EJ} \left(\frac{z}{l}\right)^2.$$

2. Вычислим максимальную кинетическую энергию системы:

$$T_{max} = \frac{1}{2} p^2 m u^2(l) = \frac{p^2 m}{2} \frac{P^2 l^6}{(EJ)^2}.$$

3. Определим максимальную силу инерции массы:

$$F = p^2 m u(l) = \frac{p^2 m P l^3}{EJ}.$$

4. Определим изгибающий момент в сечениях балки, вызываемый силой инерции F :

$$M(z) = F(l - z) = \frac{p^2 m P l^3}{EJ} (l - z).$$

5. Вычислим максимальную потенциальную энергию деформации:

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(z)}{EJ} dz = \frac{p^4 m^2 P^2 l^6}{2(EJ)^3} \int_0^l (l - z)^2 dz = \frac{p^4 m^2 P^2 l^9}{6(EJ)^3}.$$

6. Приравнявая максимальные значения кинетической и потенциальной энергии, находим частоту колебаний:

$$\frac{p^2 m}{2} \frac{P^2 l^6}{(EJ)^2} = \frac{p^4 m^2 P^2 l^9}{6(EJ)^3},$$

$$p^2 = \frac{3EJ}{ml^3}, \quad p = 1,732 \sqrt{EJ/ml^3}.$$

Сравнивая этот результат с предыдущим результатом решения данной задачи методом Релея, можно видеть, что метод Граммеля при такой же приближенной форме колебаний, как и в методе Релея, дает более точный результат.

4.6. Главные координаты системы. Разложение движения системы по собственным формам колебаний

До сих пор движение всех масс системы описывалось формулами

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^n C_k u_{ik} \cos(p_k t + \varphi_k),$$

где u_{ik} – k -ая форма колебаний, записанная в безразмерном виде, и зависящая только от координаты i -ой массы; p_k , φ_k – соответственно частота и начальная фаза, соответствующие k -ой форме колебаний; C_k – постоянные, определяемые из начальных условий задачи.

Введем новые координаты $q_k(t)$, зависящие только от времени, при которых выполняются соотношения:

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^n u_{ik} q_k(t). \quad (4.42)$$

Координаты $q_k(t)$ называются *главными координатами* системы. Они позволяют разложить движение системы по собственным формам колебаний, т. е. представить решение уравнения движения как сумму решений для каждой формы колебаний.

Выразим главные координаты $q_k(t)$ через старые физические координаты $x_i(t)$. Для этого распишем систему уравнений (4.42):

$$x_1 = u_{11}q_1 + u_{12}q_2 + u_{13}q_3 + \dots + u_{1n}q_n,$$

$$x_2 = u_{21}q_1 + u_{22}q_2 + u_{23}q_3 + \dots + u_{2n}q_n,$$

.....

$$x_n = u_{n1}q_1 + u_{n2}q_2 + u_{n3}q_3 + \dots + u_{nn}q_n.$$

Умножим первое уравнение этой системы на $m_1 u_{1k}$, второе уравнение на $m_2 u_{2k}$, третье уравнение на $m_3 u_{3k}$ и т.д., последнее уравнение на $m_n u_{nk}$:

$$m_1 u_{1k} x_1 = m_1 u_{1k} u_{11} q_1 + m_1 u_{1k} u_{12} q_2 + \dots + \\ + m_1 u_{1k} u_{1n} q_n,$$

$$m_2 u_{2k} x_2 = m_2 u_{2k} u_{21} q_1 + m_2 u_{2k} u_{22} q_2 + \dots +$$

$$+ m_2 u_{2k} u_{2n} q_n,$$

.....

$$m_n u_{nk} x_n = m_n u_{nk} u_{n1} q_1 + m_n u_{nk} u_{n2} q_2 + \dots +$$

$$+ m_n u_{nk} u_{nn} q_n.$$

Сложив почленно левые и правые части этих уравнений, запишем:

$$\sum_{i=1}^n m_i u_{ik} x_i = q_1 \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} u_{i1} + q_2 \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} u_{i2} +$$

$$+ \dots + q_n \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} u_{in}.$$

В соответствии со свойством ортогональности собственных форм (4.20) все суммы в правой части последнего уравнения, для которых номера форм неодинаковы ($r \neq k$), равны нулю и остается сумма, в которой $r = k$;

$$\sum_{i=1}^n m_i u_{ik} x_i = q_k \sum_{i=1}^n m_i u_{ik}^2.$$

Отсюда следует:

$$q_k = \frac{1}{\mathfrak{M}_k} \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} x_i, \quad (4.43)$$

где \mathfrak{M}_k – обобщенная масса системы при k -ой форме колебаний

$$\mathfrak{M}_k = \sum_{i=1}^n m_i u_{ik}^2. \quad (4.44)$$

Удобство использования главных координат заключается в том, что при известных собственных формах и частотах колебаний u_{ik} , p_k и известном законе изменения вынуждающей силы $P(t)$ они могут быть найдены из простого дифференциального уравнения:

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{Q_k(t)}{\mathfrak{M}_k}, \quad (4.45)$$

где $Q_k(t)$ – обобщенная сила, определяемая по формуле:

$$Q_k(t) = \sum_{i=1}^n P_i(t) u_{ik}. \quad (4.46)$$

Вывод уравнения (4.45) приводится ниже.

Если система совершает свободные колебания, то правая часть уравнения (4.45) равна нулю и решение этого уравнения имеет вид

$$q_k(t) = C_k \cos(p_k t + \varphi_k).$$

Постоянные C_k и φ_k находятся из начальных условий. При $t = 0$ имеем: $q_k(0) = C_k \cos \varphi_k$, $\dot{q}_k(0) = -C_k p_k \sin \varphi_k$.

Подставляя эти выражения в левую часть соотношений (4.43), запишем:

$$C_k \cos \varphi_k = \frac{1}{\mathfrak{M}_k} \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} x_i(0),$$

$$-C_k \sin \varphi_k = \frac{1}{p_k \mathfrak{M}_k} \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} \dot{x}_i(0).$$

Возводя левую и правую части этих уравнений в квадрат и складывая их, получим:

$$C_k = \frac{1}{p_k \mathfrak{M}_k} \times$$

$$\times \sqrt{p_k^2 (\sum_{i=1}^n m_i u_{ik} x_i(0))^2 + (\sum_{i=1}^n m_i u_{ik} \dot{x}_i(0))^2}. \quad (4.47)$$

Из этой же системы уравнений следует:

$$\cos \varphi_k = \frac{1}{C_k \mathfrak{M}_k} \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} x_i(0), \quad (4.48)$$

$$\sin \varphi_k = -\frac{1}{C_k p_k \mathfrak{M}_k} \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} \dot{x}_i(0).$$

4.7. Выражение кинетической и потенциальной энергии через главные координаты

Кинетическая энергия системы выражается через её физические координаты формулой

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i^2.$$

Из определения главной координаты следует:

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^n u_{ik} q_k, \quad \dot{x}_i(t) = \sum_{k=1}^n u_{ik} \dot{q}_k.$$

Распишем последнее выражение:

$$\dot{x}_i(t) = u_{i1}\dot{q}_1 + u_{i2}\dot{q}_2 + u_{i3}\dot{q}_3 + \dots + u_{ik}\dot{q}_k + \dots + u_{in}\dot{q}_n.$$

При возведении этого выражения в квадрат, умножения на массу m_i и последующего суммирования по i , сумма всех членов, содержащих произведения $m_i u_{ik} u_{ir} \dot{q}_k \dot{q}_r$, в силу условия ортогональности собственных форм будет равна нулю. При этом останутся только члены, в которых $k = r$. Тогда уравнение кинетической энергии примет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \dot{q}_k^2 \sum_{i=1}^n m_i u_{ik}^2.$$

Но

$$\sum_{i=1}^n m_i u_{ik}^2 = \mathfrak{M}_k,$$

и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathfrak{M}_k \dot{q}_k^2. \quad (4.49)$$

Последняя формула показывает, что кинетическая энергия системы, совершающей произвольное движение, равна сумме кинетических энергий, соответствующих каждой из главных координат.

Можно показать, что потенциальная энергия системы выражается через главные координаты зависимостью

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathfrak{M}_k p_k^2 q_k^2, \quad (4.50)$$

т. е. потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий, соответствующих каждой из главных координат.

Таким образом, главные координаты позволяют получить простые формулы для определения кинетической и потенциальной энергий системы.

Воспользовавшись этими формулами можно вывести уравнение (4.45) для определения главных координат.

Для каждой главной координаты можно составить уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k(t),$$

где T – кинетическая энергия системы; U – потенциальная энергия системы; $Q_k(t)$ – обобщенная сила.

Обобщенная сила представляет собой виртуальную работу (работу сил на возможных перемещениях их точек приложения) всех возмущающих сил на единичном изменении координаты q_k и определяется по формуле (4.46):

$$Q_k(t) = \sum_{i=1}^n P_i(t) u_{ik},$$

где $P_i(t)$ – возмущающая сила, действующая в направлении перемещения x_i .

Кинетическая и потенциальная энергии системы, выраженные через главные координаты, описываются соотношениями (4.49), (4.50):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathfrak{M}_k \dot{q}_k^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathfrak{M}_k p_k^2 q_k^2.$$

Дифференцируя эти соотношения в соответствии с требованиями уравнения Лагранжа, запишем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\mathfrak{M}_1 \dot{q}_1^2 + \mathfrak{M}_2 \dot{q}_2^2 + \dots + \mathfrak{M}_k \dot{q}_k^2 + \dots) = \\ &= \mathfrak{M}_k \dot{q}_k, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \mathfrak{M}_k \ddot{q}_k,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_k} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial q_k} (\mathfrak{M}_1 p_1^2 q_1^2 + \mathfrak{M}_2 p_2^2 q_2^2 + \dots + \mathfrak{M}_k p_k^2 q_k^2 + \\ &+ \dots) = \mathfrak{M}_k p_k^2 q_k. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение Лагранжа, и сокращая все члены на \mathfrak{M}_k , получим уравнение (4.45):

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{Q_k(t)}{\mathfrak{M}_k}.$$

Таким образом, каждая главная координата q_k определяется независимым от других координат дифференциальным уравнением, которое по форме совпадает с уравнени-

ем вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы, имеющей массу \mathfrak{M}_k и собственную частоту p_k .

Главные координаты позволяют разложить по собственным формам колебаний не только перемещения точек системы, но и внутренние силовые факторы.

Так как

$$M(z, t) = EJ \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}, \quad (4.51)$$

а перемещение сечения с координатой z описывается через главную координату выражением

$$x(z, t) = \sum_{k=1}^n u_k(z) q_k(t),$$

то подставляя это выражение в формулу (4.51), получим:

$$M(z, t) = \sum_{k=1}^n EJ \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} q_k(t) = \sum_{k=1}^n M_k(z) q_k(t), \quad (4.52)$$

где $M_k(z)$ – амплитудное значение изгибающего момента при k -ой форме колебаний.

Аналогично

$$Q(z, t) = \sum_{k=1}^n EJ \frac{\partial^3 u_k}{\partial z^3} q_k(t) = \sum_{k=1}^n Q_k(z) q_k(t), \quad (4.53)$$

$Q_k(z)$ – амплитудное значение поперечной силы при k -ой форме колебаний.

Пример 4.7

Для рамы, составленной из стержней с одинаковой изгибной жесткостью EJ и несущей сосредоточенный груз массой m (рисунок 4.15), требуется определить закон движения груза в процессе свободных колебаний, построить траекторию его движения и найти максимальные отклонения груза от положения равновесия. Найти максимальный изгибающий момент в заделке рамы. Длина короткого стержня l , длинного – $2l$. Собственной массой стержней пренебречь. При определении законов движения груза использовать метод главных координат.

В начальный момент времени за счет удара грузу сообщается вертикальная скорость V .

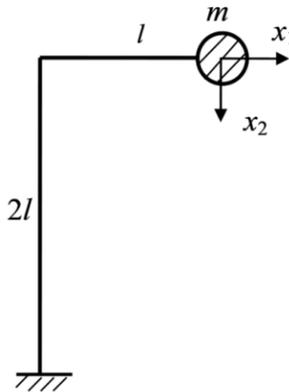


Рисунок 4.15

Решение.

Решение задачи начинается с определения собственных частот и форм колебаний груза.

Груз имеет две степени свободы и его положение в любой момент времени можно определить двумя обобщенными координатами x_1 и x_2 . Поскольку связи системы голономны, то её движение будет описываться двумя уравнениями. Запишем эти уравнения в обратной форме через перемещения груза:

$$x_1(t) = F_{u1}\delta_{11} + F_{u2}\delta_{12}, \quad (4.54)$$

$$x_2(t) = F_{u1}\delta_{21} + F_{u2}\delta_{22}, \quad (4.55)$$

где F_{u1} , F_{u2} – силы инерции, действующие на груз соответственно в направлении координат x_1 и x_2 , и равные:

$$F_{u1} = -m\ddot{x}_1, \quad F_{u2} = -m\ddot{x}_2; \quad (4.56)$$

δ_{ij} – коэффициенты влияния, аналогичные коэффициентам влияния в расчетах балок при действии статической нагрузки.

Примем, что свободные колебания груза происходят по гармоническому закону и, следовательно, решение уравнений движения (4.54), (4.55) можно записать в виде:

$$x_1(t) = u_1 \cos pt, \quad x_2(t) = u_2 \cos pt, \quad (4.57)$$

где u_1, u_2 – амплитудные значения перемещений; p – собственная частота колебаний; t – время.

Тогда выражения (4.56) для сил инерции запишутся в виде:

$$F_{u1} = mp^2 u_1 \cos pt, \quad F_{u2} = mp^2 u_2 \cos pt. \quad (4.58)$$

Подставляя решения (4.57) и выражения (4.58) в уравнения движения (4.54), (4.55), и сокращая все члены этих уравнений на $\cos pt$, получим систему уравнений относительно амплитудных значений u_1 и u_2 :

$$u_1 = mp^2 u_1 \delta_{11} + mp^2 u_2 \delta_{12}, \quad (4.59)$$

$$u_2 = mp^2 u_1 \delta_{21} + mp^2 u_2 \delta_{22}. \quad (4.60)$$

Вычислим коэффициенты влияния δ_{ij} . Для этого приложим к грузу в направлении обобщенных координат единичные силы \bar{F}_1, \bar{F}_2 , и построим эпюры изгибающих моментов от этих сил (рисунок 4.16).

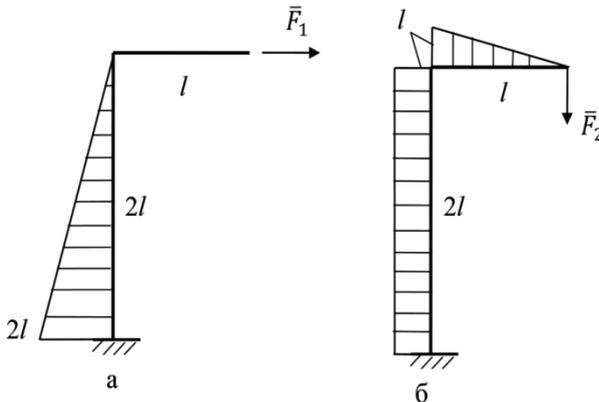


Рисунок 4.16

Определяя площади этих эпюр и умножая их на соответствующие координаты под центрами тяжести, найдем:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left[2l^2 \cdot \frac{4l}{3} \right] = \frac{8l^3}{3EJ}, \quad \delta_{22} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{l^2}{2} \cdot \frac{2l}{3} + 2l^2 \cdot l \right] = \frac{7l^3}{3EJ},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ} [2l^2 \cdot l] = \frac{2l^3}{EJ}.$$

Обозначая для упрощения записи

$$z = \frac{mp^2 l^3}{3EJ}, \quad (4.61)$$

перепишем уравнения (4.59), (4.60) в виде:

$$(1 - 8z)u_1 - 6zu_2 = 0, \quad (4.62)$$

$$6zu_1 - (1 - 7z)u_2 = 0.$$

Составляя определитель этой системы, разворачивая его и приравнявая к нулю, получим частотное уравнение:

$$20z^2 - 15z + 1 = 0.$$

Решая это уравнение, найдем:

$$z_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 80}}{40}, \quad z_1 = 0,074; \quad z_2 = 0,676.$$

Собственные частоты находятся из соотношения (4.61) как

$$p_i = \sqrt{3z_i EJ/ml^3}, \quad i = 1, 2.$$

После подстановки в эту формулу численных значений z_i , получим:

$$p_1 = 0,471\sqrt{EJ/ml^3}, \quad p_2 = 1,424\sqrt{EJ/ml^3}.$$

Собственные формы колебаний находятся из уравнений (4.62). Например, из первого уравнения следует:

$$u_{21} = \frac{1-8z_1}{6z_1} u_{11}, \quad u_{22} = \frac{1-8z_2}{6z_2} u_{12}.$$

Подставляя в эти соотношения значения z_1, z_2 и принимая $u_{11} = 1, u_{12} = 1$, найдем: $u_{21} = 0,920, u_{22} = -1,087$.

Проверим условие ортогональности собственных форм колебаний, которое записывается в виде:

$$m(u_{11}u_{12} + u_{21}u_{22}) = 0.$$

Подставляя в него найденные значения форм колебаний, получим:

$$m[1 \cdot 1 + 0,920 \cdot (-1,087)] = 0.$$

Условие ортогональности выполняется и, следовательно, формы найдены правильно.

Найдя собственные формы и частоты колебаний можно записать закон движения груза через главные координаты.

Решение уравнений движения в главных координатах для i -ой физической координаты записывается в виде:

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^n u_{ik} q_k(t),$$

где k – номер формы колебаний; $q_k(t)$ – главная координата при k -ой форме колебаний, зависящая только от времени. Эта координата находится из дифференциального уравнения (4.45).

Для рассматриваемого примера координаты x_1 и x_2 выражаются через главные координаты следующим образом:

$$x_1(t) = u_{11}q_1(t) + u_{12}q_2(t), \quad (4.63)$$

$$x_2(t) = u_{21}q_1(t) + u_{22}q_2(t), \quad (4.64)$$

а главные координаты при свободных колебаниях, когда обобщенная сила равна нулю, находятся из уравнений:

$$\ddot{q}_1 + p_1^2 q_1 = 0, \quad \ddot{q}_2 + p_2^2 q_2 = 0.$$

Решение этих уравнений имеет вид:

$$q_1(t) = A_1 \sin p_1 t + A_2 \cos p_1 t,$$

$$q_2(t) = B_1 \sin p_2 t + B_2 \cos p_2 t, \quad (4.65)$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Запишем начальные условия через главные координаты. Главные координаты связаны с физическими координатами соотношениями (4.43)

$$q_k(t) = \frac{1}{\mathfrak{M}_k} \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} x_i; \quad \dot{q}_k(t) = \frac{1}{\mathfrak{M}_k} \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} \dot{x}_i. \quad (4.66)$$

Для рассматриваемой задачи начальные условия в физических координатах имеют вид:

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = V.$$

Вычислим обобщенные массы (4.44):

$$\mathfrak{M}_1 = m(u_{11}^2 + u_{21}^2) = m(1^2 + 0,920^2) = 1,846m,$$

$$\mathfrak{M}_2 = m(u_{12}^2 + u_{22}^2) = m(1^2 + 1,087^2) = 2,181m.$$

Подставляя численные значения величин в соотношения (4.66), получим:

$$q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 0,$$

$$\dot{q}_1(0) = \frac{1}{1,846} (1 \cdot 0 + 0,920 \cdot V) = 0,498V,$$

$$\dot{q}_2(0) = \frac{1}{2,181} (1 \cdot 0 - 1,087 \cdot V) = -0,498V.$$

Соотношения между начальными условиями для физических и главных координат можно получить и из уравнений (4.63), (4.64). Решая эти уравнения относительно q_1 и q_2 , получим:

$$q_1(t) = \frac{u_{22}x_1(t) - u_{12}x_2(t)}{u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}}, \quad q_2(t) = \frac{u_{11}x_2(t) - u_{21}x_1(t)}{u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}}, \quad (4.67)$$

$$\dot{q}_1(t) = \frac{u_{22}\dot{x}_1(t) - u_{12}\dot{x}_2(t)}{u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}}, \quad \dot{q}_2(t) = \frac{u_{11}\dot{x}_2(t) - u_{21}\dot{x}_1(t)}{u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}}. \quad (4.68)$$

Подстановка в эти соотношения численных значений амплитудных функций и начальных перемещений и скоростей груза, приводит к тем же результатам, что и с использованием формул (4.66). Но этот подход выгодно отличается от предыдущего тем, что он не требует определения обобщенных масс.

Подставляя выражения (4.65) в начальные условия, найдем:

$$A_2 = B_2 = 0, \quad A_1 = \frac{0,498V}{p_1}, \quad B_1 = -\frac{0,498V}{p_2}.$$

С учетом этого главные координаты (4.65) запишутся в виде:

$$q_1(t) = \frac{0,498V}{p_1} \sin p_1 t, \quad q_2(t) = -\frac{0,498V}{p_2} \sin p_2 t, \quad (4.69)$$

а законы движения груза (4.63), (4.64) будут описываться функциями:

$$x_1(t) = \frac{0,498V}{p_1} (\sin p_1 t - \frac{p_1}{p_2} \sin p_2 t),$$

$$x_2(t) = \frac{0,498V}{p_1} (0,920 \sin p_1 t + \frac{1,087p_1}{p_2} \sin p_2 t).$$

Учитывая, что в рассматриваемом примере $p_1/p_2 = 0,331$ эти функции можно записать в виде:

$$x_1(t) = \frac{0,498V}{p_1} (\sin p_1 t - 0,331 \sin p_2 t), \quad (4.70)$$

$$x_2(t) = \frac{0,458V}{p_1} (\sin p_1 t + 0,392 \sin p_2 t). \quad (4.71)$$

Изменяя в этих функциях значения времени с определенным шагом можно построить графики зависимости $x_1(t)$, $x_2(t)$. Например, при заданных исходных данных:

$$J = 17,18 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \quad EJ = 36080 \text{ Нм}^2, \quad l = 1 \text{ м}, \quad m = 50 \text{ кг},$$

получим:

$$p_1 = 12,66 \text{ с}^{-1}, \quad p_2 = 38,28 \text{ с}^{-1},$$

и формулы (4.70), (4.71) принимают вид:

$$x_1(t) = 0,0393 (\sin 12,66t - 0,331 \sin 38,28t), \quad (4.72)$$

$$x_2(t) = 0,0362 (\sin 12,66t + 0,392 \sin 38,28t). \quad (4.73)$$

Графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, построенные по этим формулам, показаны на рисунке 4.17.

Исключая из этих графиков время, можно построить траекторию движения груза $x_1(x_2)$, которая показана на рисунке 4.18.

При принятых исходных данных наибольшее отклонение груза от положения статического равновесия в направ-

лении координаты x_1 составляет ± 52 мм, а в направлении координаты x_2 равно ± 37 мм.

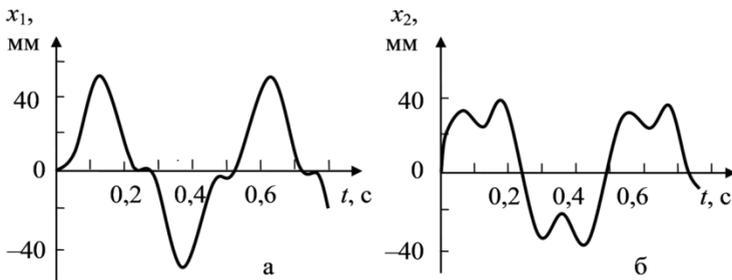


Рисунок 4.17

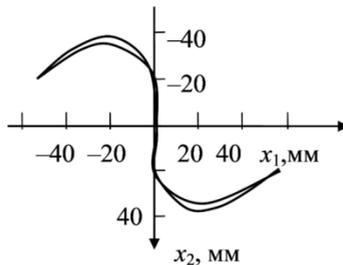


Рисунок 4.18

Для построения эпюры изгибающего момента необходимо найти силы инерции, действующие на груз при различных формах колебаний, и приложить их к грузу в соответствующих направлениях.

Силы инерции находятся из соотношений:

$$F_{11} = mp_1^2 u_{11} = 0,222 EJ/l^3,$$

$$F_{21} = mp_1^2 u_{21} = 0,204 EJ/l^3,$$

$$F_{12} = mp_2^2 u_{12} = 2,028 EJ/l^3,$$

$$F_{22} = mp_2^2 u_{22} = -2,204 EJ/l^3.$$

Прикладывая эти силы к грузу, построим эпюры изгибающих моментов при первой форме колебаний (рисунок 4.19 а) и при второй форме (рисунок 4.19 б).

Зная амплитудные значения изгибающих моментов в сечениях стержней и главные координаты, можно записать функции изменения изгибающего момента от времени:

$$M(t) = M_1 q_1(t) + M_2 q_2(t), \quad (4.74)$$

где M_1, M_2 – амплитудные значения изгибающих моментов в рассматриваемом сечении соответственно для первой и второй формы колебаний.

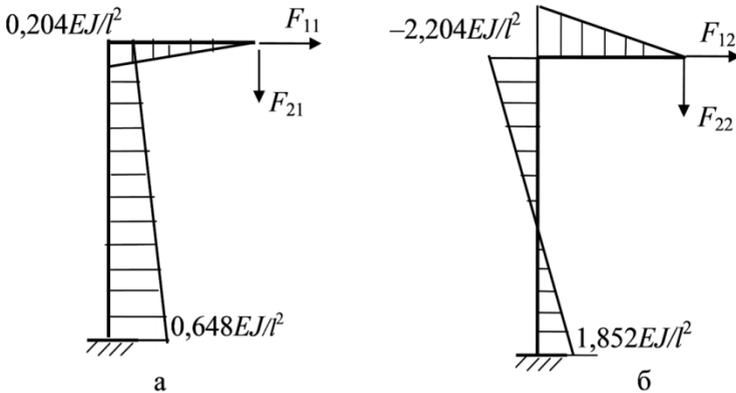


Рисунок 4.19

Для заделки рамы зависимость момента от времени в соответствии с формулой (4.74) и рисунком 4.19 будет выражаться функцией:

$$M(t) = \left[0,648 \cdot \frac{0,498V}{p_1} \sin p_1 t - 1,852 \frac{0,498V}{p_2} \sin p_2 t \right] \frac{EJ}{l^2}.$$

После подстановки численных значений p_1, p_2, V эта формула приводится к виду:

$$M(t) = 0,0255 [\sin p_1 t - 0,945 \sin p_2 t] \frac{EJ}{l^2}. \quad (4.75)$$

Поскольку собственные частоты отличаются друг от друга значительно (в три раза), то в некоторый момент времени амплитуды различных форм колебаний сложатся. Тогда максимальная амплитуда изгибающего момента в заделке определится как:

$$M_{max} = 0,0255 \cdot 1,945 \cdot \frac{EJ}{l^2} = 0,0496 \frac{EJ}{l^2} \text{ (Нм)}.$$

В заключение обсуждения этой задачи обратим внимание на силы инерции. Их численные значения составляют:

$$F_{11} = 8010 \text{ Н}, \quad F_{21} = 7360 \text{ Н},$$

$$F_{12} = 73170 \text{ Н}, \quad F_{22} = 79520 \text{ Н}.$$

Силы инерции при первой форме колебаний превышают силы тяжести груза в 15–16 раз, а при второй форме колебаний превышают силы тяжести груза в 146–160 раз, достигая почти 8 тонн.

Это свидетельствует о важности учета в расчетах на прочность динамических нагрузок, возникающих в системе при её колебаниях.

4.8. Вынужденные колебания систем с конечным числом степеней свободы.

Метод главных координат

Если на систему действуют возмущающие силы, произвольным образом зависящие от времени, то решение уравнения движения системы также можно разложить по собственным формам колебаний и представить его в виде:

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^n u_{ik} q_k(t),$$

где $q_k(t)$ – главная координата, учитывающая законы изменения вынуждающих сил.

Рассмотрим использование метода главных координат на примере системы, показанной на рисунке 4.20, в которой все сосредоточенные массы имеют одинаковую вели-

чину m . Собственные частоты и формы колебаний этой системы были определены в разделе 4.4 данного пособия.

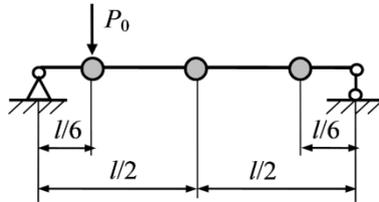


Рисунок 4.20

Напомним, что собственные частоты этой системы:

$$p_1 = 5,691\sqrt{EJ/ml^3},$$

$$p_2 = 22,045\sqrt{EJ/ml^3},$$

$$p_3 = 36,868\sqrt{EJ/ml^3},$$

а формы колебаний:

$$u_{21} = 2, \quad u_{22} = 0, \quad u_{23} = -1,$$

$$u_{31} = 1, \quad u_{32} = -1, \quad u_{33} = 1.$$

Продолжим эту задачу, определив законы движения масс и изгибающие моменты в балке, если к первой массе внезапно приложена сила P_0 , которая в дальнейшем остается неизменной.

Для составления дифференциальных уравнений, определяющих главные координаты, вычислим вначале обобщенные массы и обобщенные силы.

В соответствии с формулой (4.29) обобщенные массы для каждой формы колебаний определяются как:

$$\mathfrak{M}_1 = m(1^2 + 2^2 + 1^2) = 6m,$$

$$\mathfrak{M}_2 = m(1^2 + 0^2 + 1^2) = 2m,$$

$$\mathfrak{M}_3 = m(1^2 + 1^2 + 1^2) = 3m.$$

Поскольку сила действует только на первую массу и соответственно $P_1 = P_0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, то обобщенные силы для различных форм колебаний будут иметь величину:

$$Q_1 = P_0 u_{11} = P_0, \quad Q_2 = P_0 u_{12} = P_0, \quad Q_3 = P_0 u_{13} = P_0.$$

Подставляя обобщенные массы и обобщенные силы в уравнение (4.45), получим:

$$\ddot{q}_1 + p_1^2 q_1 = \frac{P_0}{6m},$$

$$\ddot{q}_2 + p_2^2 q_2 = \frac{P_0}{2m},$$

$$\ddot{q}_3 + p_3^2 q_3 = \frac{P_0}{3m}.$$

Это неоднородные дифференциальные уравнения, решение которых состоит из суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. При этом вид общего решения определяется корнями характеристического уравнения, а частное решение принимается в таком же виде, как и правая часть уравнения. В данном случае корни характеристического уравнения мнимые и общее решение однородного уравнения записывается в виде тригонометрических функций. Частное решение записывается в виде постоянной величины, подстановка которой в левую часть уравнения приводит к тождеству.

С учетом сказанного, решением этих уравнений в общем виде являются функции:

$$q_k = A_{1k} \cos p_k t + A_{2k} \sin p_k t + \frac{P_0}{\omega_k p_k^2}.$$

Постоянные интегрирования A_{1k} , A_{2k} находятся из начальных условий, которые в данной задаче имеют вид:

$$x_k(0) = 0, \quad \dot{x}_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Начальные условия в главных координатах определяются из связей главных координат с физическими

$$q_k(0) = \frac{1}{\mathfrak{M}_k} \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} x_i(0),$$

$$\dot{q}_k(0) = \frac{1}{\mathfrak{M}_k} \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} \dot{x}_i(0)$$

и также равны нулю

$$q_k(0) = 0, \quad \dot{q}_k(0) = 0.$$

Тогда, учитывая, что

$$\dot{q}_k = -A_{1k} p_k \sin p_k t + A_{2k} p_k \cos p_k t,$$

из начальных условий найдем:

$$A_{1k} = -\frac{P_0}{\mathfrak{M}_k p_k^2}, \quad A_{2k} = 0,$$

и общий вид решения будет описываться функцией:

$$q_k(t) = \frac{P_0}{\mathfrak{M}_k p_k^2} (1 - \cos p_k t).$$

Решением для каждой гармоники будут функции:

$$q_1(t) = \frac{P_0}{6mp_1^2} (1 - \cos p_1 t),$$

$$q_2(t) = \frac{P_0}{2mp_2^2} (1 - \cos p_2 t),$$

$$q_3(t) = \frac{P_0}{3mp_3^2} (1 - \cos p_3 t).$$

Зная главные координаты можно определить перемещения масс под действием вынуждающей силы:

$$x_1 = u_{11}q_1 + u_{12}q_2 + u_{13}q_3,$$

$$x_2 = u_{21}q_1 + u_{22}q_2 + u_{23}q_3,$$

$$x_3 = u_{31}q_1 + u_{32}q_2 + u_{33}q_3,$$

или с учетом значений найденных собственных частот, форм и главных координат:

$$x_1(t) = \frac{P_0 l^3}{3888EJ} (25 - 20 \cos p_1 t - 4 \cos p_2 t - \cos p_3 t),$$

$$x_2(t) = \frac{P_0 l^3}{3888EJ} (39 - 40 \cos p_1 t + \cos p_3 t),$$

$$x_3(t) = \frac{P_0 l^3}{3888 EJ} (17 - 20 \cos p_1 t + 4 \cos p_2 t - \cos p_3 t).$$

Следует обратить внимание на то, что амплитуда третьей гармоники с частотой p_3 для первой и третьей массы составляет всего 5 % от амплитуды первой гармоники с частотой p_1 , а для второй массы – 2,5 %.

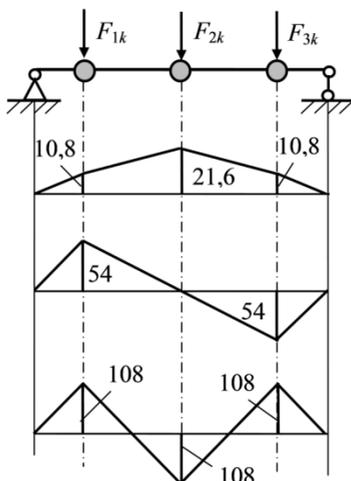


Рисунок 4.21

Для определения изгибающих моментов необходимо построить эпюры моментов, соответствующих собственным формам колебаний. Эти эпюры строятся при действии на систему амплитудных инерционных сил, которые определяются по формуле

$$F_{ik} = p_k^2 m_i u_{ik}.$$

Учитывая, что $m_i = m$, а также найденные ранее значения u_{ik} , получим:

$$F_{11} = F_{31} = m p_1^2 = 32,4 \frac{EJ}{l^3},$$

$$F_{21} = 2m p_1^2 = 64,8 \frac{EJ}{l^3},$$

$$F_{12} = -F_{32} = mp_2^2 = 486 \frac{EJ}{l^3}, F_{22} = 0,$$

$$F_{13} = -F_{23} = F_{33} = mp_3^2 = 1296 \frac{EJ}{l^3}.$$

Строя эпюры от сил инерции для трех собственных частот, как показано на рисунке 4.21, находим амплитудные значения моментов M_1 , M_2 , M_3 , соответствующие различным формам колебаний.

Изгибающий момент в любом сечении балки можно найти по формуле:

$$M(z, t) = \sum_{k=1}^n M_k(z)q_k(t).$$

В частности, момент в сечении под первой массой:

$$M_1(t) = (10,8q_1 + 54q_2 + 108q_3) \frac{EJ}{l^2},$$

под второй массой:

$$M_2(t) = (21,6q_1 + 0 - 108q_3) \frac{EJ}{l^2},$$

под третьей массой:

$$M_3(t) = (10,8q_1 - 54q_2 + 108q_3) \frac{EJ}{l^2}.$$

Подставляя в эти формулы найденные выражения для главных координат q_k , окончательно получим:

$$M_1(t) = \frac{P_0 l}{36} (5 - 2 \cos p_1 t - 2 \cos p_2 t - \cos p_3 t),$$

$$M_2(t) = \frac{P_0 l}{36} (3 - 4 \cos p_1 t + \cos p_3 t),$$

$$M_3(t) = \frac{P_0 l}{36} (1 - 2 \cos p_1 t + 2 \cos p_2 t - \cos p_3 t).$$

Из полученных выражений видно, что амплитуда третьей гармоники соизмерима с амплитудами первой и второй гармоник. Отсюда следует, что высшие гармоники оказывают существенно большее влияние на изгибающие моменты, а, следовательно, и на напряжения в сечениях балки, чем на перемещения сечений.

4.9. Вынужденные колебания системы под действием гармонической вынуждающей силы.

Метод гармонических функций

Если на систему действуют гармонические вынуждающие силы с частотой ω и различными фазами φ_i , то каждую из этих сил можно представить в виде суммы косинусной и синусной функции:

$$P_i(t) = P_i \cos(\omega t + \varphi) = P_{ic} \cos \omega t + P_{is} \sin \omega t,$$

где

$$P_{ic} = P_i \cos \varphi_i, P_{is} = P_i \sin \varphi_i,$$

и рассматривать движение системы отдельно под действием сил, пропорциональных $\cos \omega t$ и пропорциональных $\sin \omega t$, а затем, сложив полученные решения, найти общее решение уравнения движения.

Допустим, что $P_i = P_{ic} \cos \omega t$, тогда обобщенная сила, соответствующая k -ой главной координате, будет выражаться зависимостью:

$$Q_k(t) = \sum_{i=1}^n P_{ic} u_{ik} \cos \omega t,$$

а уравнение движения для главных координат будет иметь вид:

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ic} u_{ik}}{m_k} \cos \omega t.$$

Определив из этого уравнения главные координаты, можно затем записать закон движения любой точки системы:

$$x_{ic} = \sum_{k=1}^n q_k u_{ik}.$$

Аналогично для силы, действующей по закону синуса, можно записать

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ic} u_{ik}}{m_k} \sin \omega t, \quad x_{is} = \sum_{k=1}^n q_k u_{ik},$$

а затем найти общее решение:

$$x_i = x_{ic} + x_{is}.$$

До сих пор для решения задачи мы применяли метод главных координат. Но этот метод может быть использован, если уже известны частоты и формы собственных колебаний p_k, u_{ik} . Если эти параметры неизвестны, то проще воспользоваться методом гармонических функций.

Например, из предыдущих лекций известно, что в установившемся режиме движения колебания всех точек системы происходят с частотой изменения вынуждающей нагрузки. Тогда можно сразу принять:

$$x_i = A_i \cos \omega t.$$

Подставляя это решение в уравнения движения в прямой или в обратной форме, получим систему линейных неоднородных уравнений относительно амплитуды A_i . Составляя определитель этой системы $\Delta(\omega)$, по правилу Крамера находим амплитуды колебаний:

$$A_i = \frac{\Delta_i(\omega)}{\Delta(\omega)},$$

где $\Delta_i(\omega)$ – определитель системы, i -ый столбец которого заменен столбцом свободных членов.

В качестве примера использования метода гармонических функций рассмотрим систему с двумя степенями свободы (рисунок 4.22), на которую действует вынуждающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону

$$P(t) = P_0 \cos \omega t.$$

Примем, что в этой системе $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $c_1 = c_2 = c$.

Приняв за обобщенные координаты перемещения масс x_1 и x_2 , запишем уравнения движения системы. Поскольку система цепная, то уравнения движения удобнее записывать в прямой форме, т.е. в виде уравнения сил:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + c(x_1 - x_2) &= P_0 \cos \omega t, \\ 2m\ddot{x}_2 - c(x_1 - x_2) - cx_2 &= 0. \end{aligned}$$

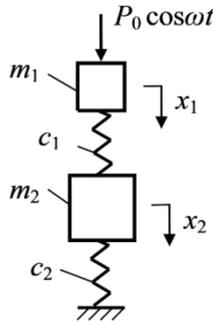


Рисунок 4.22

Примем, что решениями этих уравнений являются гармонические функции:

$$x_1 = A_1 \cos \omega t, \quad x_2 = A_2 \cos \omega t.$$

Подставляя эти решения в уравнения движения, и сокращая все члены на $\cos \omega t$, запишем:

$$(c - m\omega^2)A_1 - cA_2 = P_0,$$

$$cA_1 - 2(c - m\omega^2)A_2 = 0.$$

Составим определители этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (c - m\omega^2) & -c \\ c & -2(c - m\omega^2) \end{vmatrix} = c^2 - 2(c - m\omega^2)^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} P_0 & -c \\ 0 & -2(c - m\omega^2) \end{vmatrix} = -2P_0(c - m\omega^2),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (c - m\omega^2) & P_0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = -P_0c.$$

Далее по правилу Крамера находим амплитуды:

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2P_0(c - m\omega^2)}{2(c - m\omega^2)^2 - c^2},$$

$$A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2P_0c}{2(c - m\omega^2)^2 - c^2}.$$

С учетом этого, решения уравнений движения принимают вид:

$$x_1 = \frac{2P_0(c-m\omega^2)}{2(c-m\omega^2)^2-c^2} \cos \omega t,$$

$$x_2 = \frac{2P_0c}{2(c-m\omega^2)^2-c^2} \cos \omega t.$$

Собственные частоты данной системы можно найти из условия резонанса. Известно, что резонанс наступает тогда, когда собственная частота равна частоте вынуждающей нагрузки. При этом если трение в системе отсутствует, то резонансная амплитуда стремится к бесконечности. Это происходит в том случае, когда знаменатель в выражениях для амплитуды равен нулю.

Приравнивая определитель Δ к нулю, и принимая в нем $\omega = p$, получим частотное уравнение:

$$p^4 - 2\frac{c}{m}p^2 + \frac{c^2}{2m^2} = 0,$$

из которого найдем

$$p_{1,2}^2 = \frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - \frac{c^2}{2m^2}} = \frac{c}{m} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$p_1 = 0,541\sqrt{c/m}, \quad p_2 = 1,306\sqrt{c/m}.$$

5. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

5.1. Продольные и крутильные колебания стержней постоянного сечения, колебания струн

Продольные колебания стержня

В основе вывода уравнения движения стержня при его продольных колебаниях лежат две гипотезы. Во-первых, принимается, что при перемещениях и деформациях все сечения стержня остаются плоскими (гипотеза плоских сечений). Во-вторых, считается, что силы инерции, связанные с радиальными перемещениями частиц стержня при его растяжении-сжатии, пренебрежимо малы по сравнению с продольными силами инерции. При этих допущениях положение каждого поперечного сечения стержня характеризуется только одной координатой x , которая зависит от координаты вдоль продольной оси z и от времени t , $x = x(z, t)$.

Выделим в стержне элементарный участок вдоль оси z величиной dz (рисунок 5.1). На этот участок слева действует упругая сила P , а справа – упругая сила P с некоторым приращением dP , где

$$dP = \frac{\partial P}{\partial z} dz.$$

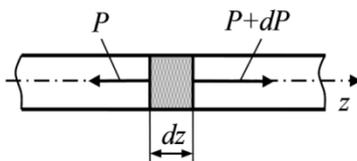


Рисунок 5.1

Сила инерции, действующая на участок dz при его движении, определится как

$$P_u = -m_0 dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\rho S dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},$$

где m_0 – масса стержня единичной длины; ρ – плотность материала стержня; S – площадь его поперечного сечения.

Составляя проекцию суммы сил на ось z и добавляя в соответствии с принципом Даламбера ко всем силам силы инерции, запишем:

$$-P + P + \frac{\partial P}{\partial z} dz - \rho S dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0.$$

Сокращая все члены этого уравнения на dz , и учитывая, что

$$P = ES \frac{\partial x}{\partial z},$$

где E – модуль упругости материала стержня; dx/dz – деформация стержня, получим:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \quad (5.1)$$

где $a = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольной волны деформации в стержне.

Уравнение (5.1) это *одномерное волновое уравнение*, описывающее движение сечений стержня. Вследствие принятых допущений оно является приближенным. Но его погрешности становятся существенными только для высокочастотных колебаний, когда длина волны, распространяющейся в стержне, соизмерима или меньше размеров поперечного сечения стержня.

Крутильные колебания стержня

При выводе уравнений движения сечений стержня примем следующие допущения. При колебаниях стержень деформируется так же как и при статическом кручении. Поперечные сечения стержня при колебаниях остаются плоскими и поворачиваются относительно продольной оси стержня как жёсткие диски. Обозначим угол поворота сечения стержня

через x . Этот угол, как и в предыдущем случае, зависит от координаты сечения z и от времени t , $x = x(z, t)$.

Выделим в стержне элементарный участок длиной dz (рисунок 5.2). Слева на этот участок действует крутящий момент M , который связан с углом поворота x соотношением:

$$M = GJ_p \frac{\partial x}{\partial z},$$

где G – модуль сдвига; J_p – полярный момент инерции сечения.

Справа на участок dz действует крутящий момент M с некоторым приращением

$$dM = \frac{\partial M}{\partial z} dz = GJ_p \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dz.$$

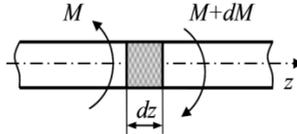


Рисунок 5.2

Записывая уравнение моментов для участка dz , и добавляя к упругим моментам момент сил инерции, равный

$$M_u = -\rho J_p dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},$$

приходим к уравнению:

$$-M + M + GJ_p \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dz - \rho J_p dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0.$$

После сокращений это уравнение приводится к одномерному волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{1}{a_k^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \quad (5.2)$$

где $a_k = \sqrt{G/\rho}$ – скорость распространения крутильной волны деформации в стержне.

Уравнение (5.2) по структуре такое же, как уравнение (5.1) и отличается от него только тем, что здесь x это угловая координата, а a_k – скорость распространения крутильной волны.

Уравнение (5.2) также приближенное. Оно достаточно хорошо описывает крутильные колебания сплошных стержней. Но вследствие принятых допущений оно непригодно для описания колебаний тонкостенных стержней открытого профиля.

Поперечные колебания натянутой струны

При выводе уравнения движения струны примем следующие допущения. Струна абсолютно гибкая, и в каждом её поперечном сечении действует только продольная сила. Поперечные перемещения точек струны весьма малы, и в процессе движения струны её натяжение T_0 можно считать постоянным.

Обозначим поперечные перемещения струны через x , причем $x = x(z, t)$. Выделим элемент струны длиной dz (рисунок 5.3) и составим уравнение сил, действующих на этот элемент.

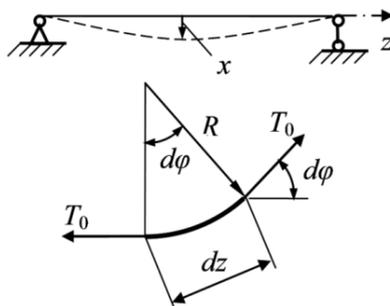


Рисунок 5.3

К концам элемента приложены продольные силы T_0 , составляющие между собой малый угол $d\varphi$. Этот угол связан с длиной дуги dz и радиусом кривизны струны R соотношением:

$$d\varphi = \frac{dz}{R}.$$

Проектируя все силы, включая поперечные силы инерции, на нормаль к элементу, запишем:

$$T_0 \sin \frac{dz}{R} - m_0 dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0,$$

где m_0 – масса струны единичной длины (погонная масса); R – радиус кривизны струны в сечении с координатой z .

Вследствие малости величины dz можно принять

$$\sin \frac{dz}{R} = \frac{dz}{R},$$

а вследствие малости перемещений x кривизну струны можно принять пропорциональной второй производной от перемещений по координате z :

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}.$$

Подставляя два последних соотношения в уравнение проекций сил, и сокращая все члены на dz , получим уравнение движения струны

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{1}{a_c^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \quad (5.3)$$

где $a_c = \sqrt{T_0/m_0}$ – скорость распространения поперечной волны деформации в струне.

Поскольку для трех рассмотренных случаев уравнения движения (5.1)–(5.3) одинаковые, то и их решения будут одинаковыми. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся решением задач о продольных колебаниях стержней, имея в виду, что эти решения применимы и к крутильным колебаниям валов и к поперечным колебаниям струн. В получен-

ных решениях будут меняться только обобщенные координаты и скорости распространения волн деформаций.

5.2. Определение собственных частот и форм продольных колебаний стержней постоянного сечения

Решение волнового уравнения (5.1), соответствующее свободным колебаниям стержня, будем искать в виде гармонической функции:

$$x(z, t) = u(z) \cos(pt + \varphi), \quad (5.4)$$

где $u(z)$ – амплитудная функция, зависящая только от координаты z и определяющая форму колебания; p – собственная частота колебаний; φ – начальная фаза колебаний.

Подставляя это решение в уравнение (5.1), и сокращая все члены на $\cos(pt + \varphi)$, получим дифференциальное уравнение относительно амплитудной функции:

$$u'' + \alpha^2 u = 0, \quad (5.5)$$

где $\alpha^2 = p^2/a^2$, $u'' = d^2u/dz^2$.

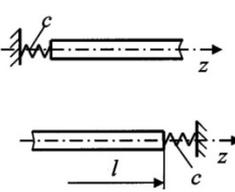
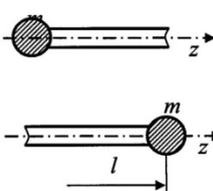
Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$u(z) = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z, \quad (5.6)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, которые находятся из граничных условий задачи. Граничные условия для различных случаев приведены в таблице 5.1.

Подставляя в граничные условия решение (5.6), приходим к системе двух линейных алгебраических уравнений (по одному для каждого конца стержня) относительно постоянных C_1 и C_2 . Составляя определитель этой системы, и развертывая его, получим частотное уравнение, из которого находятся собственные частоты p_i . Возвращаясь к системе алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2 , можно найти формы колебаний u_i .

Таблица 5.1 – Граничные условия при продольных колебаниях стержней

Наименование условия	Схема	Граничные условия
Заделка торца		$u(0) = 0.$
Свободный торец		$\frac{du}{dz}(0) = 0.$
Упругая опора		$ES \frac{du}{dz}(0) = cu(0),$ $ES \frac{du}{dz}(l) = -cu(l).$
Жесткая масса		$-mp^2u(0) = ES \frac{du}{dz}(0),$ $mp^2u(l) = ES \frac{du}{dz}(l)$

Пример 5.1

Найти собственные частоты и формы колебаний стержня длиной l , заделанного по краям (рисунок 5.4).

Решение.

Решение уравнения движения стержня имеет вид (5.4)

$$x(z, t) = u(z) \cos(pt + \varphi),$$

где $u(z)$ – амплитудная функция, определяемая по формуле (5.6)

$$u(z) = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z.$$

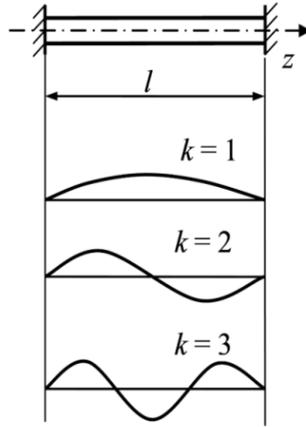


Рисунок 5.4

Постоянные интегрирования C_1, C_2 находятся из граничных условий, которые в данной задаче имеют вид:

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0.$$

Подставляя в эти условия функцию $u(z)$, получим систему уравнений:

$$C_1 = 0, \quad C_2 \sin \alpha l = 0, \tag{5.7}$$

из которой следует: $\sin \alpha l = 0$, $\alpha_k l = \pi k$ ($k = 1, 2, \dots$). Так как $\alpha_k = p_k/a$, то окончательно получим

$$p_k = \frac{a\pi k}{l}. \tag{5.8}$$

Из второго уравнения (5.7) следует, что каждой собственной частоте соответствует форма колебаний:

$$u_k(z) = \sin \alpha_k z = \sin \frac{p_k z}{a},$$

или с учетом выражения (5.8):

$$u_k(z) = \sin \frac{k\pi z}{l}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{5.9}$$

В качестве примера на рисунке 5.4 показаны первые три собственные формы колебаний рассматриваемого

стержня. Из него следует, что число k показывает число полуволн на длине стержня.

Поскольку система с распределенными параметрами имеет бесконечное число степеней свободы, то она обладает бесконечным числом собственных форм и частот колебаний.

Пример 5.2

Найти собственные частоты и формы колебаний свободного стержня длиной l (рисунок 5.5).

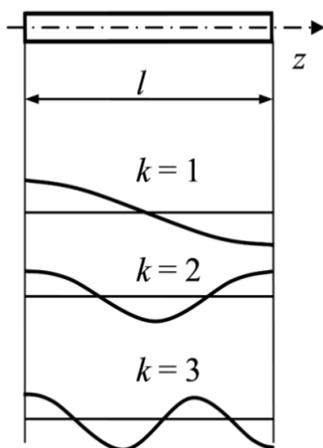


Рисунок 5.5

Решение.

Граничные условия в этой задаче имеют вид:

$$\frac{du}{dz}(0) = 0, \quad \frac{du}{dz}(l) = 0.$$

Записывая амплитудную функцию в виде

$$u(z) = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z,$$

и подставляя её в граничные условия, получим систему уравнений:

$$C_2 = 0, \quad -\alpha C_1 \sin \alpha l = 0.$$

Так как $\alpha \neq 0$, $C_1 \neq 0$, то
 $\sin \alpha l = 0$, $\alpha_k l = \pi k$ ($k = 1, 2, \dots$),
 $p_k = \frac{a\pi k}{l}$.

Сравнивая это выражение с (5.8) можно видеть, что собственные частоты колебаний свободного стержня такие же, как и стержня, заделанного по концам. Но формы колебания другие и описываются соотношением

$$u_k(z) = \cos \frac{k\pi z}{l}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.10)$$

Первые три формы колебаний (5.10) показаны на рисунке 5.5.

Пример 5.3

Найти собственные частоты и формы колебаний стержня длиной l с заделкой на одном конце и грузом на другом (рисунок 5.6).

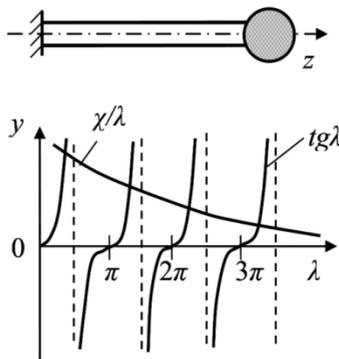


Рисунок 5.6

Решение.

Граничные условия имеют вид:

$$u(0) = 0, \quad ES \frac{du}{dz}(l) = mp^2 u(l).$$

Записывая амплитудную функцию

$$u(z) = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z,$$

и подставляя её в граничные условия, получим систему уравнений:

$$C_1 = 0, \quad ES\alpha C_2 \cos \lambda = mp^2 C_2 \sin \lambda,$$

где $\lambda = \alpha l$.

Из последнего уравнения следует:

$$tg \lambda = \frac{ES\alpha}{mp^2}.$$

Так как $p = \alpha l/l$, $\alpha = \lambda/l$, то вводя обозначение $\chi = ES l/m\alpha^2$, можно записать

$$tg \lambda = \chi/\lambda. \quad (5.11)$$

Это уравнение решается численно или графически. В последнем случае задаваясь значениями λ , строят диаграмму функции $y = tg \lambda$ и функции $y = \chi/\lambda$, которая представляет собой гиперболу (рисунок 5.6). Точки пересечения этих графиков определяют значения λ_k , удовлетворяющие условию (5.11). Определив значения λ_k , затем находят собственные частоты

$$p_k = \frac{\alpha \lambda_k}{l}.$$

Очевидно, что для высокочастотных колебаний диаграмма $y = \chi/\lambda$ приближается к оси λ . Тогда для достаточно больших значений k можно принять

$$p_k = \alpha k/l.$$

Эти частоты совпадают с собственными частотами свободного стержня и стержня, заделанного по концам. Отсюда следует, что граничные условия оказывают влияние в основном на низкие собственные частоты.

Собственные формы колебаний определяются из уравнения для амплитудной функции с точностью до постоянного множителя как

$$u_k(z) = \sin \frac{\lambda_k z}{l}.$$

При высокочастотных колебаниях собственные формы в рассматриваемой задаче практически такие же, как и в случае колебаний стержня, заделанного по концам.

5.3. Колебания ступенчатых стержней

Рассмотрим определение собственных форм и частот колебаний двухступенчатого стержня, заделанного с одной стороны и свободного с другой стороны (рисунок 5.7). Площадь поперечного сечения первого участка S_1 , длина l_1 . Площадь поперечного сечения второго участка S_2 , длина l_2 .

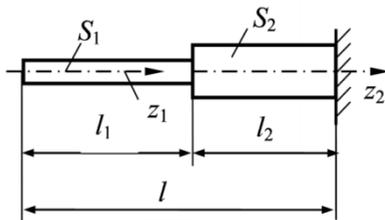


Рисунок 5.7

Особенностью математического описания колебаний ступенчатого стержня является то, что для каждого его участка амплитудная функция записывается отдельно.

Примем, что сечениям первого участка соответствует координата z_1 . Её начало расположено на левом торце стержня. Сечениям второго участка соответствует координата z_2 , начало которой расположено на границе участков. Амплитудные функции для первого и второго участков запишутся в виде

$$u_1(z_1) = C_{11} \cos az_1 + C_{12} \sin az_1, \quad (5.12)$$

$$u_2(z_2) = C_{21} \cos az_2 + C_{22} \sin az_2. \quad (5.13)$$

Постоянные C_{ij} находятся из четырех граничных условий: двух условий по краям стержня и двух условий совместности деформации на границе двух участков.

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(0) = 0, \quad u_2(l) = 0,$$

$$u_1(l_1) = u_2(0), \quad E_1 S_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}(l_1) = E_2 S_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}(0).$$

Подставляя функции (5.12), (5.13) в граничные условия, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_{12} &= 0, \\ C_{21} \cos \lambda_2 + C_{22} \sin \lambda_2 &= 0, \\ C_{11} \cos \lambda_1 &= C_{21}, \\ -E_1 S_1 C_{11} \sin \lambda_1 &= E_2 S_2 C_{22}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

где $\lambda_1 = \alpha l_1$, $\lambda_2 = \alpha l_2$.

Составляя определитель этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \cos \lambda_2 & \sin \lambda_2 \\ \cos \lambda_1 & -1 & 0 \\ E_1 S_1 \sin \lambda_1 & 0 & E_2 S_2 \end{vmatrix},$$

развертывая его и приравнявая к нулю, получим частотное уравнение

$$E_1 S_1 \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 - E_2 S_2 \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 = 0.$$

Обозначая $\lambda = \alpha l = pl/a$ и учитывая, что $\lambda_1 = \lambda l_1/l$, $\lambda_2 = \lambda l_2/l$, перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{E_1 S_1}{E_2 S_2} \operatorname{tg} \frac{\lambda l_1}{l} = \operatorname{ctg} \frac{\lambda l_2}{l}. \tag{5.15}$$

Это трансцендентное уравнение решается численно или графически построением функций левой и правой частей уравнения и нахождением точки пересечения графиков этих функций. Определив, таким образом, значения λ_k , можно затем найти собственные частоты

$$p_k = \frac{\alpha \lambda_k}{l}. \tag{5.16}$$

Формы колебаний находятся из системы уравнений (5.14). Выражая из них

$$C_{21} = C_{11} \cos \lambda_k \frac{l_1}{l}, \quad C_{22} = -\frac{E_1 S_1}{E_2 S_2} \sin \lambda_k \frac{l_1}{l},$$

и подставляя эти соотношения в амплитудные функции (5.12), (5.13), получим:

$$u_1(z_1) = C_{11} \cos \lambda_k \frac{z_1}{l},$$

$$u_2(z_2) = C_{11} \left(\cos \lambda_k \frac{l_1}{l} \cos \lambda_k \frac{z_2}{l} - \frac{E_1 S_1}{E_2 S_2} \sin \lambda_k \frac{l_1}{l} \sin \lambda_k \frac{z_2}{l} \right).$$

5.4. Изгибные колебания балок

Для описания изгибных колебаний балок воспользуемся технической теорией изгиба, основанной на гипотезе Бернулли, что при изгибе все сечения балки остаются плоскими и перпендикулярными к нейтральной линии. Кроме этого будем считать, что силы инерции, связанные с поворотом поперечных сечений, пренебрежимо малы по сравнению с поперечными силами инерции, возникающими при прогибах балки.

При этих допущениях в теории упругости получено, что при действии на балку распределенной нагрузки (рисунок 5.8) уравнение статического изгиба балки имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EJ \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) = q(z),$$

где z – координата сечения; x – поперечное перемещение сечения; E – модуль упругости; J – момент инерции сечения; $q(z)$ – распределенная нагрузка.

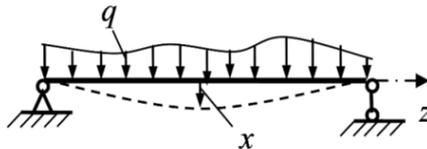


Рисунок 5.8

Заменяя в уравнении статического изгиба интенсивность нагрузки интенсивностью сил инерции в поперечном движении частиц балки, запишем:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EJ \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) = -m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},$$

где m_0 – масса стержня единичной длины, $m_0 = \rho S$; ρ – плотность материала балки; S – площадь поперечного сечения балки.

Для балки постоянного сечения из однородного материала величины EJ постоянные и последнее уравнение можно записать в виде

$$EJ \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0. \quad (5.17)$$

Это уравнение описывает свободные колебания балки. Представим его решение как обычно в виде

$$x(z, t) = u(z) \cos(pt + \varphi),$$

где $u(z)$ – амплитудная функция; p – собственная частота колебаний; φ – начальная фаза колебаний.

Подставляя это решение в уравнение движения (5.17) и сокращая все его члены на $\cos(pt + \varphi)$, получим дифференциальное уравнение относительно амплитудной функции:

$$\frac{d^4 u}{dz^4} - \alpha^4 u = 0, \quad (5.18)$$

где $\alpha^4 = m_0 p^2 / EJ$.

Характеристическое уравнение этого дифференциального уравнения

$$r^4 - \alpha^4 = 0$$

имеет четыре корня, два из которых действительные

$$r_1 = \alpha, \quad r_2 = -\alpha,$$

а два мнимые:

$$r_3 = i\alpha, \quad r_4 = -i\alpha, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Следовательно, решение уравнения (5.18) должно состоять из суммы четырех функций – двух экспоненциальных и двух тригонометрических:

$$u(z) = C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z} + C_3 \cos \alpha z +$$

$$+C_4 \sin \alpha z. \quad (5.19)$$

Это решение можно записать и через гиперболические функции:

$$u(z) = C_1 ch \alpha z + C_2 sh \alpha z + C_3 \cos \alpha z + C_4 \sin \alpha z, \quad (5.20)$$

где

$$ch \alpha z = 0,5(e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}), \quad sh \alpha z = 0,5(e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}).$$

Постоянные $C_1 - C_4$ в этом решении находятся из граничных условий задачи.

Для упрощения решения известным российским ученым А.Н. Крыловым были введены специальные функции, которые получили название функций Крылова:

$$K_1(\alpha z) = 0,5(ch \alpha z + \cos \alpha z),$$

$$K_2(\alpha z) = 0,5(sh \alpha z + \sin \alpha z),$$

$$K_3(\alpha z) = 0,5(ch \alpha z - \cos \alpha z),$$

$$K_4(\alpha z) = 0,5(sh \alpha z - \sin \alpha z).$$

Эти функции обладают двумя замечательными свойствами. Во-первых, при дифференцировании номер функции понижается на единицу, т. е.

$$\frac{d}{dz} K_1(\alpha z) = \alpha K_4(\alpha z),$$

$$\frac{d}{dz} K_2(\alpha z) = \alpha K_1(\alpha z),$$

$$\frac{d}{dz} K_3(\alpha z) = \alpha K_2(\alpha z),$$

$$\frac{d}{dz} K_4(\alpha z) = \alpha K_3(\alpha z).$$

Во-вторых, при аргументе, равном нулю, все функции Крылова, кроме первой, равны нулю, а первая функция равна единице:

$$K_1(0) = 1, \quad K_2(0) = K_3(0) = K_4(0) = 0.$$

Решение уравнения (5.18) записывается через функции Крылова следующим образом:

$$u(z) = C_1 K_1(\alpha z) + C_2 K_2(\alpha z) + C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z), \quad (5.21)$$

а указанные свойства функций Крылова позволяют просто находить постоянные C_i . Из этих свойств следует:

$$C_1 = u(0), \quad C_2 = \frac{1}{\alpha} \frac{du}{dz}(0), \quad C_3 = \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2u}{dz^2}(0),$$

$$C_4 = \frac{1}{\alpha^3} \frac{d^3u}{dz^3}(0).$$

Но первая производная от перемещения по координате z это угол поворота сечения θ , а вторая и третья производные связаны с изгибающим моментом и поперечной силой соотношениями

$$M(z) = EJ \frac{d^2u}{dz^2}, \quad Q(z) = EJ \frac{d^3u}{dz^3}.$$

Тогда для постоянных интегрирования можно записать:

$$C_1 = u(0), \quad C_2 = \frac{1}{\alpha} \theta(0), \quad C_3 = \frac{1}{\alpha^2 EJ} M(0),$$

$$C_4 = \frac{1}{\alpha^3 EJ} Q(0).$$

На каждом конце балки имеется два граничных условия и всего получается четыре граничных условия для нахождения четырех постоянных C_i . Формулы, соответствующие некоторым граничным условиям, приведены в таблице 5.2.

Подстановка решения (5.21) в граничные условия, дает систему четырех алгебраических уравнений относительно постоянных C_i . Составляя определитель этих уравнений, и приравнивая его к нулю, получают частотное уравнение, из которого находят собственные частоты. Формы колебаний находятся из выражения (5.21) после определения всех постоянных через какую-то одну, например, через C_1 .

Пример 5.4

Определить собственные формы и частоты колебаний балки постоянного сечения, шарнирно опертой по концам (рисунок 5.9). Жесткость балки равна EJ , длина l , распределенная масса (масса, приходящаяся на единицу длины балки) m_0 .

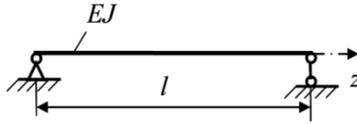


Рисунок 5.9

Решение.

Расположим начало оси z на левом конце балки и запишем граничные условия.

На левом конце балки:

$$u(0) = 0, \quad \frac{d^2u}{dz^2}(0) = 0. \quad (5.22)$$

На правом конце:

$$u(l) = 0, \quad \frac{d^2u}{dz^2}(l) = 0. \quad (5.23)$$

Запишем амплитудную функцию через функции Крылова:

$$u(z) = C_1 K_1(\alpha z) + C_2 K_2(\alpha z) + C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z). \quad (5.24)$$

Дифференцируя её дважды по аргументу z с учетом свойств функций Крылова, получим:

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \alpha^2 [C_1 K_3(\alpha z) + C_2 K_4(\alpha z) + C_3 K_1(\alpha z) + C_4 K_2(\alpha z)]. \quad (5.25)$$

Так как при $z = 0$ все функции Крылова, кроме первой, равны нулю, а первая функция равна единице, то из граничных условий на левом конце балки (5.22) найдем:

$$C_1 = 0, \quad C_3 = 0.$$

Подставляя функции (5.24), (5.25) в граничные условия на правом конце балки (5.23), получим систему уравнений:

$$C_2 K_2(\alpha l) + C_4 K_4(\alpha l) = 0, \quad (5.26)$$

$$C_2 K_4(\alpha l) + C_4 K_2(\alpha l) = 0.$$

Обозначим $\alpha l = \lambda$, и составим определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_2(\lambda) & K_4(\lambda) \\ K_4(\lambda) & K_2(\lambda) \end{vmatrix}.$$

Развертывая определитель и приравнивая его к нулю, получим частотное уравнение:

$$K_2^2(\lambda) - K_4^2(\lambda) = 0.$$

Перепишем это уравнение, подставив в него выражения для функций Крылова

$$\frac{1}{4}(sh \lambda - \sin \lambda)^2 - \frac{1}{4}(sh \lambda + \sin \lambda)^2 = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим:

$$sh \lambda \cdot \sin \lambda = 0.$$

Так как функция $sh \lambda$ при любых значениях λ , не равных нулю, не равна нулю, то остается $\sin \lambda = 0$, откуда следует:

$$\lambda_k = k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Поскольку

$$\lambda = \alpha l = l^4 \sqrt{m_0 p^2 / EJ},$$

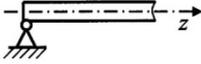
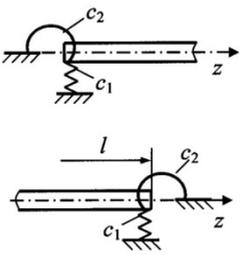
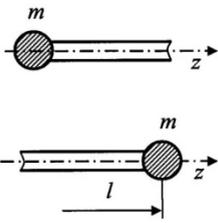
то частоты собственных колебаний определяются как

$$p_k = \lambda_k^2 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^4}} = \pi^2 k^2 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^4}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.27)$$

Так как ранее было найдено $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, то из выражения амплитудной функции (5.24), собственные формы колебаний запишутся в виде

$$u(z) = C_{2k} K_2(\alpha_k z) + C_{4k} K_4(\alpha_k z). \quad (5.28)$$

Таблица 5.2 – Граничные условия при поперечных колебаниях балок

Наименование условия	Схема	Граничные условия
Заделка		$u(0) = 0; \quad \frac{du}{dz}(0) = 0.$
Свободный конец		$\frac{d^2u}{dz^2}(0) = 0; \quad \frac{d^3u}{dz^3}(0) = 0.$
Шарнирная опора		$u(0) = 0, \quad \frac{d^2u}{dz^2}(0) = 0.$
Упругая опора		$c_1 u(0) = -EJ \frac{d^3u}{dz^3}(0),$ $c_2 \frac{du}{dz}(0) = EJ \frac{d^2u}{dz^2}(0);$ $c_1 u(l) = EJ \frac{d^3u}{dz^3}(l),$ $c_2 \frac{du}{dz}(l) = EJ \frac{d^2u}{dz^2}(l).$
Жесткая масса		$mp^2 u(0) = EJ \frac{d^3u}{dz^3}(0),$ $lp^2 \frac{du}{dz}(0) = -EJ \frac{d^2u}{dz^2}(0);$ $mp^2 u(0) = -EJ \frac{d^3u}{dz^3}(0),$ $lp^2 \frac{du}{dz}(l) = EJ \frac{d^2u}{dz^2}(l);$

Выражая из уравнения (5.26)

$$C_{4k} = -\frac{K_2(\lambda_k)}{K_4(\lambda_k)} C_{2k},$$

и подставляя в уравнение (5.28) для собственных форм колебаний, получим:

$$u_k(z) = C_{2k} \left(K_2(\alpha_k z) - \frac{K_2(\lambda_k)}{K_4(\lambda_k)} K_4(\alpha_k z) \right). \quad (5.29)$$

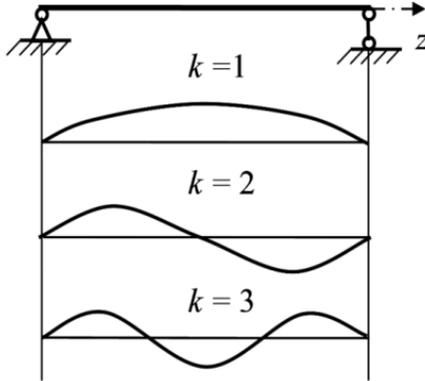


Рисунок 5.10

Следует обратить внимание на то, что в данном частном случае, когда $\lambda_k = k\pi$, имеют место соотношения:

$$K_2(\lambda_k) = 0,5(\operatorname{sh} \lambda_k + \sin \lambda_k) = 0,5\operatorname{sh} \lambda_k,$$

$$K_4(\lambda_k) = 0,5(\operatorname{sh} \lambda_k - \sin \lambda_k) = 0,5\operatorname{sh} \lambda_k,$$

и формула (5.29) принимает вид

$$u_k(z) = C_{2k}(K_2(\alpha_k z) - K_4(\alpha_k z)) = C_{2k} \sin \alpha_k z.$$

Принимая $C_{2k} = 1$, и учитывая, что $\alpha_k = k\pi/l$, для k -й формы колебаний в безразмерном виде окончательно получим:

$$u_k(z) = \sin \frac{k\pi z}{l}.$$

Эта форма представляет собой синусоиду с k полуволнами. Графики первых трех собственных форм колебаний показаны на рисунке 5.10.

Пример 5.5

Определить собственные формы и частоты колебаний консольной балки (рисунок 5.11). Жесткость балки равна EJ , длина l , распределенная масса m_0 .

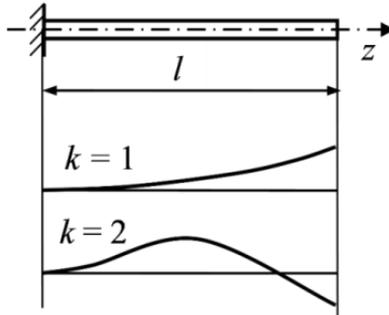


Рисунок 5.11

Решение.

Граничные условия для балки, показанной на рисунке 5.11, имеют вид:

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dz}(0) = 0,$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}(l) = 0, \quad \frac{d^3u}{dz^3}(l) = 0.$$

Первые два условия соответствуют отсутствию перемещения и угла поворота в заделке, а вторые два – отсутствию изгибающего момента и поперечной силы на свободном конце балки.

Записывая амплитудную функцию и её производные

$$u(z) = C_1 K_1(\alpha z) + C_2 K_2(\alpha z) + C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z),$$

$$\frac{du}{dz} = \alpha [C_1 K_4(\alpha z) + C_2 K_1(\alpha z) + C_3 K_2(\alpha z) + C_4 K_3(\alpha z)],$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \alpha^2 [C_1 K_3(\alpha z) + C_2 K_4(\alpha z) + C_3 K_1(\alpha z) + C_4 K_2(\alpha z)],$$

$$\frac{d^3 u}{dz^3} = \alpha^3 [C_1 K_2(\alpha z) + C_2 K_3(\alpha z) + C_3 K_4(\alpha z) + C_4 K_1(\alpha z)],$$

и подставляя эти выражения в граничные условия, получим:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 K_1(\lambda) + C_4 K_2(\lambda) = 0, \quad (5.30)$$

$$C_3 K_4(\lambda) + C_4 K_1(\lambda) = 0, \quad (5.31)$$

где $\lambda = \alpha l$.

Составляя определитель этой системы уравнений, развертывая его и приравнявая к нулю, получим частотное уравнение вида:

$$K_1^2(\lambda) - K_2(\lambda)K_4(\lambda) = 0.$$

Подставляя в него функции Крылова, запишем:

$$\frac{1}{4}(ch \lambda - \cos \lambda)^2 - \frac{1}{4}(sh \lambda + \sin \lambda)(sh \lambda - \sin \lambda) = 0.$$

Раскрывая скобки и учитывая соотношения:

$$\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda = 1, \quad ch^2 \lambda - sh^2 \lambda = 1,$$

получим:

$$2(1 + ch \lambda \cos \lambda) = 0.$$

Из последнего выражения следует:

$$\cos \lambda = -\frac{1}{ch \lambda}. \quad (5.32)$$

Это уравнение может быть решено численно или графически. Графическое решение представлено на рисунке 5.12. Точки пересечения функций левой и правой части частотного уравнения (5.32) определяют искомые значения λ_i .

Первые два значения равны соответственно

$$\lambda_1 = 1,875, \quad \lambda_2 = 4,694.$$

При $k > 2$ приближенно можно считать, что кривая $1/ch \lambda$ пересекает кривую $\cos \lambda$ в точках

$$\lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2}, \quad k = 3, 4, \dots \quad (5.33)$$

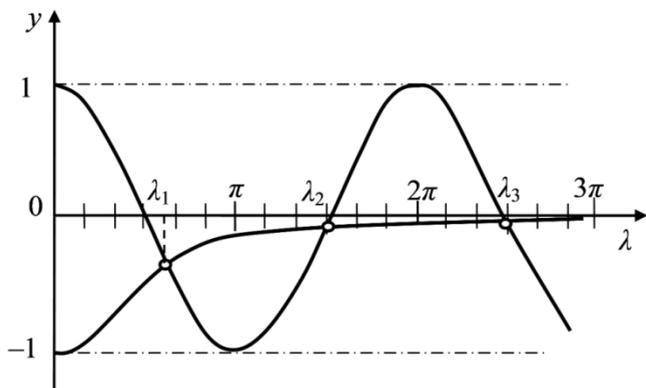


Рисунок 5.12

Собственные частоты колебаний аналогично (5.27) определяются формулой

$$p_k = \lambda_k^2 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^4}}. \quad (5.34)$$

Амплитудная функция с учетом, что $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, имеет вид

$$u_k(z) = C_{3k} K_3(\alpha_k z) + C_{4k} K_4(\alpha_k z).$$

Выражая из уравнения (5.30)

$$C_{4k} = -\frac{K_1(\lambda_k)}{K_2(\lambda_k)} C_{3k},$$

подставляя это выражение в амплитудную функцию, и принимая $C_{3k} = 1$, получим формы колебаний в безразмерном виде:

$$u_k(z) = \left[K_3\left(\lambda_k \frac{z}{l}\right) - \frac{K_1(\lambda_k)}{K_2(\lambda_k)} K_4\left(\lambda_k \frac{z}{l}\right) \right]. \quad (5.35)$$

Первые две формы колебаний, полученные по этой формуле, показаны на рисунке 5.11. Для последующих форм колебаний можно принять $K_1(\lambda_k)/K_2(\lambda_k) = 1$, и

$$u_k(z) = \left[K_3\left(\lambda_k \frac{z}{l}\right) - K_4\left(\lambda_k \frac{z}{l}\right) \right].$$

Подставляя в это выражение функции Крылова, и переходя от гиперболических функций к экспоненциальным, можно представить последнее выражение в виде:

$$u_k(z) = 0,5 \left[\exp\left(-\frac{\lambda_k z}{l}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_k z}{l}\right) + \sin\left(\frac{\lambda_k z}{l}\right) \right].$$

Из него следует, что при $z = l$ и $\lambda_k > 2$

$$u_k(l) = 0,5 \sin \lambda_k = 0,5(-1)^{k-1}.$$

5.5. Расчет колебаний балок с несколькими участками

Для расчета колебаний балок постоянного сечения с промежуточными опорами или с сосредоточенными силами в каком-либо сечении удобно использовать метод Крылова, позволяющий автоматически выполнять условия сопряжения участков при одном и том же начале координаты z .

Рассмотрим балку, к которой в сечении с координатой $z = a$ приложена сосредоточенная сила P и сосредоточенный момент M (рисунок 5.13).

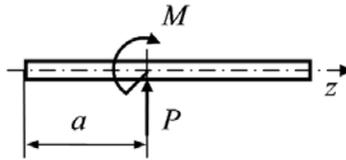


Рисунок 5.13

Допустим, балка совершает гармонические колебания по закону

$$x(z, t) = u(z) \cos(\omega t + \varphi).$$

Приложенные к балке сила и момент также изменяются по гармоническим законам:

$$P(t) = P_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad M(t) = M_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

В сечении $z = a$ должны выполняться условия сопряжения:

$$u_+(a) = u_-(a), \quad (5.36)$$

$$u'_+(a) = u'_-(a),$$

$$u''_+(a) = u''_-(a) + \frac{M_0}{EJ},$$

$$u'''_+(a) = u'''_-(a) + \frac{P_0}{EJ}.$$

Здесь штрихи означают дифференцирование амплитудной функции u по аргументу z . Индекс (+) соответствует правой части балки от точки приложения силы, а индекс (–) соответствует левой части. Эти условия выражают неразрывность функций прогибов и углов поворота сечений в точке с координатой $z = a$, а также наличие скачка изгибающего момента и поперечной силы в этом сечении.

Все записанные условия выполняются, если при общем начале отсчета координаты z для обеих частей балки от левого края, функция $u_+(z)$ связана с функцией $u_-(z)$ соотношением:

$$u_+(z) = u_-(z) + \frac{M_0}{EJ\alpha^2} K_3[\alpha(z - a)] + \frac{P_0}{EJ\alpha^3} K_4[\alpha(z - a)], \quad (5.37)$$

где $\alpha = \sqrt[4]{m_0\omega^2/EJ}$.

Эта формула получила название формулы Крылова. Подстановка её в условия сопряжения (5.36) с учетом свойства функций Крылова: $K_1(0) = 1$, $K_2(0) = K_3(0) = K_4(0) = 0$, обращает их в тождества.

Пример 5.6

Определить собственные частоты и формы колебаний балки с опорой, расположенной в пролете (рисунок 5.14), найти реакцию в этой опоре.

Решение.

Для левой от опоры части балки амплитудная функция имеет обычный вид:

$$u_-(z) = C_1 K_1(\alpha z) + C_2 K_2(\alpha z) + C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z).$$

Граничные условия на левом конце балки:

$$u(0) = 0, \quad \frac{d^2 u}{dz^2}(0) = 0.$$

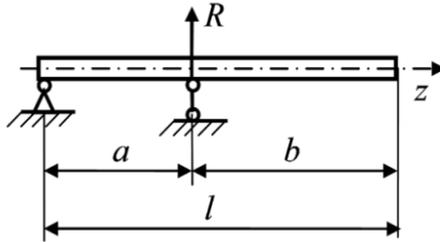


Рисунок 5.14

Подставляя амплитудную функцию в эти условия, найдем:

$$C_1 = 0, \quad C_3 = 0.$$

Следовательно, для левой от опоры части балки амплитудная функция имеет вид:

$$u_-(z) = C_2 K_2(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z). \quad (5.38)$$

В сечении балки $z = a$ действует опорная реакция R . При свободных колебаниях балки по гармоническому закону

$$x(z, t) = u(z) \cos(pt + \varphi)$$

эта реакция также будет изменяться по гармоническому закону

$$R(t) = R_0 \cos(pt + \varphi).$$

Поэтому на основании формулы Крылова (5.37) для правой части балки можно записать:

$$u_+(z) = u_-(z) + \frac{R_0}{EJ\alpha^3} K_4[\alpha(z - a)],$$

или с учетом (5.38):

$$u_+(z) = C_2 K_2(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z) +$$

$$+ \frac{R_0}{EJ\alpha^3} K_4[\alpha(z - a)], \quad (5.39)$$

Три постоянных величины в этом уравнении – C_2 , C_4 , R_0 находятся из трех граничных условий: равенство нулю прогиба на опоре и равенство нулю изгибающего момента и поперечной силы на свободном конце балки:

$$u_+(a) = u_-(a) = 0, \quad \frac{d^2 u_+}{dz^2}(l) = 0, \quad \frac{d^3 u_+}{dz^3}(l) = 0.$$

Подставляя в эти условия амплитудные функции (5.38), (5.39), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_2 K_2(\alpha a) + C_4 K_4(\alpha a) &= 0, \\ C_2 K_4(\alpha l) + C_4 K_2(\alpha l) + H K_2(\alpha b) &= 0, \\ C_2 K_3(\alpha l) + C_4 K_1(\alpha l) + H K_1(\alpha b) &= 0, \end{aligned} \quad (5.40)$$

где $H = R_0/EJ\alpha^3$.

Обозначая $\alpha l = \lambda$, составим определитель этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_2\left(\frac{\lambda a}{l}\right) & K_4\left(\frac{\lambda a}{l}\right) & 0 \\ K_4(\lambda) & K_2(\lambda) & K_2\left(\frac{\lambda b}{l}\right) \\ K_3(\lambda) & K_1(\lambda) & K_1\left(\frac{\lambda b}{l}\right) \end{vmatrix}.$$

Развертывая его и приравнявая к нулю, получим частотное уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta = K_2\left(\frac{\lambda a}{l}\right) K_2(\lambda) K_1\left(\frac{\lambda b}{l}\right) + K_4\left(\frac{\lambda a}{l}\right) K_2\left(\frac{\lambda b}{l}\right) K_3(\lambda) - \\ - K_4(\lambda) K_4\left(\frac{\lambda a}{l}\right) K_1\left(\frac{\lambda b}{l}\right) - K_2\left(\frac{\lambda a}{l}\right) K_2\left(\frac{\lambda b}{l}\right) K_1(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения находят численными методами. Например, задавая значения λ с некоторым шагом, строят график функции $\Delta(\lambda)$, и находят точки пересечения этого графика с осью λ . Затем по найденным значениям λ_k вычисляют собственные частоты, используя уже известную формулу

$$p_k = \lambda_k^2 \sqrt{EJ/m_0 l^4}. \quad (5.41)$$

Для определения форм колебаний и реакции R выразим из системы уравнений (5.40) все искомые величины через одну, например, через C_{2k} , получим:

$$C_{4k} = -\frac{K_2\left(\frac{\lambda_k a}{l}\right)}{K_4\left(\frac{\lambda_k a}{l}\right)} C_{2k}, \quad H = \frac{K_2\left(\frac{\lambda_k a}{l}\right)K_2(\lambda_k) - K_4(\lambda_k)K_4\left(\frac{\lambda_k a}{l}\right)}{K_4\left(\frac{\lambda_k a}{l}\right)K_2\left(\frac{\lambda_k b}{l}\right)} C_{2k}.$$

Принимая $C_{2k} = 1$, и подставляя эти выражения в амплитудные функции (5.38), (5.39), получим формы колебаний в безразмерном виде:

$$u_-(z) = K_2\left(\frac{\lambda_k z}{l}\right) - \frac{K_2\left(\frac{\lambda_k a}{l}\right)}{K_4\left(\frac{\lambda_k a}{l}\right)} K_4\left(\frac{\lambda_k z}{l}\right),$$

$$u_+(z) = K_2\left(\frac{\lambda_k z}{l}\right) - \frac{K_2\left(\frac{\lambda_k a}{l}\right)}{K_4\left(\frac{\lambda_k a}{l}\right)} K_4\left(\frac{\lambda_k z}{l}\right) +$$

$$+ \frac{K_2\left(\frac{\lambda_k a}{l}\right)K_2(\lambda_k) - K_4(\lambda_k)K_4\left(\frac{\lambda_k a}{l}\right)}{K_4\left(\frac{\lambda_k a}{l}\right)K_2\left(\frac{\lambda_k b}{l}\right)} K_4\left[\lambda_k\left(\frac{z-a}{l}\right)\right].$$

Реакция в опоре определится как $R = R_0 \cos(p_k t + \varphi_k)$.

Учитывая, что

$$R_0 = \frac{EJ\lambda_k^3}{l^3} H,$$

окончательно получим:

$$R = \frac{EJ\lambda_k^3}{l^3} \cdot \frac{K_2\left(\frac{\lambda_k a}{l}\right)K_2(\lambda_k) - K_4(\lambda_k)K_4\left(\frac{\lambda_k a}{l}\right)}{K_4\left(\frac{\lambda_k a}{l}\right)K_2\left(\frac{\lambda_k b}{l}\right)} C_{2k} \cos(p_k t + \varphi_k).$$

Постоянные C_{2k} и φ_k , входящие в последнее выражение, находятся из начальных условий задачи.

Пример 5.7

Определить собственные частоты и формы колебаний балки, несущей сосредоточенную массу (рисунок 5.15). Величина сосредоточенной массы m , момент инерции массы относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через центр тяжести массы, пренебре-

жимо мал. Жесткость балки EJ , распределенная масса m_0 . Соотношение массы балки и сосредоточенной массы: $m_0 l / m = 2$.

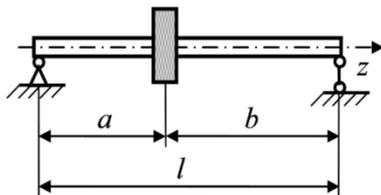


Рисунок 5.15

Решение.

При свободных колебаниях балки на массу будет действовать сила инерции, которая изменяется по гармоническому закону:

$$P = P_u \cos(pt + \varphi),$$

Так как

$$P = -m\ddot{x} = mp^2 u(a) \cos(pt + \varphi),$$

то амплитудные значения силы инерции

$$P_u = mp^2 u(a). \quad (5.42)$$

Граничные условия для левого конца балки имеют вид:

$$u_-(0) = 0, \quad \frac{d^2 u_-}{dz^2}(0) = 0,$$

а для правого конца:

$$u_+(l) = 0, \quad \frac{d^2 u_+}{dz^2}(l) = 0.$$

Записывая амплитудную функцию для левой от массы части балки

$$u_-(z) = C_1 K_1(\alpha z) + C_2 K_2(\alpha z) + C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z),$$

и подставляя её в граничные условия на левом конце, найдем $C_1 = 0$, $C_3 = 0$. С учетом этого получим:

$$u_-(z) = C_2 K_2(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z). \quad (5.43)$$

Для правой части балки в соответствии с формулой (5.37) имеем:

$$u_+(z) = C_2 K_2(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z) + \frac{P_u}{EJ\alpha^3} K_4[\alpha(z - a)].$$

Учитывая соотношения (5.42), (5.43), запишем:

$$P_u = mp^2 [C_2 K_2(\alpha a) + C_4 K_4(\alpha a)].$$

Подставляя это соотношение в последнюю формулу, и группируя члены, содержащие C_2 и C_4 , получим:

$$u_+(z) = C_2 \left[K_2(\alpha z) + \frac{mp^2}{EJ\alpha^3} K_2(\alpha a) K_4[\alpha(z - a)] \right] + C_4 \left[K_4(\alpha z) + \frac{mp^2}{EJ\alpha^3} K_4(\alpha a) K_4[\alpha(z - a)] \right]. \quad (5.44)$$

Подставляя эту функцию в граничные условия на правом конце балки, обозначая $\alpha l = \lambda$, и учитывая, что при $m_0 l / m = 2$ имеет место соотношение:

$$\frac{mp^2}{EJ\alpha^3} = \frac{m\alpha^4}{m_0\alpha^3} = \frac{m\lambda}{m_0 l} = 0,5\lambda,$$

приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} C_2 \left[K_2(\lambda) + 0,5\lambda K_2\left(\lambda \frac{a}{l}\right) K_4\left(\lambda \frac{b}{l}\right) \right] + C_4 \left[K_4(\lambda) + \right. \\ \left. + 0,5\lambda K_4\left(\lambda \frac{a}{l}\right) K_4\left(\lambda \frac{b}{l}\right) \right] = 0, \\ C_2 \left[K_4(\lambda) + 0,5\lambda K_2\left(\lambda \frac{a}{l}\right) K_2\left(\lambda \frac{b}{l}\right) \right] + C_4 \left[K_2(\lambda) + \right. \\ \left. + 0,5\lambda K_4\left(\lambda \frac{a}{l}\right) K_2\left(\lambda \frac{b}{l}\right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Составляя определитель этой системы, развертывая его и приравнявая к нулю, получим частотное уравнение, из которого численными методами находим значения λ_k и собственные частоты колебаний по формуле (5.41).

Выражая из последнего уравнения

$$C_{4k} = - \frac{K_4(\lambda_k) + 0,5\lambda_k K_4\left(\lambda_k \frac{a}{l}\right) K_4\left(\lambda_k \frac{b}{l}\right)}{K_2(\lambda_k) + 0,5\lambda_k K_2\left(\lambda_k \frac{a}{l}\right) K_4\left(\lambda_k \frac{b}{l}\right)} C_{2k},$$

подставляя это выражение в функции (5.43), (5.44) и принимая

$$C_{2k} = 1, \quad \alpha_k = \lambda_k/l,$$

получим формы колебаний в безразмерном виде:

$$u_{k-}(z) = K_2 \left(\lambda_k \frac{z}{l} \right) + \frac{C_{4k}}{C_{2k}} K_4 \left(\lambda_k \frac{z}{l} \right),$$

$$u_{k+}(z) = K_2 \left(\lambda_k \frac{z}{l} \right) + 0,5\lambda_k K_2 \left(\lambda_k \frac{a}{l} \right) K_4 \left(\lambda_k \frac{(z-a)}{l} \right) + \frac{C_{4k}}{C_{2k}} \left[K_4 \left(\lambda_k \frac{z}{l} \right) + 0,5\lambda_k K_4 \left(\lambda_k \frac{a}{l} \right) K_4 \left(\lambda_k \frac{(z-a)}{l} \right) \right].$$

5.6. Влияние продольных сил на частоту свободных колебаний балок

При действии на балку продольных сил её собственные частоты изменяются. Сжимающие силы приводят к уменьшению, а растягивающие силы – к увеличению собственных частот.

Для оценки влияния продольных сил на собственные частоты выведем дифференциальное уравнение движения растянутой балки. Для этого выделим в растянутой балке элементарный участок длиной dz (рисунок 5.16) и приложим к его граням внутренние силы. При этом на правой грани участка поперечные силы, и моменты имеют некоторые приращения dQ и dM , которые определяются через частные производные как

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial z} dz, \quad dM = \frac{\partial M}{\partial z} dz.$$

Составим уравнение проекций всех сил, включая силы инерции, на вертикальную ось x , принимая вследствие малости угла $\sin(\partial x/\partial z) = \partial x/\partial z$:

$$P \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dz - \frac{\partial Q}{\partial z} dz - m_0 dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0.$$

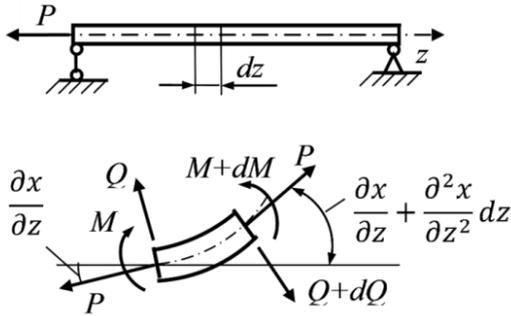


Рисунок 5.16

Уравнение моментов относительно левой грани выделенного элемента:

$$\frac{\partial M}{\partial z} dz - Q dz = 0.$$

Сокращая все члены этих уравнений на dz , и учитывая, что

$$M = EJ \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = Q = EJ \frac{\partial^3 x}{\partial z^3}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = EJ \frac{\partial^4 x}{\partial z^4},$$

перепишем уравнение проекций сил в виде:

$$\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} - \frac{P}{EJ} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \frac{m_0}{EJ} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0. \quad (5.45)$$

Решение этого уравнения будем искать в форме

$$x(z, t) = u(z) \cos(pt + \varphi).$$

Дифференцируя эту функцию по z и по t и подставляя в уравнение движения (5.45), после сокращения на $\cos(pt + \varphi)$ получим дифференциальное уравнение относительно амплитудной функции:

$$\frac{d^4 u}{dz^4} - \frac{P}{EJ} \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{m_0 p^2}{EJ} u = 0. \quad (5.46)$$

По сравнению с уравнением движения нерастянутого стержня (5.18) в последнем уравнении появился член, пропорциональный второй производной амплитудной функции.

Вид решения уравнения (5.46) определяется корнями характеристического уравнения, которое в данном случае имеет вид:

$$r^4 - 2hr^2 - k^2 = 0,$$

где $2h = P/EJ$, $k^2 = m_0 p^2/EJ$.

Обозначим $r^2 = v$ и перепишем характеристическое уравнение в виде

$$v^2 - 2hv - k^2 = 0.$$

Это обычное квадратное уравнение, решение которого имеет вид

$$v = h \pm \sqrt{h^2 + k^2}.$$

Так как $h < \sqrt{h^2 + k^2}$, то решение характеристического уравнения имеет два действительных корня:

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{h + \sqrt{h^2 + k^2}} = \pm \alpha_1,$$

и два мнимых корня:

$$r_{3,4} = \pm \sqrt{h - \sqrt{h^2 + k^2}} = \pm \alpha_2.$$

Следовательно, общее решение уравнения (5.46) можно записать в виде

$$u(z) = C_1 ch \alpha_1 z + C_2 sh \alpha_1 z + C_3 \cos \alpha_2 z + C_4 \sin \alpha_2 z,$$

где постоянные $C_1 - C_4$ определяются из граничных условий задачи.

В частном случае шарнирно опертой балки решение можно получить более просто. В этом случае граничным условиям на обоих концах балки удовлетворяет амплитудная функция

$$u(z) = \sin \frac{k\pi z}{l}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Подставляя эту функцию в уравнение (5.46), и сокращая все члены на $\sin(k\pi z/l)$, получим:

$$\frac{k^4 \pi^4}{l^4} + \frac{P}{EJ} \frac{k^2 \pi^2}{l^2} - \frac{m_0 p_k^2}{EJ} = 0.$$

Из этого уравнения найдем собственную частоту колебаний p_k , соответствующую k -ой форме колебаний:

$$p_k = k^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^4} \left(1 + \frac{Pl^2}{k^2 \pi^2 EJ}\right)}. \quad (5.47)$$

Эта формула отличается от формулы (5.27) для балки без продольной силы только множителем в круглых скобках.

Мы рассмотрели случай, когда продольная сила растягивающая. В этом случае, как следует из формулы (5.47), собственная частота увеличивается по сравнению с частотой балки без продольной силы.

В случае, когда продольная сила сжимающая, в скобках формулы (5.47) следует принять знак минус. При этом собственная частота будет уменьшаться.

Пример 5.8

Сравнить собственные частоты колебаний стальной балки длиной l , равной 1 м, и диаметром d , равным 20 мм, при шарнирном опирании её концов для случаев, когда на балку не действует продольная сила, когда действует сжимающая сила величиной 10 кН, и когда действует растягивающая сила такой же величины.

Модуль упругости материала балки $2 \cdot 10^5$ МПа, плотность 7850 кг/м³.

Решение.

Находим момент инерции сечения балки:

$$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 2^4 \cdot 10^{-8}}{64} = 0,25\pi \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Вычисляем распределенную массу балки:

$$m_0 = \rho \frac{\pi d^2}{4} = 7850 \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 10^{-4}}{4} = 0,78\pi \text{ кг}.$$

Записываем формулу для определения собственных частот в общем виде:

$$p_k = k^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^4} \left(1 \pm \frac{Pl^2}{k^2 \pi^2 EJ} \right)}.$$

Подставляя в эту формулу соответствующие величины, определяем собственные частоты для балки без продольной силы p_{k0} , для балки, на которую действует растягивающая сила p_{kp} , и для балки, на которую действует сжимающая сила p_{kc} . В таблице 5.3 приведены полученные значения частот p_{k0} и отношения частот p_{kp}/p_{k0} и p_{kc}/p_{k0} .

Таблица 5.3 – Отношение собственных частот балки, нагруженной продольной силой, к собственным частотам не нагруженной балки

Число полуволн k	1	2	3	4	5
p_{k0}, c^{-1}	249,9	999,6	2249,1	3998,4	6247,5
p_{kp}/p_{k0}	1,283	1,078	1,035	1,020	1,013
p_{kc}/p_{k0}	0,596	0,916	0,964	0,980	0,987

Из приведенных результатов видно, что продольные силы оказывают существенное влияние только на низкие частоты. С увеличением частоты это влияние быстро уменьшается и при числе полуволн свыше 5 оно составляет менее 1 %.

5.7. Влияние на собственные частоты колебаний деформации сдвигов и моментов инерции при повороте сечений

Рассмотренная выше техническая теория изгиба базируется на гипотезе Бернулли о возможности пренебрежения силами инерции при повороте сечений. Но это допущение становится неприемлемым, когда длина волны изгиба не очень велика по сравнению с размерами поперечного сечения балки, т.е. при высокочастотных колебаниях.

Кроме этого техническая теория изгиба не учитывает сдвиговые деформации в балке.

Для устранения этих недостатков теории С.П. Тимошенко предположил, что сечения балки, бывшие до деформации перпендикулярными к оси балки, остаются при деформации плоскими, но перестают быть перпендикулярными к продольной оси балки. Угол ϑ , на который поворачивается сечение при деформации балки, складывается из угла сдвига γ и угла поворота нормали к продольной оси балки при её деформации

$$\vartheta = \gamma + \frac{\partial x}{\partial z}.$$

При этом предполагается, что перерезывающая сила пропорциональна углу сдвига.

Для составления уравнений движения выделим в балке элементарный участок длиной dz (рисунок 5.17). На него слева действует момент сил M и перерезывающая сила Q , а справа – момент сил и перерезывающая сила с некоторыми приращениями $M + dM$ и $Q + dQ$, где

$$dM = \frac{\partial M}{\partial z} dz, \quad dQ = \frac{\partial Q}{\partial z} dz.$$

Величины M и Q в сечении балки связаны с его перемещениями и углом сдвига соотношениями:

$$M = EJ \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad Q = \frac{GS}{\alpha} \gamma = \frac{GS}{\alpha} \left(\vartheta - \frac{\partial x}{\partial z} \right), \quad (5.48)$$

где G – модуль сдвига; S – площадь поперечного сечения балки; α – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению и зависящий от формы сечения. Для прямоугольного сечения $\alpha = 1,2$.

Составляя уравнение проекций всех сил, включая силы инерции, на вертикальную ось x , запишем:

$$Q - Q - \frac{\partial Q}{\partial z} dz - \rho S dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0.$$

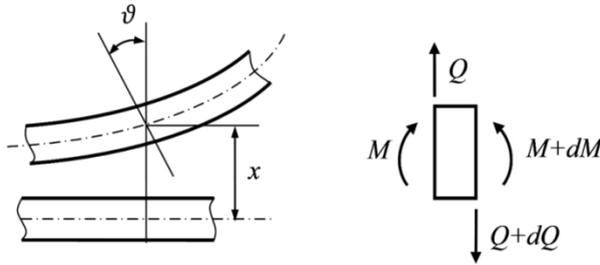


Рисунок 5.17

Сокращая все члены этого уравнения на dz , и подставляя вместо Q выражение (5.48), получим:

$$\frac{GS}{\alpha} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0. \quad (5.49)$$

Записывая уравнение моментов относительно левой грани элемента, включая момент сил инерции при повороте сечений

$$-M + M + \frac{\partial M}{\partial z} dz - Q dz + \frac{\partial Q}{\partial z} dz^2 - \rho J dz \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 0,$$

сокращая все члены этого уравнения на dz , пренебрегая малыми второго порядка и заменяя M , Q выражениями (5.48), получим:

$$EJ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - \frac{GS}{\alpha} \left(\vartheta - \frac{\partial x}{\partial z} \right) - \rho J \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 0. \quad (5.50)$$

Уравнения (5.49), (5.50) это уравнения движения балки со сдвиговыми деформациями и моментами инерции при повороте сечений. Такая балка получила название «балка Тимошенко».

Уравнения (5.49), (5.50) обычно записывают в виде

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{\alpha \rho}{G} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = \frac{GS}{\alpha EJ} \left(\vartheta - \frac{\partial x}{\partial z} \right). \quad (5.52)$$

Эти уравнения, в отличие от уравнений движения балки, полученных на основе технической теории изгиба, являются волновыми. В этом можно убедиться, если принять, что правые части этих уравнений малы. Тогда левые части представляют собой волновые уравнения относительно двух обобщенных координат x, ϑ . Из этих уравнений следует, что волны, связанные с поперечным смещением сечений, распространяются со скоростью

$$a_x = \sqrt{G/\alpha\rho},$$

а волны, связанные с поворотом сечений из-за сдвиговых деформаций, распространяются со скоростью продольных волн:

$$a_\vartheta = \sqrt{E/\rho}.$$

Общее решение уравнений (5.51), (5.52) довольно громоздкое. Оно описано, например, в работах [6, 10, 21]. Поэтому для оценки влияния на собственные частоты колебаний балки сдвиговых деформаций и продольных сил инерции ограничимся рассмотрением наиболее простого частного случая, когда балка по краям имеет шарнирные опоры (рисунок 5.9).

Граничные условия в этом случае имеют вид (5.22), (5.23):

$$u(0) = 0, \quad \frac{d^2u}{dz^2}(0) = 0, \quad u(l) = 0, \quad \frac{d^2u}{dz^2}(l) = 0,$$

где $u = u(z)$ – амплитудная функция; l – длина балки.

Эти граничные условия будут выполнены, если решения уравнений (5.51), (5.52) принять в виде:

$$x = A \sin \frac{k\pi z}{l} \cos(pt + \varphi), \quad (5.53)$$

$$\vartheta = B \cos \frac{k\pi z}{l} \cos(pt + \varphi), \quad k = 1, 2, 3 \dots, \quad (5.54)$$

где A, B – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Дифференцируя функции (5.53), (5.54) и подставляя в первое уравнение движения (5.51), запишем:

$$-\frac{k^2\pi^2}{l^2}A \sin \frac{k\pi z}{l} \cos(pt + \varphi) + \frac{\alpha\rho}{G}p^2A \sin \frac{k\pi z}{l} \cos(pt + \varphi) = -\frac{k\pi}{l}B \sin \frac{k\pi z}{l} \cos(pt + \varphi).$$

Подстановка решений (5.53), (5.54) во второе уравнение движения (5.52) дает:

$$-\frac{k^2\pi^2}{l^2}B \cos \frac{k\pi z}{l} \cos(pt + \varphi) + \frac{\rho}{E}p^2B \cos \frac{k\pi z}{l} \cos(pt + \varphi) = \frac{GS}{\alpha EJ}B \cos \frac{k\pi z}{l} \cos(pt + \varphi) - \frac{k\pi}{l} \frac{GS}{\alpha EJ}A \cos \frac{k\pi z}{l} \cos(pt + \varphi).$$

После сокращения левых и правых частей этих уравнений на одинаковые множители, получим систему алгебраических уравнений:

$$A \left(\frac{\alpha\rho}{G}p^2 - \frac{k^2\pi^2}{l^2} \right) + \frac{k\pi}{l}B = 0,$$

$$A \frac{k\pi}{l} \frac{GS}{\alpha EJ} + B \left(\frac{\rho}{E}p^2 - \frac{k^2\pi^2}{l^2} - \frac{GS}{\alpha EJ} \right) = 0.$$

Составляя определитель этой системы, разворачивая его и приравнивая к нулю, получим частотное уравнение:

$$\left(\frac{\alpha\rho}{G}p^2 - \frac{k^2\pi^2}{l^2} \right) \left(\frac{\rho}{E}p^2 - \frac{k^2\pi^2}{l^2} - \frac{GS}{\alpha EJ} \right) - \frac{k^2\pi^2}{l^2} \frac{GS}{\alpha EJ} = 0.$$

Раскрывая скобки, приведем последнее уравнение к виду

$$p^4 - 2h_k p^2 + \lambda_k^2 = 0,$$

где

$$2h_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2\rho} \left(E + \frac{G}{\alpha} \right) + \frac{GS}{\alpha\rho J}, \quad \lambda_k^2 = \frac{k^2\pi^2}{l^4} \frac{GE}{\alpha\rho^2}.$$

Решение этого уравнения дает два спектра собственных частот:

низший спектр

$$p_{k1} = \sqrt{h - \sqrt{h^2 - \lambda^2}},$$

и высший спектр

$$p_{k2} = \sqrt{h + \sqrt{h^2 - \lambda^2}}.$$

Техническая теория изгиба высший спектр частот вообще не улавливает.

Низший спектр частот соответствует такой форме колебаний, при которой поперечные сечения поворачиваются в ту же сторону, что и касательные к изогнутой оси балки, а высший спектр соответствует повороту сечений и касательной к изогнутой оси балки в разные стороны.

Частота p_{k1} всегда оказывается ниже, чем частота, вычисленная по технической теории изгиба, не учитывающей сдвиговые деформации.

Ниже в качестве примера приведена таблица собственных частот колебаний балки прямоугольного сечения (таблица 5.4) с отношением длины к высоте поперечного сечения, равным 10.

Таблица 5.4 – Значения собственных частот колебаний балки без учета и с учетом деформаций сдвига и момента инерции вращения сечений

Число полуволн k	1	2	3	4	5
Техническая теория, p_{k0}/p_0	1	4	9	16	25
Низший спектр, p_{k1}/p_0	0,98	3,74	7,92	13,08	18,77
Высший спектр, p_{k2}/p_0	70,0	73,6	78,2	84,0	91,6

В таблице приведены отношения собственных частот балки без учета сдвигов p_{k0} , частот низшего p_{k1} и высшего p_{k2} спектров к низшей частоте p_0 балки без учета сдвигов.

Из этой таблицы следует, что для первой низшей частоты пренебрежение сдвиговыми деформациями дает погрешность в определении собственных частот порядка 2 %, а для пятой гармоники колебаний погрешность составляет

$$\delta = \frac{25-18,77}{18,77} \cdot 100 \% = 25 \%$$

Следовательно, с увеличением частоты колебаний и уменьшением длины волны погрешность, обусловленная допущениями технической теории изгиба, возрастает.

5.8. Влияние вязкого трения на поперечные колебания балки

Допустим, что в процессе колебаний на балку действуют внешние и внутренние силы вязкого трения, равномерно распределенные по её длине. Обычно коэффициенты вязкого трения пропорциональны массам или жесткостям элементов системы.

Выделим в балке элементарный участок dz с действующими на него силами (рисунок 5.18). Масса этого участка $m_0 dz$. Предположим, что на этот участок действует внешняя сила вязкого трения, пропорциональная скорости его движения:

$$dF_1 = \alpha_1 m_0 dz \frac{\partial x}{\partial t}.$$

Здесь $\alpha_1 m_0 dz$ – коэффициент вязкого сопротивления, пропорциональный распределенной массе; α_1 – коэффициент пропорциональности.

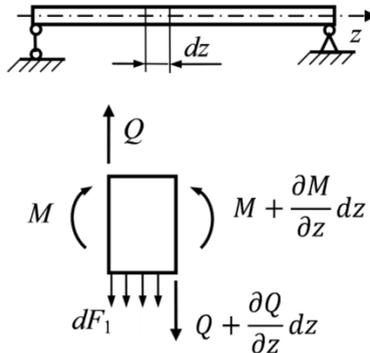


Рисунок 5.18

Внутреннее трение примем пропорциональным скорости деформации и вместо закона Гука запишем

$$\sigma = E \left(\varepsilon + \alpha_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right),$$

где ε , σ – соответственно деформации и напряжения; α_2 – коэффициент пропорциональности.

Изгибающий момент в сечении зависит от кривизны оси балки χ и от скорости изменения кривизны $\partial\chi/\partial t$:

$$M = EJ \left(\chi + \alpha_2 \frac{\partial \chi}{\partial t} \right).$$

Заменяя кривизну её приближенным значением $\chi = \partial^2 x / \partial z^2$, получим:

$$M = EJ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \alpha_2 \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t} \right). \quad (5.55)$$

Уравнение проекций всех сил, действующих на элемент dz , включая силы инерции, на нормаль к оси балки имеет вид:

$$Q - Q - \frac{\partial Q}{\partial z} dz - \alpha_1 m_0 dz \frac{\partial x}{\partial t} - m_0 dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0,$$

или после сокращения всех членов на dz :

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \alpha_1 m_0 \frac{\partial x}{\partial t} + m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0. \quad (5.56)$$

Записывая уравнения моментов относительно левой грани выделенного элемента

$$-M + M + \frac{\partial M}{\partial z} dz - Q dz - \frac{\partial Q}{\partial z} dz^2 + dF_1 \frac{dz}{2} = 0,$$

и пренебрегая малыми второго порядка, получим:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = Q.$$

Подставляя это выражение вместо Q в уравнение (5.56) и учитывая (5.55), запишем уравнение движения в конечном виде:

$$m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \alpha_1 m_0 \frac{\partial x}{\partial t} + EJ \left(\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \alpha_2 \frac{\partial^5 x}{\partial z^4 \partial t} \right) = 0. \quad (5.57)$$

Для решения этого уравнения движения используем метод главных координат. В соответствии с этим методом представим решение в виде

$$x(z, t) = u_k(z)q_k(t), \quad (5.58)$$

где $u_k(z)$ – амплитудная функция, зависящая только от координаты z ; $q_k(t)$ – главная координата, зависящая только от времени.

Подставляя это решение в уравнение движения (5.57), получим:

$$m_0 \ddot{q}_k u_k + \alpha_1 m_0 \dot{q}_k u_k + EJ q_k \frac{d^4 u_k}{dz^4} + EJ \alpha_2 \frac{d^4 u_k}{dz^4} \dot{q}_k = 0. \quad (5.59)$$

Из уравнения для амплитудной функции при свободных изгибных колебаниях балки (5.18) следует

$$\frac{d^4 u_k}{dz^4} - \frac{m_0 p_k^2}{EJ} u_k = 0, \quad \frac{d^4 u_k}{dz^4} = \frac{m_0 p_k^2}{EJ} u_k.$$

Подставляя последнее соотношение в уравнение (5.59) и сокращая все члены на $m_0 u_k$, приходим к дифференциальному уравнению относительно главной координаты:

$$\ddot{q}_k + (\alpha_1 + p_k^2 \alpha_2) \dot{q}_k + p_k^2 q_k = 0. \quad (5.60)$$

Его характеристическое уравнение

$$r^2 + 2h_k r + p_k^2,$$

где $2h_k = (\alpha_1 + p_k^2 \alpha_2)$, имеет два корня:

$$r_{1,2} = -h_k \pm \sqrt{h_k^2 - p_k^2}.$$

Если $h_k > p_k$, то оба корня действительные и решение дифференциального уравнения (5.60) имеет вид:

$$q_k = e^{-h_k t} (A_1 e^{\lambda_k t} + A_2 e^{-\lambda_k t}), \quad \lambda_k = \sqrt{h_k^2 - p_k^2}.$$

Если $h_k < p_k$, то корни комплексные и решение имеет вид:

$$q_k = e^{-h_k t} (A_{1k} \sin \lambda_k t + A_{2k} \cos \lambda_k t),$$

$$\lambda_k = \sqrt{p_k^2 - h_k^2}.$$

В обоих случаях колебания являются затухающими, при времени, стремящемся к бесконечности, амплитуда колебаний стремится к нулю. Напомним, что интенсивность затухания можно оценить логарифмическим декрементом, показывающим уменьшение амплитуды колебаний за один период и связанным с периодом колебаний T соотношением $\delta = hT$. Но

$$T = 2\pi/p_k, \quad h = 0,5(\alpha_1 + p_k^2\alpha_2).$$

Тогда логарифмический декремент можно записать в виде

$$\delta = \pi \left(\frac{\alpha_1}{p_k} + \alpha_2 p_k \right). \quad (5.61)$$

Из последней формулы следует, что при внешнем трении, характеризующимся коэффициентом α_1 , быстрее затухают низкочастотные составляющие гармоники, а при внутреннем трении, характеризующимся коэффициентом α_2 , наоборот, высокочастотные составляющие гармоники.

5.9. Приближенные методы определения собственных частот колебаний балок

В предыдущей главе, рассматривая системы с конечным числом степеней свободы, мы уже познакомились с приближенными методами оценки низшей собственной частоты: методом Релея и формулой Донкерли. Эти методы используются и для оценки собственных частот систем с распределенными параметрами. Но при рассмотрении таких систем в формулах приближенных методов вместо сумм фигурируют интегралы.

Метод Релея

Напомним, что в соответствии с методом Релея низшая собственная частота находится по приближенной формуле (4.28)

$$p^2 = \frac{2U_0}{\mathfrak{M}},$$

где U_0 – потенциальная энергия деформации системы; \mathfrak{M} – обобщенная масса системы.

Потенциальная энергия деформации по-прежнему определяется формулами (4.30), (4.31)

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(z)}{EJ} dz = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2u}{dz^2} \right)^2 dz,$$

где $M(z)$ – амплитудное значение изгибающего момента в сечении балки с координатой z .

Но обобщенная масса вместо (4.29) выражается через интеграл

$$\mathfrak{M} = \int_0^l m_0 u^2(z) dz. \quad (5.62)$$

Если система имеет элементы как с распределенными, так и с сосредоточенными параметрами, например, балка с распределенными параметрами, несущая n сосредоточенных грузов, то обобщенная масса определится как

$$\mathfrak{M} = \int_0^l m_0 u^2(z) dz + \sum_{i=1}^n m_i u_i^2. \quad (5.63)$$

Если в системе, представленной на рисунке 4.13, учитывать и распределенную массу балки, которая имеет постоянную по длине балки величину m_0 , то при выбранной форме колебаний (4.33) обобщенная масса определится как

$$\mathfrak{M} = m_0 \int_0^l \left(\frac{z}{l} \right)^4 dz + m = \frac{m_0 l}{5} + m,$$

т. е. в обобщенную массу войдет пятая часть массы балки.

Если принять $m_0 l / m = \beta$, то $\mathfrak{M} = m(1 + 0,2\beta)$.

Потенциальная энергия деформации остается такой же, как и в прежней задаче: $U_0 = 2EJ/l^3$. Подставляя значение обобщенной массы и потенциальной энергии в формулу Релея, найдем низшую собственную частоту балки с грузом:

$$p = 2 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3(1+0,2\beta)}}.$$

Из этой формулы видно, что учет распределенной массы балки уменьшает собственную частоту её колебаний.

Формула Донкерли

Для систем с распределенными параметрами формула Донкерли (4.35) записывается в виде

$$p^2 = \frac{1}{\int_0^l m_0 \delta(z) dz}, \quad (5.64)$$

где $\delta(z) = u(z)/P$.

В случае системы со смешанными параметрами эта формула имеет вид

$$p^2 = \frac{1}{\int_0^l m_0 \delta(z) dz + \sum_{i=1}^n m_i \delta_{ii}}. \quad (5.65)$$

Для рассматриваемого примера по формуле Донкерли получим:

$$p = \sqrt{\frac{EJ}{ml^3(1+\frac{1}{3}\beta)}}$$

и, следовательно, истинное значение низшей собственной частоты лежит в диапазоне

$$\sqrt{\frac{EJ}{ml^3(1+\frac{1}{3}\beta)}} < p < 2 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3(1+0,2\beta)}}.$$

Метод Релея-Ритца

Метод Релея-Ритца основан на вариационном принципе Гамильтона. Согласно этому принципу для консервативной системы интеграл на промежутке времени от t_1 до t_2 разности кинетической и потенциальной энергий системы величина постоянная. Следовательно, вариация этой величины в указанном промежутке времени равна нулю, т. е.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0. \quad (5.66)$$

Если собственные колебания системы описывать гармоническими функциями

$$x_i = u_i \sin pt, \quad \dot{x}_i = u_i p \cos pt,$$

и записать кинетическую и потенциальную энергии системы

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} p^2 \cos^2 pt \sum_{i=1}^n m_i u_i^2 = \\ &= \frac{1}{2} \mathfrak{M} p^2 \cos^2 pt, \end{aligned}$$

$$U = U_0 \sin^2 pt,$$

то после подстановки выражений для энергий в формулу (5.66) она примет вид

$$\delta \left[\frac{1}{2} \mathfrak{M} p^2 \int_{t_1}^{t_2} \cos^2 pt \, dt - U_0 \int_{t_1}^{t_2} \sin^2 pt \, dt \right] = 0.$$

Принимая в качестве интервала интегрирования один период колебаний $T = 2\pi/p$, после вычисления интегралов получим:

$$\int_0^{2\pi/p} \cos^2 pt \, dt = \frac{\pi}{p}, \quad \int_0^{2\pi/p} \sin^2 pt \, dt = \frac{\pi}{p},$$

и вариационное уравнение (5.66) принимает вид

$$\delta \left(\frac{1}{2} \mathfrak{M} p^2 - U_0 \right) = 0. \quad (5.67)$$

Суть метода Релея-Ритца заключается в том, что форма колебаний задается не в виде одной функции, а в виде ряда функций, каждая из которых удовлетворяет граничным условиям:

$$u_i = a_1 u_{i(1)} + a_2 u_{i(2)} + \dots + a_n u_{i(n)}, \quad (5.68)$$

где a_r – неопределенные параметры; $u_{i(k)}$ – линейно независимые функции координат, удовлетворяющие граничным условиям.

Выбор числа членов ряда (5.68) зависит от требуемой точности решения.

Зная функцию u_i можно найти кинетическую и потенциальную энергии системы. В выражения для энергий бу-

дут входить члены a_r^2 . Тогда из условия (5.67) следует система уравнений:

$$\frac{1}{2} p^2 \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial a_r} - \frac{\partial U_0}{\partial a_r} = 0, \quad r = 1, 2, 3, \dots k. \quad (5.69)$$

Составляя определитель этой системы, развертывая его и приравнявая к нулю, получаем частотное уравнение k -ой степени относительно p^2 .

Если в разложении (5.68) удерживать только первый член, то как частный случай, получим формулу Релея.

Рассмотрим несколько примеров.

Определим собственные частоты колебаний шарнирно опертой балки (рисунок 5.9).

Вначале зададим форму колебаний, включающую один параметр a_1 и удовлетворяющую граничным условиям. Граничные условия для шарнирно опертой балки длиной l запишутся в виде

$$u(0) = 0, \quad \frac{d^2 u}{dz^2}(0) = 0, \quad u(l) = 0, \quad \frac{d^2 u}{dz^2}(l) = 0. \quad (5.70)$$

Этим условиям удовлетворяет функция

$$u(z) = a_1 \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Приняв эту форму колебаний, вычислим обобщенную массу и потенциальную энергию системы по формулам (5.62), (4.31):

$$\mathfrak{M} = m_0 a_1^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = \frac{m_0 a_1^2 l}{2},$$

$$U_0 = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz = \frac{EJ a_1^2 \pi^4}{2l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = \frac{EJ a_1^2 \pi^4}{4l^3}.$$

Вычислим частные производные от обобщенной массы и потенциальной энергии по параметру a_1 :

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial a_1} = m_0 l a_1, \quad \frac{\partial U_0}{\partial a_1} = \frac{EJ a_1 \pi^4}{2l^3}.$$

Подставляя эти производные в уравнение (5.69), запишем

$$\frac{1}{2} m_0 l a_1 p^2 - \frac{E J a_1 \pi^4}{2 l^3} = 0,$$

откуда находим

$$p^2 = \frac{E J \pi^4}{m_0 l^4}, \quad p = \pi^2 \sqrt{E J / m_0 l^4}.$$

Точно такое же решение дает и формула Релея. Необходимо отметить, что это решение точное, потому что выбранная форма колебаний в точности соответствует истинной.

Примем теперь в разложении (5.68) два члена, каждый из которых удовлетворяет граничным условиям:

$$u(z) = a_1 \sin \frac{\pi z}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi z}{l}.$$

Вычислим обобщенную массу и потенциальную энергию системы при этой форме колебаний:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= m_0 \int_0^l \left(a_1 \sin \frac{\pi z}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi z}{l} \right)^2 dz = \frac{m_0 a_1^2 l}{2} + \frac{m_0 a_2^2 l}{2}, \\ U_0 &= \frac{E J}{2} \int_0^l \left(\frac{a_1 \pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l} + \frac{a_2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi z}{l} \right)^2 dz = \\ &= \frac{E J \pi^4}{4 l^3} (a_1^2 + 16 a_2^2). \end{aligned}$$

Найдем частные производные от обобщенной массы и потенциальной энергии по параметрам a_1 и a_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial a_1} &= m_0 l a_1, & \frac{\partial U_0}{\partial a_1} &= \frac{E J \pi^4 a_1}{2 l^3}, \\ \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial a_2} &= m_0 l a_2, & \frac{\partial U_0}{\partial a_2} &= \frac{8 E J \pi^4 a_2}{l^3}. \end{aligned}$$

Подставляя эти производные в (5.69), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_0 l a_1 p^2 - \frac{E J \pi^4 a_1}{2 l^3} &= 0, \\ \frac{1}{2} m_0 l a_2 p^2 - \frac{8 E J \pi^4 a_2}{l^3} &= 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение повторяет полученное ранее. Из него следует

$$p_1 = \pi^2 \sqrt{EJ/m_0 l^4}.$$

Из второго уравнения найдем:

$$p_2 = 4\pi^2 \sqrt{EJ/m_0 l^4}.$$

Таким образом, в отличие от метода Релея метод Релея-Ритца позволяет определить несколько первых собственных частот. Количество частот равно количеству членов в разложении амплитудной функции (5.68).

5.10. Вынужденные колебания балок

Метод главных координат

Если собственные частоты и формы колебаний систем с распределенными параметрами известны, то анализ вынужденных колебаний можно провести методом главных координат путем разложения колебаний по собственным формам и частотам.

Рассмотрим применение этого метода на примере вынужденных колебаний шарнирно опертой балки (рисунок 5.19), к середине которой приложена возмущающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону $P(t) = P_0 \cos \omega t$.

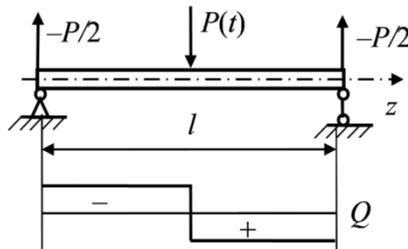


Рисунок 5.19

В соответствии с методом главных координат смещение любой точки балки может быть записано в виде

$$x(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) q_k(t),$$

где $u_k(z)$ – амплитудная функция, $q_k(t)$ – главная координата, определяемая из уравнения

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{Q_k(t)}{\mathfrak{M}_k};$$

p_k – собственная частота при k -ой форме колебаний; Q_k – обобщенная сила

$$Q_k = \sum_{i=1}^n P_i(t) u_{ik};$$

\mathfrak{M}_k – обобщенная масса

$$\mathfrak{M}_k = \sum_{i=1}^n m_i u_{ik}^2.$$

Для системы с распределенными параметрами обобщенная масса выражается через интеграл

$$\mathfrak{M}_k = \int_0^l m_0 u_k^2(z) dz,$$

где m_0 – масса единицы длины балки.

Для шарнирно опертой балки постоянного сечения амплитудная функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$u(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(0) = 0, \quad u(l) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(l) = 0, \quad (5.71)$$

имеет вид

$$u_k = \sin \frac{k\pi z}{l}, \quad (5.72)$$

а собственные частоты, как следует из предыдущих лекций, определяются формулой:

$$p_k = k^2 \pi^2 \sqrt{EJ/m_0 l^4}.$$

Запишем эту формулу в виде:

$$p_k = k^2 p_1, \quad (5.73)$$

где p_1 – низшая частота колебаний, соответствующая форме $k = 1$.

Тогда с учетом амплитудной функции обобщенная сила и приведенная масса определяются как

$$Q_k = P_0 \cos \omega t \cdot u_k(l/2) = P_0 \cos \omega t \sin \frac{k\pi}{2};$$

$$\mathfrak{M}_k = m_0 \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi z}{l} dz = \frac{m_0}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2k\pi z}{l}\right) dz = \frac{m_0 l}{2}.$$

Дифференциальное уравнение для определения главной координаты при этом будет иметь вид:

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{2P_0}{m_0 l} \sin \frac{k\pi}{2} \cos \omega t. \quad (5.74)$$

Решение этого уравнения состоит из суммы общего решения однородного уравнения \bar{q}_k и частного решения неоднородного уравнения \tilde{q}_k :

$$q_k = \bar{q}_k + \tilde{q}_k.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\bar{q}_k = A \cos p_k t + B \sin p_k t, \quad (5.75)$$

а частное решение неоднородного уравнения имеет такой же вид, как и правая часть уравнения

$$\tilde{q}_k = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

При этом

$$\ddot{\tilde{q}}_k = -C_1 \omega^2 \cos \omega t - C_2 \omega^2 \sin \omega t.$$

Для нахождения постоянных коэффициентов C_1 и C_2 подставим частное решение и его вторую производную в левую часть уравнения (5.74) и приравняем коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой части. Получим систему уравнений:

$$C_1(p_k^2 - \omega^2) = \frac{2P_0}{m_0 l} \sin \frac{k\pi}{2},$$

$$C_2(p_k^2 - \omega^2) = 0.$$

Так как в общем случае $p_k^2 \neq \omega^2$, то из второго уравнения следует $C_2 = 0$, а из первого уравнения

$$C_1 = \frac{2P_0}{m_0 l(p_k^2 - \omega^2)} \sin \frac{k\pi}{2}.$$

При записи общего решения однородного уравнения (5.75) не учитывались потери энергии на трение и рассеяние в окружающую среду. Но эти потери неизбежны и всегда присутствуют в той или иной мере. В результате этого свободные колебания системы будут затухающими. Следовательно, в установившемся стационарном режиме движения общее решение уравнения (5.74) будет соответствовать его частному решению.

Отсюда следует $q_k = \tilde{q}_k$, и смещения в любом сечении балки при вынужденных колебаниях будут описываться функцией:

$$\begin{aligned} x(z, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) q_k(t) = \\ &= \frac{2P_0}{m_0 l} \cos \omega t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p_k^2 - \omega^2)} \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi z}{l}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

В этом выражении присутствуют только слагаемые, соответствующие нечетным значениям k , т. е. симметричным формам колебаний. При четных значениях k имеет место $\sin(k\pi/2) = 0$, и слагаемые, соответствующие несимметричным формам, равны нулю.

Из решения (5.76) видно, что при равенстве собственной частоты и частоты изменения вынуждающей силы ($p_k = \omega$) амплитуда колебаний стремится к бесконечности, т.е. в системе наступает резонанс.

Для оценки сходимости ряда (5.76) рассмотрим среднее сечение балки с координатой $z = l/2$. Для этого сечения формула (5.76) примет вид:

$$x(z, t) = \frac{2P_0}{m_0 l} \cos \omega t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p_k^2 - \omega^2)} \sin^2 \frac{k\pi}{2},$$

или с учетом соотношения (5.73) и того, что $\sin^2(k\pi/2) = 1$,

$$x(z, t) = \frac{2P_0}{m_0 l} \cos \omega t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4 p_1^2 - \omega^2}.$$

Примем, что частота возмущающей силы в два раза меньше низшей собственной частоты балки ($\omega = 0,5p_1$). Тогда

$$x(z, t) = \frac{8P_0}{m_0 l p_1^2} \cos \omega t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^4 - 1} =$$

$$\frac{8P_0}{m_0 l p_1^2} \cos \omega t \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{323} + \frac{1}{2499} + \dots \right).$$

Из последнего выражения видно, что достаточную точность дает удержание из бесконечного ряда только первого слагаемого. Второе слагаемое составляет менее 1 % от первого, а третье слагаемое почти на три порядка меньше первого.

Следует обратить особое внимание на то, что сходимость ряда для изгибающих моментов a , следовательно, и для напряжений оказывается более медленной и при прочностных расчетах необходимо учитывать в разложении большее число членов.

Например, для изгибающего момента в сечении $z = l/2$ имеем:

$$M(z, t) = -EJ \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{2P_0 EJ \pi^2}{m_0 l^3} \cos \omega t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4 p_1^2 - \omega^2}.$$

При $\omega = 0,5p_1$

$$M(z, t) = \frac{8P_0 EJ \pi^2}{m_0 l^3 p_1^2} \cos \omega t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4k^4 - 1} =$$

$$= \frac{8P_0 EJ \pi^2}{m_0 l^3 p_1^2} \cos \omega t \left(\frac{1}{3} + \frac{9}{323} + \frac{25}{2499} + \frac{49}{9603} + \dots \right).$$

Здесь второй член суммы составляет уже 8,4 % от первого, третий член – 3 %, четвертый член – 1,5 % и только пятый член составляет менее 1 % от первого. В этом случае для достаточной точности необходимо учитывать уже четыре-пять слагаемых суммы.

Метод гармонических функций

Из задачи, рассмотренной в предыдущем разделе, следует, что при стационарных колебаниях, вызванных гармонической вынуждающей силой, решение уравнения движения определяется только частным решением, кото-

рое имеет такой же вид, как и правая часть уравнения. Поэтому при гармонической вынуждающей силе задачу можно решить более просто, если решение уравнения колебаний балки сразу записать в виде гармонической функции времени с той же частотой, что и вынуждающая сила, т. е.

$$x(z, t) = u(z) \cos \omega t. \quad (5.77)$$

Вспомним, что уравнение поперечных колебаний балки, основанное на технической теории изгиба, имеет вид

$$EJ \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0.$$

Подставляя решение (5.77) в это уравнение, и сокращая все члены на $\cos \omega t$, получим дифференциальное уравнение относительно амплитудной функции:

$$\frac{d^4 u}{dz^4} - \alpha^4 u = 0, \quad (5.78)$$

где $\alpha^4 = m_0 \omega^2 / EJ$.

Уравнение (5.78) отличается от уравнения свободных колебаний (5.18) только тем, что в коэффициент α вместо собственной частоты p входит частота вынужденных колебаний ω .

Решение этого уравнения на участках балки, свободных от нагрузки, можно записать через функции Крылова

$$u(z) = C_1 K_1(\alpha z) + C_2 K_2(\alpha z) + C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z), \quad (5.79)$$

где $C_1 - C_4$ постоянные, определяемые из граничных и начальных условий задачи.

В данном случае при симметричной деформации балки можно рассматривать только её половину, и записать граничные условия в виде:

для левого конца балки

$$u(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(0) = 0,$$

для среднего сечения $z = l/2$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{l}{2} \right) = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \left(\frac{l}{2} \right) = -\frac{P_0}{2EJ}.$$

Последнее условие вытекает из эпюры распределения перерезывающих сил в балке (рисунок 5.19). Слева от точки приложения силы P амплитуда перерезывающей силы равна $-P_0/2$.

Подставляя амплитудную функцию (5.79) в первую пару граничных условий, найдем $C_1 = 0$, $C_3 = 0$.

Обозначая $\lambda = \frac{\alpha l}{2}$, из второй пары граничных условий запишем:

$$C_2 K_1(\lambda) + C_4 K_3(\lambda) = 0,$$

$$\alpha^3 C_2 K_3(\lambda) + C_4 \alpha^3 K_1(\lambda) = -\frac{P_0}{2EJ}.$$

Решая эту систему уравнений, найдем:

$$C_2 = \frac{P_0}{2\alpha^3 EJ} \cdot \frac{K_3(\lambda)}{K_1^2(\lambda) - K_3^2(\lambda)}, \quad C_4 = -\frac{P_0}{2\alpha^3 EJ} \cdot \frac{K_1(\lambda)}{K_1^2(\lambda) - K_3^2(\lambda)}.$$

С учетом найденных постоянных C_1 – C_4 амплитудная функция на интервале $0 < z < \frac{l}{2}$ запишется в виде

$$u(z) = \frac{P_0}{2\alpha^3 EJ} \cdot \frac{K_3(\lambda)K_2(\alpha z) - K_1(\lambda)K_4(\alpha z)}{K_1^2(\lambda) - K_3^2(\lambda)}. \quad (5.80)$$

В точке приложения силы прогиб балки определяется формулой

$$u(l/2) = \frac{P_0}{2\alpha^3 EJ} \cdot \frac{K_3(\lambda)K_2(\lambda) - K_1(\lambda)K_4(\lambda)}{K_1^2(\lambda) - K_3^2(\lambda)}.$$

Расписывая функции Крылова, и приводя подобные члены, эту формулу можно привести к виду

$$u(l/2) = \frac{P_0}{4\alpha^3 EJ} \cdot \frac{ch \lambda \sin \lambda - sh \lambda \cos \lambda}{2ch \lambda \cos \lambda} = \frac{P_0}{4\alpha^3 EJ} (tg \lambda - th \lambda).$$

Учитывая решение (5.80) для амплитудных значений изгибающих моментов соответственно получим:

$$M(z) = -EJ \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\frac{P_0}{2\alpha} \cdot \frac{K_3(\lambda)K_4(\alpha z) - K_1(\lambda)K_2(\alpha z)}{K_1^2(\lambda) - K_3^2(\lambda)}.$$

Для среднего сечения балки после подстановки в последнее выражение функций Крылова и приведения подобных, получается:

$$M(l/2) = \frac{P_0 l}{8\lambda} (tg \lambda + th \lambda).$$

Преимущество метода гармонических функций перед методом главных координат заключается в том, что он позволяет получить решение уравнения движения в замкнутом виде, а не в виде бесконечных рядов. Что существенно облегчает анализ процесса колебаний. Но этот метод может быть использован только при гармонической вынуждающей силе, в то время как метод главных координат позволяет получать решение при любом законе изменения вынуждающей силы.

Вынужденные колебания при кинематическом возбуждении

Метод гармонических функций удобен и для расчета вынужденных колебаний при кинематическом возбуждении балки. Рассмотрим пример его применения. Допустим, один конец балки шарнирно закреплен, а другой конец совершает заданное движение, описываемое гармонической функцией

$$x(l, t) = f \cos \omega t.$$

Решение уравнения свободных колебаний балки ищем в виде гармонической функции с частотой кинематического возбуждения

$$x(z, t) = u(z) \cos \omega t,$$

где

$$u(z) = C_1 K_1(\alpha z) + C_2 K_2(\alpha z) + C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z).$$

Граничные условия на левом конце балки имеют вид

$$u(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(0) = 0,$$

а на правом конце

$$u(l) = f, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(l) = 0.$$

Из первой пары граничных условий следует $C_1 = 0$, $C_3 = 0$. Из второй пары, обозначая $al = \lambda$, получим:

$$C_2 K_2(\lambda) + C_4 K_4(\lambda) = f,$$

$$C_2 K_4(\lambda) + C_4 K_2(\lambda) = 0.$$

Решая эту систему уравнений, найдем:

$$C_2 = f \frac{K_2(\lambda)}{K_2^2(\lambda) - K_4^2(\lambda)}, \quad C_4 = -f \frac{K_4(\lambda)}{K_2^2(\lambda) - K_4^2(\lambda)}.$$

С учетом этого амплитудная функция прогибов запишется так

$$u(z) = f \frac{K_2(\lambda)K_2(\alpha z) - K_4(\lambda)K_4(\alpha z)}{K_2^2(\lambda) - K_4^2(\lambda)}, \quad (5.81)$$

а амплитудная функция изгибающих моментов

$$M(z) = f \lambda^2 \frac{EJ}{l^2} \cdot \frac{K_2(\lambda)K_4(\alpha z) - K_4(\lambda)K_2(\alpha z)}{K_2^2(\lambda) - K_4^2(\lambda)}.$$

Из полученного решения можно найти собственную частоту колебаний балки. Известно, что когда собственная частота колебаний системы равна частоте вынуждающей нагрузки, в системе наступает резонанс. Он характеризуется резким возрастанием амплитуды колебаний. При этом если потери энергии в системе отсутствуют, то амплитуды колебаний стремятся к бесконечности. В данном случае это будет происходить тогда, когда знаменатель функции прогибов (5.81) будет равен нулю.

Приравнивая знаменатель к нулю, и расписывая функции Крылова, после приведения подобных членов получим:

$$sh \lambda \sin \lambda = 0.$$

Так как $sh \lambda \neq 0$, остается $\sin \lambda = 0$, $\lambda_k = \pi k$. С другой стороны, $\lambda_k = al = l^4 \sqrt{m_0 \omega^2 / EJ}$. Приравнивая два последних соотношения, найдем

$$\omega_* = k^2 \pi^2 \sqrt{EJ/m_0 l^3},$$

где ω_* = p_k – резонансная частота, равная собственной частоте колебаний.

5.11. Метод динамических податливостей

При исследовании гармонических колебаний сложных систем их удобно разделять на несколько простых подсистем. Это разделение достигается либо устранением связей между подсистемами, либо наоборот введением жестких связей. В первом случае задача будет решаться методом динамических податливостей, а во втором – методом динамических жесткостей.

Рассмотрим метод динамических податливостей на следующем примере. Допустим, консольная балка длиной l связана на конце с грузом массой m через упругий элемент с коэффициентом жесткости c (рисунок 5.20 а). Груз в свою очередь связан с опорой упругим элементом с таким же коэффициентом жесткости c .

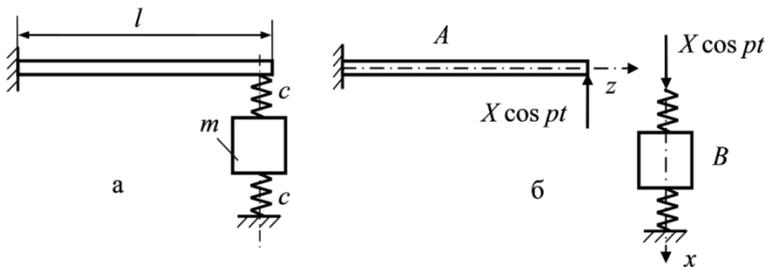


Рисунок 5.20

Необходимо определить собственные частоты и формы колебаний этой системы, если масса единицы длины балки m_0 , а её жесткость EJ .

Для определенности примем, что массы балки и груза одинаковы, т. е. $m = m_0 l$, а коэффициент жесткости c связан с жесткостью и длиной балки соотношением $c = 3EJ/l^3$.

Расчленим систему на две подсистемы A и B (рисунок 5.20 б). В подсистему A входит балка, а в подсистему B – груз с упругими элементами. Действие подсистем друг на друга заменим реакциями R , которые при гармонических колебаниях будут изменяться также по гармоническому закону:

$$R = X \cos pt,$$

где X – амплитуда реакции; p – собственная частота колебаний.

Так как перемещение упругой системы равно силе, умноженной на податливость, то из условия совместности деформаций балки и упругих элементов можно записать:

$$XD_1(p) \cos pt + XD_2(p) \cos pt = 0,$$

или

$$D_1(p) + D_2(p) = 0, \tag{5.82}$$

где D_1 , D_2 – динамические податливости подсистем, зависящие от частоты колебаний.

Зная зависимости динамических податливостей от частоты колебаний можно из уравнения (5.82) найти собственные частоты.

Определим динамическую податливость балки. Для этого нагрузим её единичной силой, изменяющейся по гармоническому закону ($X = 1$, рисунок 5.20 б) и найдем перемещение точки приложения силы.

Представим решение уравнения движения балки в виде

$$x(z, t) = u(z) \cos pt,$$

где $u(z)$ – амплитудная функция, выражающаяся через функции Крылова следующим образом:

$$u(z) = C_1 K_1(\alpha z) + C_2 K_2(\alpha z) + C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z),$$

$C_1 - C_4$ – постоянные величины, определяемые из граничных условий:

$$u(0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(l) = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}(l) = -\frac{1}{EJ}.$$

Из первых двух условий следует $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, а из третьего и четвертого

$$C_3 K_1(\lambda) + C_4 K_2(\lambda) = 0,$$

$$C_3 K_4(\lambda) + C_4 K_1(\lambda) = -\frac{1}{\alpha^3 EJ},$$

где $\lambda = \alpha l$.

Из полученной системы уравнений найдем:

$$C_3 = \frac{1}{\alpha^3 EJ \Delta} K_2(\lambda), \quad C_4 = -\frac{1}{\alpha^3 EJ \Delta} K_1(\lambda),$$

$$\Delta = K_1^2(\lambda) - K_2(\lambda)K_4(\lambda).$$

С учетом последних соотношений амплитудные перемещения балки будут описываться формулой:

$$u(z) = \frac{1}{\alpha^3 EJ \Delta} [K_2(\lambda)K_3(\alpha z) - K_1(\lambda)K_4(\alpha z)].$$

Динамическая податливость балки равна перемещению точки приложения единичной силы, т. е.

$$D_1 = u(l) = \frac{1}{\alpha^3 EJ \Delta} [K_2(\lambda)K_3(\lambda) - K_1(\lambda)K_4(\lambda)].$$

После развертывания функций Крылова, учитывая, что $\alpha = \lambda/l$, окончательно получим:

$$D_1 = \frac{l^3}{EJ \lambda^3} \cdot \frac{ch \lambda \sin \lambda - sh \lambda \cos \lambda}{1 - ch \lambda \cos \lambda}. \quad (5.83)$$

Для определения динамической податливости подсистемы B приложим к верхнему концу упругого элемента единичную силу, изменяющуюся по гармоническому закону ($X = 1$, рисунок 5.20 б). Для удобства поместим на этом конце фиктивную массу m_ϕ и запишем уравнение движения полученной двухмассовой системы:

$$m_\phi \ddot{x}_1 + c(x_1 - x_2) = 1 \cdot \cos pt,$$

$$m \ddot{x}_2 - c(x_1 - x_2) + cx_2 = 0,$$

где x_1, x_2 – перемещения масс m_ϕ и m соответственно.

Воспользовавшись методом гармонических функций, запишем решение этих уравнений в виде

$$x_1 = u_1 \cos pt, x_2 = u_2 \cos pt,$$

где u_1, u_2 – амплитудные функции.

Подставляя эти решения в уравнения движения, сокращая их левые и правые части на $\cos pt$, и учитывая, что $m_\phi = 0$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} c(u_1 - u_2) &= 1, \\ cu_1 - (2c - mp^2) &= 0, \end{aligned}$$

из которой найдем

$$u_1 = \frac{(2c - mp^2)}{c(c - mp^2)}.$$

Следовательно, динамическая податливость второй подсистемы, равная перемещению точки приложения единичной силы, будет определяться соотношением:

$$D_2 = u_1(p) = \frac{2 \left(1 - \frac{mp^2}{2c}\right)}{c \left(1 - \frac{mp^2}{c}\right)}.$$

Теперь для использования формулы (5.82) необходимо выразить податливость второй подсистемы через параметр λ . Так как по условию задачи $m = m_0 l$, $c = 3EJ/l^3$, то

$$\frac{mp^2}{c} = \frac{m_0 l^4 p^2}{3EJ} = \alpha^4 l^4 = \lambda^4.$$

Подставляя эти соотношения в последнюю формулу, получим:

$$D_2 = \frac{2l^3 \left(1 - \frac{1}{6}\lambda^4\right)}{3EJ \left(1 - \frac{1}{3}\lambda^4\right)}.$$

Подставляя выражения для динамических податливостей в условие совместности деформаций (5.82), запишем:

$$\frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{ch \lambda \sin \lambda - sh \lambda \cos \lambda}{1 - ch \lambda \cos \lambda} = -\frac{2 \left(1 - \frac{1}{6}\lambda^4\right)}{3 \left(1 - \frac{1}{3}\lambda^4\right)}.$$

Решая это уравнение графически или численно, найдем значения λ_k , а затем и собственные частоты по известной формуле:

$$p_k = \lambda_k^2 \sqrt{EJ/m_0 l^4}.$$

Для рассматриваемого примера первые три значения λ следующие:

$$\lambda_1 = 1,43, \quad \lambda_2 = 2,25, \quad \lambda_3 = 4,73,$$

а соответствующие им собственные частоты:

$$p_1 = 2,05 \sqrt{EJ/m_0 l^4}, \quad p_2 = 5,07 \sqrt{EJ/m_0 l^4}, \\ p_3 = 22,4 \sqrt{EJ/m_0 l^4}.$$

Решение показывает, что последующие частоты с достаточной точностью могут быть вычислены по формуле:

$$p_k = \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^4}}; \quad k = 4, 5, 6, \dots$$

Например, значение частоты для третьей формы колебаний, рассчитанное по этой формуле, равно $22,2 \sqrt{EJ/m_0 l^4}$, что отличается от точного значения всего на 0,9 %.

5.12. Вынужденные колебания рам. Метод динамических жесткостей

Метод динамических жесткостей основан на разделении системы на подсистемы и введении между ними жестких связей. Рассмотрим этот метод на примере вынужденных колебаний рам.

Допустим, необходимо построить эпюру изгибающих моментов и определить наиболее нагруженное сечение рамы, состоящей из двух стержней А и Б (рисунок 5.21 а) при действии на середину стержня А гармонической силы, изменяющейся по закону $P = P_0 \cos \omega t$. Найти собствен-

ные частоты колебаний рамы. Стержни имеют одинаковую жесткость EJ и погонную массу m_0 .

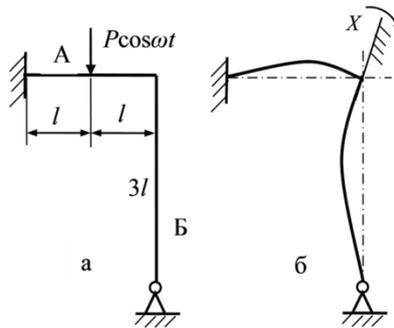


Рисунок 5.21

Для решения задачи методом динамических жесткостей введем в узел стержней дополнительную угловую связь, повернув узловое сечение на некоторый угол X и закрепив его (рисунок 5.21 б).

Запишем уравнение моментов для узлового сечения

$$X(R_A + R_B) + R_{AP} = 0, \quad (5.83)$$

где R_A , R_B , – соответственно динамические жесткости стержней; R_{AP} – реактивный момент от внешних сил в сечении с угловой связью.

Необходимо отметить, что если бы на стержень Б также действовала внешняя гармоническая сила, то в уравнение (5.83) вошла бы и реакция от этой силы R_{BP} .

Из уравнения (5.83) при известных значениях динамических жесткостей стержней и реакциях в узловом сечении от внешних сил можно найти амплитудное значение угла поворота:

$$X = -\frac{R_{AP}}{R_A + R_B}, \quad (5.84)$$

а затем построить эпюры изгибающих моментов для стержней рамы.

Для определения динамической жесткости стержня А рассмотрим схему, в которой под действием гармонического момента $R_A \cos \omega t$ узловое сечение поворачивается на единичный угол $1 \cdot \cos \omega t$ (рисунок 5.22 а).

Запишем амплитудную функцию прогибов через функции Крылова в виде:

$$u(z) = C_1 K_1(\alpha z) + C_2 K_2(\alpha z) + C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z), \quad (5.85)$$

где z – координата сечения; $C_1 - C_4$ – постоянные, определяемые из граничных условий; $\alpha = \sqrt[4]{m_0 \omega^2 / EJ}$.

Принимая за начало оси z узловое сечение стержня, и направляя ось влево, запишем граничные условия на краях стержня:

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad u''(0) = R_A / EJ, \quad (5.86)$$

$$u(2l) = 0, \quad u'(2l) = 0. \quad (5.87)$$

Здесь и далее принимается:

$$u' = \frac{du}{dz}, \quad u'' = \frac{d^2u}{dz^2}, \quad u''' = \frac{d^3u}{dz^3}.$$

Подставляя амплитудную функцию (5.85) в граничные условия на правом краю стержня (5.86), и учитывая свойства функций Крылова, получим:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{\alpha}, \quad C_3 = \frac{R_A}{\alpha^2 EJ}.$$

При этом амплитудная функция принимает вид:

$$u(z) = \frac{1}{\alpha} K_2(\alpha z) + \frac{R_A}{\alpha^2 EJ} K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z). \quad (5.88)$$

Подставляя эту функцию в граничные условия на другом краю стержня (5.87), и обозначая $\alpha l = \lambda$, получим систему уравнений:

$$\frac{R_A}{\alpha^2 EJ} K_3(2\lambda) + C_4 K_4(2\lambda) = -\frac{1}{\alpha} K_2(\alpha z),$$

$$\frac{R_A}{\alpha^2 EJ} K_2(2\lambda) + C_4 K_3(2\lambda) = -\frac{1}{\alpha} K_1(2\lambda),$$

из которой найдем:

$$R_A = \frac{EJ\lambda}{l} \cdot \frac{[K_1(2\lambda)K_4(2\lambda) - K_2(2\lambda)K_3(2\lambda)]}{[K_3^2(2\lambda) - K_2(2\lambda)K_4(2\lambda)]}. \quad (5.89)$$

Для определения динамической жесткости стержня Б повернем его узловое сечение на единичный угол $1 \cdot \cos \omega t$ (рисунок 5.22 б) и найдем гармонический момент $R_B \cos \omega t$, соответствующий этому углу.

При этом амплитудная функция по-прежнему будет иметь вид (5.85). Если бы на стержень Б действовала гармоническая вынуждающая сила, изменяющаяся с частотой $n\omega t$, то колебания этого стержня происходили бы с такой же частотой и амплитудную функцию следовало бы принять в виде

$$u(z) = C_1 K_1(\alpha_n z) + C_2 K_2(\alpha_n z) + C_3 K_3(\alpha_n z) + C_4 K_4(\alpha_n z), \quad (5.90)$$

где

$$\alpha_n = \sqrt[4]{m_0 n^2 \omega^2 / EJ} = \alpha \sqrt{n}. \quad (5.91)$$

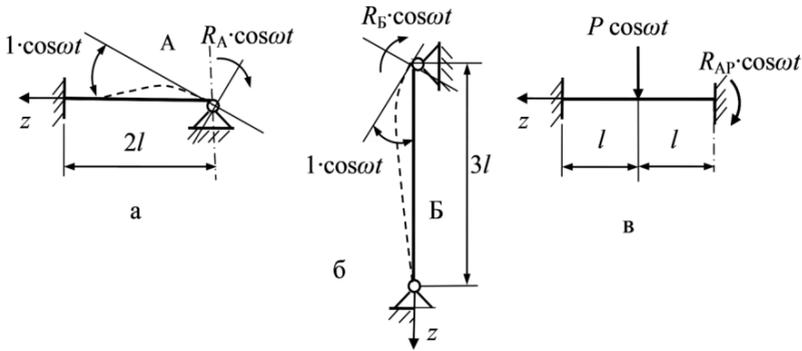


Рисунок 5.22

Примем за начало оси z узловое сечение стержня, и направим эту ось вниз. Тогда граничные условия запишутся в виде:

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad u''(0) = R_B/EJ,$$

$$u(3l) = 0, \quad u''(3l) = 0.$$

Из граничных условий на верхнем конце стержня следует:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{\alpha}, \quad C_3 = \frac{R_B}{\alpha^2 EJ}. \quad (5.92)$$

При этом амплитудная функция принимает вид

$$u(z) = \frac{1}{\alpha} K_2(\alpha z) + \frac{R_B}{\alpha^2 EJ} K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z). \quad (5.93)$$

Подставляя её в граничные условия на нижнем конце стержня, и обозначая $\alpha l = \lambda$, получим систему уравнений относительно неизвестных R_B и C_4

$$\frac{R_B}{\alpha^2 EJ} K_3(3\lambda) + C_4 K_4(3\lambda) = -\frac{1}{\alpha} K_2(3\lambda),$$

$$\frac{R_B}{\alpha^2 EJ} K_1(3\lambda) + C_4 K_2(3\lambda) = -\frac{1}{\alpha} K_4(3\lambda),$$

решая которую, найдем:

$$R_B = \frac{EJ\lambda}{l} \cdot \frac{K_4^2(3\lambda) - K_2^2(3\lambda)}{[K_3(3\lambda)K_2(3\lambda) - K_1(3\lambda)K_4(3\lambda)]}. \quad (5.94)$$

Теперь необходимо найти реактивный момент в узловом сечении от внешней гармонической силы, действующей на стержень А.

Для этого рассмотрим схему, представленную на рисунке 5.22 в. Принимая за начало оси z узловое сечение стержня, и учитывая, что введенная в узловом сечении дополнительная связь жесткая, запишем граничные условия на краях стержня в виде:

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = R_{AP}/EJ,$$

$$u(2l) = 0, \quad u'(2l) = 0.$$

Внешняя сила, действующая на стержень А, делит его на два участка – до точки приложения силы и после неё. Обозначим прогиб стержня до точки приложения силы через $u_-(z)$, а после неё – через $u_+(z)$.

Функция $u_-(z)$ по-прежнему описывается выражением (5.85). Подставляя его в граничные условия при $z = 0$, получим:

$$C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = \frac{R_{AP}}{\alpha^2 EJ}, \quad (5.95)$$

$$u_-(z) = C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z). \quad (5.96)$$

Функция $u_+(z)$ в соответствии с формулой Крылова запишется как:

$$u_+(z) = u_-(z) + \frac{P}{\alpha^3 EJ} K_4[\alpha(z - l)]$$

или

$$u_+(z) = C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z) + \frac{P}{\alpha^3 EJ} K_4[\alpha(z - l)]. \quad (5.97)$$

Подставляя эту функцию в граничные условия при $z = 2l$, и обозначая, как и ранее, $\alpha l = \lambda$, получим систему уравнений:

$$C_3 K_3(2\lambda) + C_4 K_4(2\lambda) + \frac{P}{\alpha^3 EJ} K_4(\lambda) = 0,$$

$$C_3 K_2(2\lambda) + C_4 K_3(2\lambda) + \frac{P}{\alpha^3 EJ} K_3(\lambda) = 0,$$

из которой найдем:

$$C_3 = \frac{Pl^3}{\lambda^3 EJ} \cdot \frac{[K_3(\lambda)K_4(2\lambda) - K_3(2\lambda)K_4(\lambda)]}{K_3^2(2\lambda) - K_2(2\lambda)K_4(2\lambda)}, \quad (5.98)$$

$$C_4 = \frac{Pl^3}{\lambda^3 EJ} \cdot \frac{[K_2(2\lambda)K_4(\lambda) - K_3(\lambda)K_3(2\lambda)]}{K_3^2(2\lambda) - K_2(2\lambda)K_4(2\lambda)}. \quad (5.99)$$

Приравнивая найденное выражение для C_3 (5.98) к последнему соотношению (5.95), и решая полученное уравнение относительно R_{AP} , найдем:

$$R_{AP} = \frac{Pl}{\lambda} \cdot \frac{[K_3(\lambda)K_4(2\lambda) - K_3(2\lambda)K_4(\lambda)]}{K_3^2(2\lambda) - K_2(2\lambda)K_4(2\lambda)}. \quad (5.100)$$

Подставляя найденные значения динамических жесткостей (5.89), (5.94) и реакции от внешней силы (5.100) в уравнение (5.84), найдем угол поворота узлового сечения

Х. Но ввиду громоздкости этих выражений удобнее вначале найти численные значения жесткостей и реакций.

При известных параметрах системы и частоте вынуждающей нагрузки величина λ находится как

$$\lambda = \alpha l = \sqrt[4]{m_0 l^4 \omega^2 / EJ}.$$

Определив λ можно по таблицам или вычислением найти значения функций Крылова, а затем и значения динамических жесткостей и реакций.

Для определенности примем, что параметры системы и частота изменения вынуждающей силы таковы, что $\lambda = 1$. Тогда функции Крылова, входящие в выражения (5.89), (5.94), (5.100), будут иметь значения, представленные в таблице 5.5.

Таблица 5.5 – Значения функций Крылова

Значение аргумента λ	K_1	K_2	K_3	K_4
1	1,04169	1,00833	0,50139	0,16686
2	1,67277	2,26808	2,08917	1,35828
3	4,53883	5,07949	5,52882	4,93837

Примечание. Таблицы со значениями функций Крылова приведены в Приложении.

Подставляя значения функций Крылова в соответствующие формулы, вычислим:

$$R_A = -1,9209 \frac{EJ\lambda}{l}, \quad R_B = -0,2494 \frac{EJ\lambda}{l},$$

$$R_{AP} = 0,2589 \frac{Pl}{\lambda}.$$

Тогда

$$X = \frac{0,2589}{1,9209 + 0,2494} \cdot \frac{Pl^2}{EJ} = 0,1193 \frac{Pl^2}{EJ}.$$

Зная угол поворота узлового сечения можно построить эпюры изгибающих моментов. Для этого необходимо

вновь рассмотреть каждый стержень в отдельности, но при других граничных условиях, учитывая, что угол поворота узлового сечения и реакции от внешних сил уже известны.

Поскольку уравнения движения стержней линейные, то для построения эпюр можно использовать принцип суперпозиции и найти результирующий изгибающий момент в сечениях стержня как сумму моментов от угла поворота узлового сечения M_X и от внешней силы M_P .

При определении изгибающих моментов от угла поворота узлового сечения граничные условия для стержня А (рисунок 5.22 а) имеют вид:

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = X, \quad u(2l) = 0, \quad u'(2l) = 0.$$

Из первой пары граничных условий следует: $C_1 = 0$, $C_2 = X/\alpha$,

$$u_{AX}(z) = \frac{X}{\alpha} K_2(\alpha z) + C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z), \quad (5.101)$$

где $u_{AX}(z)$ – амплитудная функция для стержня А от угла поворота узлового сечения.

Подставляя выражение (5.101) во вторую пару граничных условий, получим систему уравнений:

$$C_3 K_3(2\lambda) + C_4 K_4(2\lambda) = -\frac{X}{\alpha} K_2(2\lambda),$$

$$C_3 K_2(2\lambda) + C_4 K_3(2\lambda) = -\frac{X}{\alpha} K_1(2\lambda),$$

из которой найдем:

$$C_3 = -\frac{Xl}{\lambda} \cdot \frac{K_2(2\lambda)K_3(2\lambda) - K_1(2\lambda)K_4(2\lambda)}{K_3^2(2\lambda) - K_2(2\lambda)K_4(2\lambda)},$$

$$C_4 = -\frac{Xl}{\lambda} \cdot \frac{K_1(2\lambda)K_3(2\lambda) - K_2^2(2\lambda)}{K_3^2(2\lambda) - K_2(2\lambda)K_4(2\lambda)}.$$

Подставляя в последние выражения численные значения функций Крылова из таблицы 5.5 и угла поворота X , вычислим:

$$C_3 = -0,2292 \frac{Pl^3}{EJ}, \quad C_4 = 0,1536 \frac{Pl^3}{EJ}.$$

Тогда в соответствии с (5.101) выражения для прогибов стержня А и изгибающих моментов в его сечениях примут вид:

$$u_{AX}(z) = [0,1193K_2(\alpha z) - 0,2292K_3(\alpha z) + 0,1536K_4(\alpha z)] \frac{Pl^3}{EJ}.$$

$$M_{AX}(z) = [0,1193K_4(\alpha z) - 0,2292K_1(\alpha z) + 0,1536K_2(\alpha z)]Pl. \quad (5.102)$$

Из последней формулы следует:

$$M_{AX}(0) = -0,2292 Pl, \quad M_{AX}(l) = -0,0639 Pl, \\ M_{AX}(2l) = 0,1270 Pl.$$

Изгибающий момент от внешней силы найдем, вычислив по формулам (5.98), (5.99) постоянные коэффициенты C_3 и C_4 :

$$C_3 = 0,2589 \frac{Pl^3}{EJ}, \quad C_4 = -0,5211 \frac{Pl^3}{EJ}.$$

С учетом этих значений формулы (5.96), (5.97) примут вид:

$$u_{AP-}(z) = [0,2589K_3(\alpha z) - 0,5211K_4(\alpha z)] \frac{Pl^3}{EJ}, \\ u_{AP+}(z) = [0,2589K_3(\alpha z) - 0,5211K_4(\alpha z) + K_4[\alpha(z-l)]] \frac{Pl^3}{EJ},$$

а изгибающие моменты в сечениях стержня будут описываться функциями:

$$M_{AP-}(z) = [0,2589K_1(\alpha z) - 0,5211K_2(\alpha z)]Pl. \\ M_{AP+}(z) = [0,2589K_1(\alpha z) - 0,5211K_2(\alpha z) + K_2[\alpha(z-l)]]Pl.$$

Подставляя в эти формулы численные значения функций Крылова, для различных сечений получим:

$$M_{AP}(0) = 0,2589 Pl, \quad M_{AP}(l) = -0,2557 Pl,$$

$$M_{AP}(2l) = 0,2595 Pl.$$

Суммарные моменты в этих сечениях находятся как

$$M_A(z) = M_{AX}(z) + M_{AP}(z)$$

и равны соответственно:

$$M_A(0) = 0,0297 Pl, \quad M_A(l) = -0,3196 Pl,$$

$$M_A(2l) = 0,3865 Pl.$$

Эпюры изгибающих моментов показаны на рисунке 5.23.

При определении изгибающих моментов в стержне Б граничные условия (рисунок 5.22 б) имеют вид:

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = X, \quad u(3l) = 0, \quad u''(3l) = 0.$$

Из первой пары граничных условий следует: $C_1 = 0$, $C_2 = X/\alpha$ и

$$u_{БХ}(z) = \frac{X}{\alpha} K_2(\alpha z) + C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z),$$

где $u_{БХ}(z)$ – амплитудная функция для стержня Б от угла поворота узлового сечения.

Вторая пара граничных условий приводит к системе уравнений:

$$C_3 K_3(3\lambda) + C_4 K_4(3\lambda) = -\frac{X}{\alpha} K_2(3\lambda),$$

$$C_3 K_1(3\lambda) + C_4 K_2(3\lambda) = -\frac{X}{\alpha} K_4(3\lambda),$$

из которой следует:

$$C_3 = \frac{Xl}{\lambda} \cdot \frac{K_4^2(3\lambda) - K_2^2(3\lambda)}{K_2(3\lambda)K_3(3\lambda) - K_1(3\lambda)K_4(3\lambda)},$$

$$C_4 = \frac{Xl}{\lambda} \cdot \frac{K_1(3\lambda)K_2(3\lambda) - K_3(3\lambda)K_4(3\lambda)}{K_2(3\lambda)K_3(3\lambda) - K_1(3\lambda)K_4(3\lambda)}.$$

Подставляя в эти выражения численные значения функций Крылова и угла поворота, получим:

$$C_3 = -0,0297 \frac{Pl^3}{EJ}, \quad C_4 = -0,0894 \frac{Pl^3}{EJ},$$

$$u_{\text{БХ}}(z) = [0,1193K_2(\alpha z) - 0,0297K_3(\alpha z) - 0,0894K_4(\alpha z)] \frac{Pl^3}{EJ},$$

$$M_{\text{БХ}}(z) = [0,1193K_4(\alpha z) - 0,0297K_1(\alpha z) + 0,0894K_2(\alpha z)] Pl.$$

Из последней формулы следует:

$$M_{\text{Б}}(0) = -0,0297 Pl.$$

Из полученных эпюр (рисунок 5.23) видно, что изгибающий момент максимальный в заделке стержня А.

Для нахождения собственной частоты колебаний рамы воспользуемся тем, что при равенстве собственной частоты и частоты изменения вынуждающей нагрузки в системе наступает резонанс, который характеризуется резким возрастанием амплитуды колебаний. Если пренебречь потерями энергии в системе, то амплитуды колебаний в резонансном режиме стремятся к бесконечности.

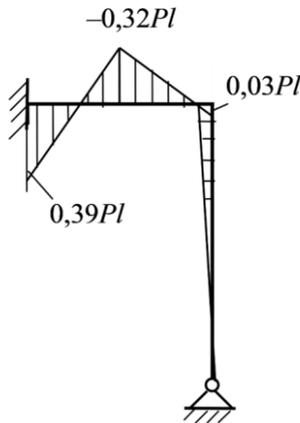


Рисунок 5.23

В рассматриваемом примере это будет происходить тогда, когда знаменатель формулы (5.84) равен нулю. Подставляя в него выражения для R_A , R_B , запишем:

$$\frac{K_1(2\lambda)K_4(2\lambda) - K_2(2\lambda)K_3(2\lambda)}{K_3^2(2\lambda) - K_2(2\lambda)K_4(2\lambda)} + \frac{K_4^2(3\lambda) - K_2^2(3\lambda)}{K_3(3\lambda)K_2(3\lambda) - K_1(3\lambda)K_4(3\lambda)} = 0.$$

Из этого уравнения численными методами находятся значения λ_k , а затем определяются собственные частоты по формуле:

$$p_k = \lambda_k^2 \sqrt{EJ/m_0 l^4}.$$

Для нахождения собственной частоты удобно, задавая λ значения, изменяющиеся с определенным шагом, построить график зависимости:

$$Y(\lambda) = \frac{K_1(2\lambda)K_4(2\lambda) - K_2(2\lambda)K_3(2\lambda)}{K_3^2(2\lambda) - K_2(2\lambda)K_4(2\lambda)} + \frac{K_4^2(3\lambda) - K_2^2(3\lambda)}{K_3(3\lambda)K_2(3\lambda) - K_1(3\lambda)K_4(3\lambda)}.$$

Точки пересечения этого графика с осью абсцисс дадут значения λ_k , соответствующие собственным частотам.

6. КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

6.1. Уравнение движения пластины постоянной толщины

Для вывода уравнения движения пластины расположим координатные оси x и y в её срединной плоскости (рисунок 6.1), напряжения в которой при изгибе равны нулю. Ось z направим перпендикулярно этой плоскости.

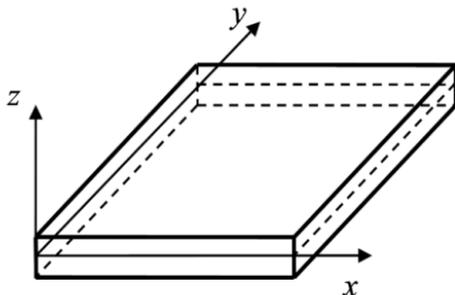


Рисунок 6.1

Из теории упругости известно, что дифференциальное уравнение статического изгиба пластины постоянной толщины h при малых перемещениях имеет вид:

$$\nabla^2 \nabla^2 \xi = \frac{1}{D} q(x, y),$$

где ξ – прогиб; $\nabla^2 \nabla^2$ – бигармонический оператор

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla^2 \nabla^2 \xi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right);$$

D – цилиндрическая жесткость пластины,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)};$$

E , μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины;

$q(x, y)$ – интенсивность нагрузки, распределенной по поверхности пластины.

Добавляя в уравнении статического изгиба пластины к интенсивности распределения внешней нагрузки интенсивность сил инерции, запишем

$$\nabla^2 \nabla^2 \xi = \frac{1}{D} \left(q(x, y) - \rho h \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right),$$

где ρ – плотность материала пластины; $\rho h = m_0$ – масса одного квадратного метра пластины (распределенная масса).

При свободных колебаниях пластины внешняя нагрузка отсутствует $q(x, y) = 0$, и уравнение свободных колебаний имеет вид:

$$\nabla^2 \nabla^2 \xi + \frac{m_0}{D} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0. \quad (6.1)$$

Учитывая, что

$$\nabla^2 \nabla^2 \xi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \xi}{\partial y^4},$$

последнее уравнение можно представить в виде

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \xi}{\partial y^4} + \frac{m_0}{D} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0. \quad (6.2)$$

Решение этого уравнения $\xi(x, y, t)$ будем искать, как обычно, в виде произведения двух функций: амплитудной функции $w(x, y)$, зависящей только от координат x, y , и главной координаты, зависящей только от времени. При свободных колебаниях главная координата описывается гармонической функцией. Примем

$$\xi(x, y, t) = w(x, y) \cos(pt + \varphi),$$

где p – собственная частота колебаний; φ – начальная фаза колебаний.

Вычисляя производные от функции перемещения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} &= \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cos(pt + \varphi), & \frac{\partial^4 \xi}{\partial y^4} &= \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \cos(pt + \varphi), \\ \frac{\partial^4 \xi}{\partial y^2 \partial x^2} &= \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \cos(pt + \varphi), & \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -wp^2 \cos(pt + \varphi), \end{aligned}$$

подставляя их в уравнение движения (6.2), и сокращая все члены уравнения на $\cos(pt + \varphi)$, получим дифференциальное уравнение относительно амплитудной функции w :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \alpha^4 w = 0, \quad (6.3)$$

где

$$\alpha^4 = m_0 p^2 / D. \quad (6.4)$$

Теперь задача заключается в том, чтобы из всех возможных решений уравнения (6.3), выбрать такие, которые удовлетворяют граничным условиям на краях пластины.

Эти условия могут быть следующими:

- на защемленном крае перемещения и угол поворота сечений равны нулю

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0;$$

- на шарнирно опертом крае перемещения и изгибающий момент равны нулю

$$w = 0, \quad M_n = 0;$$

- на свободном крае изгибающий момент и перерезывающие силы равны нулю

$$M_n = 0, \quad V = 0.$$

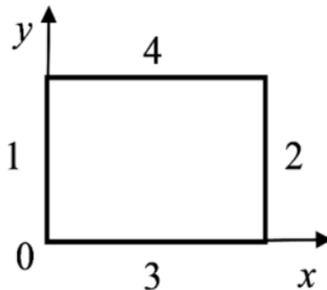


Рисунок 6.2

Здесь

$$M_n = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right), \quad V = \left[\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial \tau^2} \right],$$

n – нормаль к контуру пластины; τ – касательная к контуру.

Например, для пластины, показанной на рисунке 6.2, для сторон 1 и 2 нормалью к контуру является координата x , а касательной – координата y . Для сторон 3, 4 наоборот: нормаль это координата y , а касательная – координата x .

Таким образом, например, для стороны 1 граничные условия запишутся в виде:

при защемлении края

$$w(0, y) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0, y) = 0;$$

при шарнирной опоре края

$$w(0, y) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} = 0;$$

при свободном крае

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} = 0; \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=0} = 0.$$

6.2. Свободные колебания прямоугольной пластины

Точное решение задачи о колебании прямоугольной пластины может быть получено, если две противоположные стороны пластины шарнирно оперты. При этом граничные условия на двух других сторонах могут быть любыми.

Рассмотрим задачу определения собственных частот и форм колебаний пластины с размерами сторон a и b (рисунк 6.3). Начало координат поместим в углу пластины и примем, что длинные края пластины с координатами $y = 0, y = b$ шарнирно оперты.

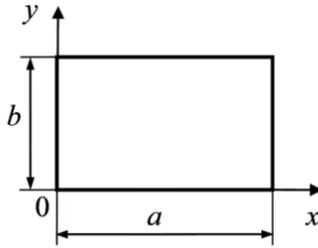


Рисунок 6.3

Граничные условия для открытых краев запишутся в виде:

$$w|_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0.$$

Этим условиям удовлетворяет амплитудная функция вида

$$w(x, y) = f(x) \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad k = 1, 2, 3 \dots, \quad (6.5)$$

где $f(x)$ – неизвестная пока функция, которая должна удовлетворять граничным условиям на двух других краях пластины с координатами $x = 0, x = a$.

Подставляя выражение для амплитудной функции в уравнения колебаний пластины (6.3), и сокращая все члены уравнений на $\sin(k\pi y/b)$, запишем:

$$f''''(x) - 2 \frac{k^2 \pi^2}{b^2} f''(x) + \frac{k^4 \pi^4}{b^4} f(x) - \alpha^4 f(x) = 0. \quad (6.6)$$

Здесь штрихи обозначают дифференцирование по аргументу x .

Характеристическое уравнение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$r^4 - 2 \frac{k^2 \pi^2}{b^2} r^2 + \left(\frac{k^4 \pi^4}{b^4} - \alpha^4 \right) = 0,$$

или

$$\left(r^2 - \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 - \alpha^4 = 0.$$

Левая часть последнего уравнения представляет собой разность квадратов двух величин и может быть записана в виде:

$$\left(r^2 - \frac{k^2\pi^2}{b^2} - \alpha^2\right)\left(r^2 - \frac{k^2\pi^2}{b^2} + \alpha^2\right) = 0.$$

Отсюда следует, что корни характеристического уравнения

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\alpha^2 + \frac{k^2\pi^2}{b^2}}, \quad r_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{k^2\pi^2}{b^2} - \alpha^2}.$$

Обозначим

$$\alpha^2 + \frac{k^2\pi^2}{b^2} = \alpha_1^2, \quad \alpha^2 - \frac{k^2\pi^2}{b^2} = \alpha_2^2.$$

Тогда при положительных значениях α_1^2 и α_2^2 первые два корня характеристического уравнения действительные, а вторые два корня – мнимые:

$$r_{1,2} = \pm \alpha_1, \quad r_{3,4} = \pm i\alpha_2, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Следовательно, решение дифференциального уравнения (6.6) должно содержать четыре члена, два из которых описываются экспоненциальными или гиперболическими функциями, а два – тригонометрическими функциями. Запишем это решение через гиперболические функции:

$$f(x) = C_1 ch \alpha_1 x + C_2 sh \alpha_1 x + C_3 \cos \alpha_2 x + C_4 \sin \alpha_2 x, \quad (6.7)$$

где

$$ch \alpha_1 x = 0,5(e^{\alpha_1 x} + e^{-\alpha_1 x}),$$

$$sh \alpha_1 x = 0,5(e^{\alpha_1 x} - e^{-\alpha_1 x}).$$

Тогда амплитудная функция (6.5) будет иметь вид

$$w(x, y) = (C_1 ch \alpha_1 x + C_2 sh \alpha_1 x + \cos \alpha_2 x + C_4 \sin \alpha_2 x) \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (6.8)$$

где $C_1 - C_4$ – постоянные, определяемые из граничных условий на двух других сторонах пластины с координатами $x = 0$ и $x = a$ (рисунок 6.3).

Допустим, что эти края пластины также шарнирно оперты и граничные условия на этих краях имеют вид

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} = 0.$$

Рассмотрим граничные условия на краю с координатой $x = 0$.

Подставляя в граничное условие $w(0, y) = 0$ амплитудную функцию (6.8), получим:

$$(C_1 + C_3) \sin \frac{k\pi y}{b} = 0.$$

Так как в общем случае

$$\sin \frac{k\pi y}{b} \neq 0,$$

то $C_3 = -C_1$.

Для использования второй пары граничных условий по изгибающим моментам, вычислим производные от функции (6.8), и запишем их в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = & - \left(\alpha_1^2 + \mu \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \right) (C_1 \operatorname{ch} \alpha_1 x + C_2 \operatorname{sh} \alpha_1 x) - \\ & - \left(\alpha_2^2 + \mu \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \right) (C_3 \cos \alpha_2 x + C_4 \sin \alpha_2 x) = 0. \end{aligned}$$

Из этой формулы при $x = 0$, получим:

$$\left(\alpha_1^2 + \mu \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \right) C_1 + \left(\alpha_2^2 + \mu \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \right) C_3 = 0.$$

Подстановка в это уравнение $C_3 = -C_1$ дает:

$$C_1 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) = 0.$$

Так как $\alpha_1^2 \neq \alpha_2^2$, остается $C_1 = 0$ и, следовательно, $C_3 = 0$.

При этом амплитудная функция (6.8) принимает вид:

$$w(x, y) = (C_2 \operatorname{sh} \alpha_1 x + C_4 \sin \alpha_2 x) \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (6.9)$$

Подставляя её в граничные условия по перемещениям на краю с координатой $x = a$, получим:

$$C_2 \operatorname{sh} \alpha_1 a + C_4 \sin \alpha_2 a = 0. \quad (6.10)$$

Из граничного условия по изгибающим моментам на этом краю следует:

$$C_2 \left(\alpha_1^2 + \mu \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \right) sh \alpha_1 a + C_4 \left(\alpha_2^2 + \mu \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \right) sin \alpha_2 a = 0.$$

Последнее уравнение можно перегруппировать и записать в виде

$$C_2 \alpha_1^2 sh \alpha_1 a + C_4 \alpha_2^2 sin \alpha_2 a + \mu \frac{k^2 \pi^2}{b^2} (C_2 sh \alpha_1 a + C_4 sin \alpha_2 a) = 0.$$

Выражение, стоящее в скобках последнего уравнения, в силу (6.10) равно нулю. Тогда можно записать

$$C_2 \alpha_1^2 sh \alpha_1 a + C_4 \alpha_2^2 sin \alpha_2 a = 0. \quad (6.11)$$

Таким образом, граничные условия приводят к системе двух уравнений (6.10), (6.11) относительно постоянных C_2 и C_4 . Составив определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} sh \alpha_1 a & sin \alpha_2 a \\ \alpha_1^2 sh \alpha_1 a & \alpha_2^2 sin \alpha_2 a \end{vmatrix},$$

развертывая его и приравнявая к нулю, получим частотное уравнение

$$(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) sh \alpha_1 a sin \alpha_2 a = 0.$$

Так как в общем случае $\alpha_2^2 \neq \alpha_1^2$, $sh \alpha_1 a \neq 0$, то $sin \alpha_2 a = 0$ и $\alpha_2 = \frac{\pi m}{a}$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Поскольку коэффициент α_1 не повлиял на решение задачи и члены, содержащие этот коэффициент, в процессе решения выпали из рассмотрения, то достаточно ограничиться найденным коэффициентом α_2 . Зная этот коэффициент, можно найти значения α_{km} , а затем из формулы (6.4) найти и собственные частоты p_{km} :

$$\alpha_{km}^2 = \alpha_2^2 + \frac{k^2 \pi^2}{b^2} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right),$$

$$p_m = \alpha_{km}^2 \sqrt{D/m_0} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m_0}}. \quad (6.12)$$

Так как решение найдено, и оно удовлетворяет уравнению движения с коэффициентом α_2 , то в выражении амплитудной функции (6.9) можно исключить член с коэффициентом α_1 . Тогда амплитудная функция прогибов, определяющая форму колебаний, будет иметь вид:

$$w_{km}(x, y) = C_{km} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (6.13)$$

С учетом найденной амплитудной функции частным решением уравнения движения пластины является функция

$$\xi_{km}(x, y, t) = C_{km} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \cos(p_{km}t + \varphi_{km}),$$

а общим решением – функция

$$\xi(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{km} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \cos(p_{km}t + \varphi_{km}). \quad (6.14)$$

Постоянные C_{km} и φ_{km} находятся из начальных условий задачи.

В полученном решении число k показывает количество полуволн уместающихся на пластине вдоль координатной оси y , а число m показывает количество полуволн вдоль оси x (рисунок 6.4).

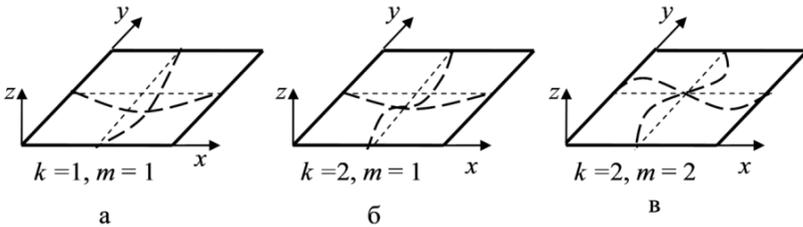


Рисунок 6.4

При первой частоте колебаний $k = 1, m = 1$ и на каждой стороне пластины размещается одна полуволна и колебания пластины происходят без узловых линий. При более высоких частотах в пластине появляются узловые линии

по координатам x и y , которые характеризуются тем, что прогибы вдоль этих линий равны нулю.

6.3. Асимптотический метод расчета колебаний пластин

Асимптотический метод расчета пластин является универсальным и позволяет получить приближенное решение уравнения движения при любых граничных условиях на краях пластины.

Известно, что граничные условия на краях пластины оказывают влияние на форму колебания только вблизи краев, а по мере удаления от краев это влияние уменьшается, и колебания описываются синусными функциями, как в предыдущем примере. Это явление получило название *краевого эффекта*. По данным различных исследователей краевой эффект распространяется на расстояние от края, равное половине длины волны.

Асимптотический метод основан на свойстве уменьшения влияния граничных условий по мере удаления от края пластины. В соответствии с этим методом амплитудная функция представляется в виде суммы гармонических функций, соответствующих формам колебания пластины, шарнирно опертой по краям и функций, быстро затухающих по мере удаления от краев пластины. Например, если начало координатных осей x и y расположено в центре пластины (рисунок 6.5), то для центральной зоны пластины форма колебаний принимается в виде:

$$w(x, y) = C_0 \cos \gamma_1 x \cos \gamma_2 y, \quad (6.15)$$

где $\gamma_1 = \pi/\Lambda_x$, $\gamma_2 = \pi/\Lambda_y$, Λ_x , Λ_y – соответственно длины полуволн вдоль осей x и y .

Вблизи краев $x = \pm a/2$ форма колебаний имеет вид

$$w(x, y) = \cos \gamma_2 y [C_0 \cos \gamma_1 x + f(x)],$$

а вблизи краев $y = \pm b/2$

$$w(x, y) = \cos \gamma_1 x [C_0 \cos \gamma_2 y + \varphi(y)],$$

где $f(x)$ и $\varphi(y)$ – неизвестные функции, быстро затухающие по мере удаления от краев, и позволяющие выполнить граничные условия.

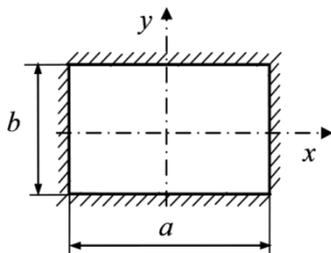


Рисунок 6.5

Общее выражение для амплитудной функции записывается в виде суммы двух предыдущих функций:

$$w(x, y) = C_0 \cos \gamma_1 x \cos \gamma_2 y + f(x) \cos \gamma_2 y + \varphi(y) \cos \gamma_1 x. \quad (6.16)$$

В средней части пластины функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ пренебрежимо малы и поэтому первый член функции (6.16) должен удовлетворять уравнению движения пластины (6.3):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \alpha^4 w = 0, \quad \alpha^4 = m_0 p^2 / D.$$

Взяв производные от функции (6.15) и подставив их в уравнение движения, после сокращения всех членов на $C_0 \cos \gamma_1 x \cos \gamma_2 y$, получим:

$$\gamma_2^4 + 2\gamma_1^2 \gamma_2^2 + \gamma_1^4 - \alpha^4 = 0,$$

откуда следует $(\gamma_2^2 + \gamma_1^2)^2 = \alpha^4$ и

$$\alpha^2 = \gamma_2^2 + \gamma_1^2. \quad (6.17)$$

Вблизи краев $x = \pm a/2$ существенны первый и второй члены функции (6.16). Поэтому потребуем, чтобы и второй член удовлетворял уравнению движения. Подставляя второй член в уравнение движения, и сокращая все члены на $\cos \gamma_2 y$, приходим к уравнению:

$$f^{IV}(x) - 2f''(x)\gamma_2^2 + (\gamma_2^4 - \alpha^4)f(x) = 0. \quad (6.18)$$

Характеристическое уравнение этого дифференциального уравнения

$$r^4 - 2r^2\gamma_2^2 - (\alpha^4 - \gamma_2^4) = 0$$

имеет четыре корня:

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{\gamma_2^2 - \alpha^2} = \pm\sqrt{-\gamma_1^2},$$

$$r_{3,4} = \pm\sqrt{\gamma_2^2 + \alpha^2} = \pm\sqrt{2\gamma_2^2 + \gamma_1^2}.$$

Из этих корней необходимо выбрать такие при которых решение получается затухающим. Этому условию соответствует последний корень с отрицательным знаком

$$r = -\sqrt{2\gamma_2^2 + \gamma_1^2} = -\alpha_1. \quad (6.19)$$

При действительном отрицательном корне решение уравнения (6.18) запишется в виде:

$$f(x) = C_1 e^{-\alpha_1\left(\frac{a}{2} \pm x\right)}.$$

Знак плюс в скобке соответствует отрицательной координате x , а знак минус – положительной координате. При этом на краях пластины с координатами $x = \pm a/2$ функция $f(x)$ имеет максимальную величину, равную C_1 , а в центре пластины – минимальную величину, равную $C_1 \exp(-\alpha_1 a/2)$.

Вблизи краев $y = \pm b/2$ существенны первый и третий члены функции (6.16). Поэтому потребуем, чтобы и третий член удовлетворял уравнению движения. Подставляя его в уравнение движения, и сокращая все члены на $\cos \gamma_1 x$, приходим к уравнению, аналогичному (6.18):

$$\varphi^{IV}(y) - 2\varphi''(y)\gamma_1^2 + (\gamma_1^4 - \alpha^4)\varphi(y) = 0.$$

Затухающее решение этого уравнения

$$\varphi(y) = C_2 e^{-\alpha_2\left(\frac{b}{2} \pm y\right)},$$

где

$$\alpha_2 = \sqrt{2\gamma_1^2 + \gamma_2^2}. \quad (6.20)$$

Знак плюс в скобках степени соответствует отрицательным значениям y , а знак минус – положительным значениям.

Подставляя функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ в (6.16), получим, что при использовании асимптотического метода расчета амплитудная функция имеет вид

$$w(x, y) = C_0 \cos \gamma_1 x \cos \gamma_2 y + C_1 e^{-\alpha_1 \left(\frac{a}{2} \pm x\right)} \cos \gamma_2 y + C_2 e^{-\alpha_2 \left(\frac{b}{2} \pm y\right)} \cos \gamma_1 x. \quad (6.21)$$

Постоянные C_1 , C_2 в этой функции находятся из граничных условий и выражаются через C_0 , а C_0 находится из начальных условий.

Допустим, пластина жестко закреплена по всем краям (рисунок 6.5). Тогда граничные условия имеют вид

$$w \Big|_{x=\pm\frac{a}{2}} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=\pm\frac{a}{2}} = 0, \quad (6.22)$$

$$w \Big|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0. \quad (6.23)$$

Подставляя функцию (6.21) в граничные условия при $x = -a/2$, и учитывая, что практически вдоль всего этого края за исключением небольших угловых зон функцию $\varphi(y)$ можно принять равной нулю, получим систему уравнений:

$$\cos \gamma_2 y \left(C_0 \cos \frac{\gamma_1 a}{2} + C_1 \right) = 0,$$

$$\cos \gamma_2 y \left(C_0 \gamma_1 \sin \frac{\gamma_1 a}{2} - C_1 \alpha_1 \right) = 0.$$

Так как в общем случае $\cos \gamma_2 y \neq 0$, то можно записать:

$$C_0 \cos \frac{\gamma_1 a}{2} + C_1 = 0, \quad (6.24)$$

$$C_0 \gamma_1 \sin \frac{\gamma_1 a}{2} - C_1 \alpha_1 = 0.$$

Составляя определитель этой системы, развертывая его и приравнивая к нулю, получим:

$$\alpha_1 \cos \frac{\gamma_1 a}{2} + \gamma_1 \sin \frac{\gamma_1 a}{2} = 0. \quad (6.25)$$

Аналогично, для граничных условий на краю $y = -b/2$, пренебрегая вторым членом в функции (6.21) и подставляя эту функцию в граничные условия (6.23), получим систему уравнений:

$$C_0 \cos \frac{\gamma_2 b}{2} + C_2 = 0, \quad (6.26)$$

$$C_0 \gamma_2 \sin \frac{\gamma_2 b}{2} - C_2 \alpha_2 = 0,$$

из которой следует

$$\alpha_2 \cos \frac{\gamma_2 b}{2} + \gamma_2 \sin \frac{\gamma_2 b}{2} = 0. \quad (6.27)$$

Заменяя в уравнениях (6.25), (6.27) α_1 и α_2 выражениями (6.19), (6.20), представим их в виде

$$\sqrt{2\gamma_2^2 + \gamma_1^2} \cos \frac{\gamma_1 a}{2} + \gamma_1 \sin \frac{\gamma_1 a}{2} = 0, \quad (6.28)$$

$$\sqrt{2\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \cos \frac{\gamma_2 b}{2} + \gamma_2 \sin \frac{\gamma_2 b}{2} = 0.$$

Решая эти уравнения численными методами, находим γ_{1km} и γ_{2km} , затем по формуле (6.17) вычисляем α_{km} , и из формулы (6.4) находим собственную частоту колебаний:

$$p_{km} = \alpha_{km}^2 \sqrt{D/m_0}. \quad (6.29)$$

Для определения форм колебаний запишем из уравнений (6.24), (6.26):

$$C_{1km} = -C_{0km} \cos \frac{\gamma_{1km} a}{2}, \quad C_{2m} = -C_{0km} \cos \frac{\gamma_{2km} b}{2}.$$

Подставляя эти соотношения в амплитудную функцию (6.21), и принимая $C_{0km} = 1$, получим формы колебаний в безразмерном виде:

$$w(x, y) = [\cos \gamma_{1km} x \cos \gamma_{2km} y -$$

$$\begin{aligned} & - e^{-\alpha_{1km}(\frac{a}{2}+x)} \cos \frac{\gamma_{1km}a}{2} \cos \gamma_{2km}y - \\ & - e^{-\alpha_{2km}(\frac{b}{2}+y)} \cos \frac{\gamma_{2km}b}{2} \cos \gamma_{1km}x \Big]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Эта амплитудная функция справедлива для отрицательных полуосей координат x и y . Для положительных полуосей необходимо рассмотреть граничные условия на краях $x = +a/2$, $y = +b/2$. Опуская промежуточные выкладки, запишем конечное выражение амплитудной функции для положительных полуосей:

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \left[\cos \gamma_{1km}x \cos \gamma_{2km}y - \right. \\ & - e^{-\alpha_{1km}(\frac{a}{2}-x)} \cos \frac{\gamma_{1km}a}{2} \cos \gamma_{2km}y - \\ & \left. - e^{-\alpha_{2km}(\frac{b}{2}-y)} \cos \frac{\gamma_{2km}b}{2} \cos \gamma_{1km}x \right]. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Эта формула отличается от предыдущей только знаком перед аргументом x или y в экспоненциальных затухающих функциях.

В работе [2] приведены результаты расчета частного случая рассматриваемой задачи, когда пластина квадратная. В этом случае, поскольку граничные условия по всем краям одинаковые и задача симметричная, выполняется условие $b = a$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, и система уравнений (6.28) вырождается в одно уравнение

$$\sqrt{3} \cos \frac{\gamma a}{2} + \sin \frac{\gamma a}{2} = 0,$$

из которого следует:

$$tg \frac{\gamma a}{2} = -\sqrt{3}, \quad \frac{\gamma_k a}{2} = \frac{2\pi}{3} + (k-1)\pi, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

Тогда

$$\gamma_k = \frac{2\pi}{a} \left(k - \frac{1}{3} \right), \quad \alpha^2 = 2\gamma^2 = \frac{8\pi^2}{a^2} \left(k - \frac{1}{3} \right)^2$$

и собственные частоты колебаний определяются формулой

$$p_k = \frac{8\pi^2}{a^2} \left(k - \frac{1}{3}\right)^2 \sqrt{\frac{D}{m_0 a^4}}.$$

Для низшей частоты при $k = 1$ получается

$$p_1 = 35,09\sqrt{D/m_0 a^4}.$$

Точное значение низшей частоты

$$p_1 = 35,98\sqrt{D/m_0 a^4}.$$

Расхождение результатов составляет 2,47 %. Следовательно, в данной задаче асимптотический метод дает достаточно точный результат по частоте колебаний даже для низшей частоты.

Собственные формы и частоты колебаний пластин при различных граничных условиях на их краях приведены в таблице 6.1.

Зная собственные формы и частоты колебаний можно найти главные координаты при известном законе сил, действующих на пластину, а затем описать вынужденные колебания пластин под действием этих сил.

Таблица 6.1 – Собственные формы колебаний прямоугольных пластин со сторонами a_1, a_2 и частотные уравнения, найденные асимптотическим методом (начало координат расположено в центре пластины)

Граничные условия	Собственные формы W_{ij}	Частотные уравнения	Обозначения
Все края свободно оперты	$\cos \gamma_{1j} x \cos \gamma_{2i} y - e^{-\alpha_{ij}(0,5a_1 \mp x)} \times$ $\times \cos \frac{\gamma_{1j} a_1}{2} \cos \gamma_{2i} y -$ $- e^{-\alpha_{ij}(0,5a_2 \mp y)} \times$ $\times \cos \frac{\gamma_{2i} a_2}{2} \cos \gamma_{1j} x$	$\cos \gamma_{1j} \frac{a_1}{2} = 0,$ $\gamma_{1j} = \frac{(2j-1)\pi}{a_1},$ $\cos \gamma_{2i} \frac{a_2}{2} = 0,$ $\gamma_{2i} = \frac{(2i-1)\pi}{a_2}$	$\omega_{ij} - \text{собственные частоты}$ $\omega_{ij} = \alpha_{ij}^2 \sqrt{D/m_0},$ $\alpha_{ij}^2 = \gamma_{1j}^2 + \gamma_{2i}^2,$ $\gamma_1 = \frac{\pi}{\Lambda_x},$

Края $x = \pm a_1/2$ свободно оперты, а $y = \pm a_2/2$ свободные	$\cos \gamma_{1j} x \cos \gamma_{2l} y - e^{-\alpha_{ij}(0,5a_1 \mp x)} \times$ $\times \cos \frac{\gamma_{1j} a_1}{2} \cos \gamma_{2l} y +$ $+ \Theta_{ij} e^{-\alpha_{ij}(0,5a_1 \mp y)} \times$ $\times \cos \frac{\gamma_{2l} a_2}{2} \cos \gamma_{1j} x$	$\cos \gamma_{1j} \frac{a_1}{2} = 0,$ $\gamma_{1j} = \frac{(2j-1)\pi}{a_1},$ $tg \left(\frac{\gamma_{2l} a_2}{2} \right) = -\Theta^2 \sqrt{1 + \frac{2}{\nu_{ij}^2}}$	$\gamma_2 = \frac{\pi}{\Lambda_y},$ $\Lambda_x, \Lambda_y - \text{длины}$ полуволн вдоль $\text{соответствующих осей}$
Все края зашклены	$\cos \gamma_{1j} x \cos \gamma_{2l} y - e^{-\alpha_{ij}(0,5a_1 \mp x)} \times$ $\times \cos \frac{\gamma_{1j} a_1}{2} \cos \gamma_{2l} y -$ $- e^{-\alpha_{ij}(0,5a_1 \mp y)} \times$ $\times \cos \frac{\gamma_{2l} a_2}{2} \cos \gamma_{1j} x$	$tg \left(\frac{\gamma_{1j} a_1}{2} \right) = -\sqrt{1 + 2\nu_{ij}^2},$ $tg \left(\frac{\gamma_{2l} a_2}{2} \right) = -\sqrt{1 + \frac{2}{\nu_{ij}^2}}$	$\alpha_{ij}^2 = \gamma_{1j}^2 + 2\gamma_{2l}^2,$ $\alpha_{2ij}^2 = \gamma_{2l}^2 + 2\gamma_{1j}^2,$ $\nu_{ij} = \gamma_{1j} / \gamma_{2l},$
Края $x = \pm a_1/2$ зашклены, а $y = \pm a_2/2$ свободные	$\cos \gamma_{1j} x \cos \gamma_{2l} y - e^{-\alpha_{ij}(0,5a_1 \mp x)} \times$ $\times \cos \frac{\gamma_{1j} a_1}{2} \cos \gamma_{2l} y -$ $- \Theta_{ij} e^{-\alpha_{ij}(0,5a_1 \mp y)} \times$ $\times \cos \frac{\gamma_{2l} a_2}{2} \cos \gamma_{1j} x$	$tg \left(\frac{\gamma_{1j} a_1}{2} \right) = -\sqrt{1 + 2\nu_{ij}^2},$ $tg \left(\frac{\gamma_{2l} a_2}{2} \right) = -\Theta^2 \sqrt{1 + \frac{2}{\nu_{ij}^2}}$	$\Theta_{ij} = \frac{\nu_{ij}^2 + \mu}{\nu_{ij}^2 + 2 - \mu}$
Края $x = \pm a_1/2$ зашклены, а $y = \pm a_2/2$ свободно оперты	$\cos \gamma_{1j} x \cos \gamma_{2l} y - e^{-\alpha_{ij}(0,5a_1 \mp x)} \times$ $\times \cos \gamma_{2l} y - e^{-\alpha_{ij}(0,5a_1 \mp y)} \times$ $\times \cos \frac{\gamma_{2l} a_2}{2} \cos \gamma_{1j} x$	$\cos \gamma_{2l} \frac{a_2}{2} = 0,$ $\gamma_{2l} = \frac{(2l-1)\pi}{a_2},$ $tg \left(\frac{\gamma_{1j} a_1}{2} \right) = -\sqrt{1 + 2\nu_{ij}^2}$	

Примечания. В выражениях для собственных форм знак минус в показателях степеней соответствует положительным значениям x и y , а знак плюс – отрицательным значениям.

6.4. Определение собственных частот колебаний пластин методом Релея-Ритца

Метод Релея-Ритца позволяет находить приближенные значения собственных частот колебаний пластин переменной толщины, а также позволяет учитывать влияние на частоту различных факторов, например, напряжений в срединной поверхности пластины.

Для использования этого метода необходимо вначале найти потенциальную энергию деформации пластины и её обобщенную массу. Потенциальная энергия деформации при изгибе пластины по некоторой форме $w(x, y)$ выражается интегралом:

$$U_0 = \frac{1}{2} \iint D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy. \quad (6.32)$$

Следует отметить, что для пластины постоянной толщины, заземленной по контуру, интеграл от второго слагаемого этого выражения равен нулю.

Обобщенная масса пластины выражается интегралом

$$\mathfrak{M} = \iint m_0 w^2 dx dy. \quad (6.33)$$

В соответствии с методом Релея-Ритца форма колебания задается в виде ряда независимых друг от друга амплитудных функций, каждая из которых удовлетворяет граничным условиям задачи

$$w(x, y) = C_1 w_1(x, y) + C_2 w_2(x, y) + \dots + C_k w_k(x, y). \quad (6.34)$$

Далее записывается система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial C_1} - \frac{1}{2} p^2 \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial C_1} &= 0, \\ \frac{\partial U_0}{\partial C_2} - \frac{1}{2} p^2 \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial C_2} &= 0, \\ \frac{\partial U_0}{\partial C_k} - \frac{1}{2} p^2 \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial C_k} &= 0. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Составляя определитель этой системы, разворачивая его и приравнявая к нулю, получают частотное уравнение, из которого находят собственные частоты. Собственные формы находятся из уравнений записанной выше системы. Это общий путь использования метода Релея-Ритца.

Рассмотрим тот же пример, который рассматривался в предыдущем разделе (рисунок 6.5). Допустим, необходимо найти собственные частоты и формы колебаний прямоугольной пластины, жестко заделанной по контуру. Пластина имеет размеры в плане $a \times b$ и толщину h .

Проведем координатные оси x и y через середину пластины. В этом случае получается симметричная система с граничными условиями (6.22), (6.23):

$$w \Big|_{x=\pm\frac{a}{2}} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=\pm\frac{a}{2}} = 0,$$

$$w \Big|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0.$$

Ограничиваясь одним слагаемым в разложении (6.34), примем:

$$w(x, y) = C \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right). \quad (6.36)$$

Нетрудно убедиться, что эта функция удовлетворяет всем граничным условиям задачи.

Вычислим производные от этой функции и подставим их в выражение для потенциальной энергии, помня, что при заделанной по контуру пластине постоянной толщины второе слагаемое в (6.32) равно нулю. Получим:

$$U_0 = 8D\pi^4 C^2 \iint \left[\frac{1}{a^2} \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \frac{1}{b^2} \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right]^2 dx dy.$$

Раскрывая скобки, запишем:

$$U_0 = 8D\pi^4 C^2 \iint \left[\frac{1}{a^4} \left(\cos^2 \frac{2\pi x}{a} + 2 \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \right) + \frac{2}{a^2 b^2} \left(\cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \cos \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{2\pi y}{b} + \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \right) + \frac{1}{b^4} \left(\cos^2 \frac{2\pi y}{b} + 2 \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right) \right] dx dy.$$

$$+ 2 \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \Big] dx dy. \quad (6.37)$$

Для упрощения дальнейших расчетов вычислим несколько простых интегралов:

$$\int_{-a/2}^{a/2} dx = a, \quad \int_{-b/2}^{b/2} dy = b,$$

$$\int_{-a/2}^{a/2} \cos \frac{2\pi x}{a} dx = 0, \quad \int_{-b/2}^{b/2} \cos \frac{2\pi y}{b} dy = 0,$$

$$\int_{-a/2}^{a/2} \cos^2 \frac{2\pi x}{a} dx = \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(1 + \cos \frac{4\pi x}{a}\right) dx = \frac{a}{2},$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} \cos^2 \frac{2\pi y}{b} dy = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \left(1 + \cos \frac{4\pi y}{b}\right) dy = \frac{b}{2}.$$

Выполняя первое интегрирование выражения потенциальной энергии (6.37) по x от $-a/2$ до $a/2$, и учитывая вычисленные простейшие интегралы, получим:

$$U_0 = 8D\pi^4 C^2 \int_{-b/2}^{b/2} \left[\frac{1}{2a^3} \left(1 + 2 \cos \frac{2y}{b} + \cos^2 \frac{2\pi y}{b}\right) + \frac{1}{ab^2} \left(\cos \frac{2\pi y}{b} + \cos^2 \frac{2\pi y}{b}\right) + \frac{3a}{2b^4} \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \right] dy.$$

После второго интегрирования по переменной y , найдем

$$U_0 = 2D\pi^4 C^2 ab \left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{3}{b^4} \right). \quad (6.38)$$

Обобщенная масса определится из выражения (6.33), которое с учетом принятой функции (6.36) имеет вид:

$$\mathfrak{M} = m_0 C^2 \iint \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a}\right)^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b}\right)^2 dx dy,$$

или после раскрытия скобок:

$$\mathfrak{M} = m_0 C^2 \iint \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos^2 \frac{2\pi x}{a} + 2 \cos \frac{2\pi y}{b} + 4 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + 2 \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \cos^2 \frac{2\pi y}{b} + 2 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{2\pi y}{b} + \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \cos^2 \frac{2\pi y}{b}\right) dx dy.$$

После интегрирования по x получаем:

$$\mathfrak{M} = m_0 C^2 \int_{-b/2}^{b/2} \frac{3a}{2} \left(1 + 4 \cos \frac{2\pi y}{b} + \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \right) dy,$$

а после повторного интегрирования по y :

$$\mathfrak{M} = \frac{9}{4} m_0 C^2 ab. \quad (6.39)$$

Теперь можно найти собственную частоту колебаний:

$$p = \sqrt{\frac{2U_0}{\mathfrak{M}}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \pi^2 \sqrt{\frac{D}{m_0 a^4} \left(1 + \frac{2a^2}{3b^2} + \frac{a^4}{b^4} \right)}.$$

В частном случае, если пластина квадратная и $b = a$, из последнего выражения получается

$$p = 37,22 \sqrt{D/m_0 a^4}. \quad (6.40)$$

Это значение на 3,45 % выше точного (см. раздел 6.3).

Для уточнения решения примем в разложении (6.34) две функции, каждая из которых удовлетворяет граничным условиям. В качестве первой функции возьмем функцию (6.36):

$$w_1(x, y) = \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right).$$

Но легко убедиться, что граничным условиям удовлетворяет и функция

$$w_2(x, y) = \left(1 + \cos \frac{6\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{6\pi y}{b} \right). \quad (6.41)$$

Тогда, принимая

$$w(x, y) = C_1 w_1(x, y) + C_2 w_2(x, y), \quad (6.42)$$

составляя выражения для потенциальной энергии и обобщенной массы

$$U_0 = \frac{1}{2} C_1^2 \iint \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 dx dy + \\ + \frac{1}{2} C_2^2 \iint \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 dx dy,$$

$$\mathfrak{M} = C_1^2 m_0 \iint w_1^2 dx dy + C_2^2 m_0 \iint w_2^2 dx dy,$$

и записывая систему уравнений (6.35), получим:

$$C_1 \iint \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 dx dy - \frac{1}{2} p_1^2 C_1 m_0 \iint w_1^2 dx dy = 0,$$

$$C_2 \iint \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right)^2 dx dy - \frac{1}{2} p_2^2 C_2 m_0 \iint w_2^2 dx dy = 0.$$

Из этой системы уравнений находим:

$$p_1^2 = \frac{\iint \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 dx dy}{m_0 \iint w_1^2 dx dy}, \quad (6.43)$$

$$p_2^2 = \frac{\iint \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right)^2 dx dy}{m_0 \iint w_2^2 dx dy}. \quad (6.44)$$

Частота, соответствующая первому слагаемому в ряду (6.42), найдена ранее. Она определяется по формуле (6.40). Подставляя в формулу (6.44) функцию, соответствующую второму слагаемому (6.41) и выполняя те же процедуры, что и для первого слагаемого, получим:

$$U_0 = \frac{3}{8} \cdot 36^2 D \pi^4 C^2 ab \left(\frac{1}{a^4} + \frac{2}{3a^2 b^2} + \frac{1}{b^4} \right),$$

$$\mathfrak{M} = \frac{9}{4} m_0 C^2 ab,$$

$$p_2 = \frac{6}{\sqrt{3}} \pi^2 \sqrt{\frac{D}{m_0 a^4} \left(1 + \frac{2a^2}{3b^2} + \frac{a^4}{b^4} \right)}.$$

Если пластина квадратная ($b = a$), то для симметричных форм колебаний

$$p_2 = 55,82 \sqrt{D/m_0 a^4}.$$

Таким образом, метод Релея-Ритца позволяет находить приближенные значения нескольких первых собственных частот колебаний пластин. Кроме этого, он позволяет рассчитывать пластины с переменной толщиной, т. е. когда распределенная масса зависит от координат $m_0 = m_0(x, y)$. В этом случае при вычислении обобщенной массы пластины распределенная масса $m_0(x, y)$ остается под знаком интеграла.

6.5. Колебания круглых пластин постоянной толщины

Для круглых пластин уравнение движения и уравнение амплитудной функции удобно записывать в полярных координатах r, φ , где r – радиус-вектор; φ – полярный угол (рисунок 6.6). В этих координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (6.45)$$

Запишем дифференциальное уравнение для амплитудной функции (6.3) в виде

$$\nabla^2 \nabla^2 w - \alpha^4 w = 0.$$

Это уравнение представляет собой разность квадратов и может быть представлено в развернутой форме следующим образом:

$$(\nabla^2 w - \alpha^2 w)(\nabla^2 w + \alpha^2 w) = 0. \quad (6.46)$$

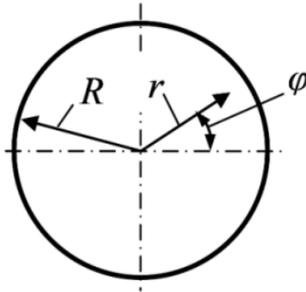


Рисунок 6.6

Для того чтобы уравнение обращалось в тождество достаточно, чтобы один из его сомножителей был равен нулю. Тогда вместо одного уравнения (6.46) получим два более простых уравнения:

$$\nabla^2 w - \alpha^2 w = 0,$$

$$\nabla^2 w + \alpha^2 w = 0.$$

Подставляя в них оператор Лапласа, выраженный через полярные координаты (6.45), запишем эти уравнения в развернутом виде:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \alpha^2 w = 0, \quad (6.47)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \alpha^2 w = 0. \quad (6.48)$$

Решение этих уравнений, соответствующее колебаниям пластины с n узловыми диаметрами, представляется в форме

$$w(r, \varphi) = W(r) \cos n\varphi. \quad (6.49)$$

Подставляя это выражение в уравнения (6.47), (6.48) и сокращая все члены уравнений на $\cos n\varphi$, получим:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \alpha^2 W = 0, \quad (6.50)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \alpha^2 W = 0. \quad (6.51)$$

Решениями уравнения (6.50) являются функции Бесселя n -го порядка первого $J_n(\alpha r)$ и второго $Y_n(\alpha r)$ рода, а решениями уравнения (6.51) – модифицированные функции Бесселя первого $I_n(\alpha r)$ и второго $K_n(\alpha r)$ рода. Эти функции представляют собой суммы бесконечных рядов:

$$J_n(\alpha r) = \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{2k},$$

$$Y_n(\alpha r) = \frac{1}{\sin n\pi} [J_n(\alpha r) \cos n\pi - J_{-n}(\alpha r)],$$

$$I_n(\alpha r) = i^{-n} J_n(i\alpha r), \quad i = \sqrt{-1},$$

$$K_n(\alpha r) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} [J_n(\alpha r) + iY_n(\alpha r)].$$

В этих формулах $\Gamma(z)$ – гамма функция, определяемая как

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}.$$

В качестве примера на рисунке 6.7 приведены графики функции $J_n(\alpha r)$ нулевого порядка ($n = 0$), первого ($n = 1$) и второго ($n = 2$) порядка. Существуют таблицы значений функций Бесселя при различных значениях аргумента.

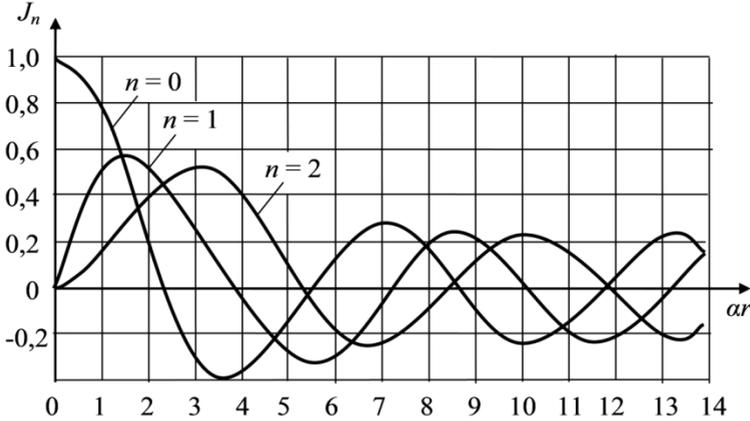


Рисунок 6.7

Производные от функций Бесселя определяются следующим образом:

$$\frac{d}{dr} J_n(\alpha r) = \frac{\alpha}{2} [J_{n-1}(\alpha r) - J_{n+1}(\alpha r)], \quad (6.52)$$

$$\frac{d}{dr} I_n(\alpha r) = \frac{\alpha}{2} [I_{n-1}(\alpha r) + I_{n+1}(\alpha r)]. \quad (6.53)$$

С учетом полученного решения амплитудная функция (6.49) записывается в виде

$$w(r, \varphi) = [C_1 J_n(\alpha r) + C_2 Y_n(\alpha r) + C_3 I_n(\alpha r) + C_4 K_n(\alpha r)] \cos n\varphi. \quad (6.54)$$

Постоянные коэффициенты $C_1 - C_4$, входящие в эту функцию, находятся из четырех граничных условий. Для кольцевой пластинки это два условия на внутреннем контуре и два – на внешнем контуре пластинки.

Для сплошной пластинки в функции (6.54) коэффициенты C_2 и C_4 равны нулю. При этом амплитудная функция принимает вид

$$w(r, \varphi) = [C_1 J_n(\alpha r) + C_3 I_n(\alpha r)] \cos n\varphi, \quad (6.55)$$

а оставшиеся коэффициенты C_1, C_3 находятся из граничных условий на внешнем контуре пластинки.

При деформациях силовые параметры в пластинке связаны с её геометрическими параметрами соотношениями:

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right], \quad (6.56)$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w), \quad V = Q_r - \frac{\partial M_r \varphi}{r \partial \varphi}, \quad (6.57)$$

$$M_{r\varphi} = D(1 - \mu) \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \quad (6.58)$$

где M_r – изгибающий момент на контуре; Q_r – поперечная сила; $M_{r\varphi}$ – крутящий момент; V – обобщенная поперечная сила на контуре.

Для сплошной круговой пластинки с радиусом R граничные условия на контуре могут быть следующими.

Заделка края:

$$w \Big|_{r=R} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0. \quad (6.59)$$

Опираание края:

$$w \Big|_{r=R} = 0, \quad M_r = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{r=R} = 0. \quad (6.60)$$

Свободный край:

$$Q = D \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + (1 + \mu) \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right]_{r=R} = 0, \quad M_r = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{r=R} = 0. \quad (6.61)$$

Подстановка решения (6.55) в граничные условия дает систему двух уравнений. Составляя определитель этой системы, развертывая его и приравнивая к нулю, получают частотное уравнение, из которого находят собственные ча-

стоты колебаний пластинки p_{mm} , где m – количество узловых окружностей при колебании пластинки, а n – количество узловых диаметров.

Приближенное определение собственных частот

Собственные частоты колебаний круглых пластин могут быть найдены приближенно с помощью метода Релея-Ритца. В этом случае выражения для энергии деформации и обобщенной массы записываются через полярные координаты:

$$U_0 = \frac{1}{2} \iint D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)^2 + 2(1 - \mu) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right]^2 - 2(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right\} r dr d\varphi.$$

$$\mathfrak{M} = \iint m_0 w^2 r dr d\varphi.$$

Для симметричных пластин формулы, определяющие потенциальную энергию деформации и обобщенную массу, упрощаются и имеют вид:

$$U_0 = \frac{\pi}{2} \int D \left[\left(W'' + \frac{1}{r} W' - \frac{n^2}{r^2} W \right)^2 + 2(1 - \mu) \frac{n^2}{r^2} (W')^2 - 2(1 - \mu) W'' \left(\frac{1}{r} W' - \frac{n^2}{r^2} W \right) \right] r dr.$$

$$\mathfrak{M} = \int m_0 W^2 r dr,$$

где $W = W(r)$ – амплитудная функция в выражении (6.49). Штрихи означают производные от этой функции по аргументу r .

Бегущие волны в круглых пластинах

Напомним, что амплитудная функция при колебаниях круглой пластины с узловыми диаметрами описывается функцией (6.49)

$$w(r, \varphi) = W(r) \cos n\varphi.$$

При этом функция прогибов пластины имеет вид

$$\xi(r, \varphi) = W(r) \cos n\varphi \cos pt. \quad (6.62)$$

Колебания, описываемые формулой (6.62), соответствуют стоячим волнам в пластине, при которых узловые диаметры неподвижны. Но решением уравнения движения пластины (6.2) является также функция

$$\xi(r, \varphi) = W(r) \sin n\varphi \sin pt. \quad (6.63)$$

Так как уравнение движения линейное, то сумма и разность его решений (6.62), (6.63) также является его решением. Следовательно, можно записать:

$$\begin{aligned} \xi(r, \varphi) &= W(r)(\cos n\varphi \cos pt + \sin n\varphi \sin pt) = \\ &= W(r) \cos n \left(\varphi - \frac{p}{n} t \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi(r, \varphi) &= W(r)(\cos n\varphi \cos pt - \sin n\varphi \sin pt) = \\ &= W(r) \cos n \left(\varphi + \frac{p}{n} t \right). \end{aligned}$$

Эти решения описывают бегущие по пластине волны. Первое выражение соответствует вращению картины деформаций в положительном направлении угла φ с угловой скоростью p/n , а второе – вращению картины деформаций в отрицательном направлении угла φ с той же скоростью.

Если на пластину действует нагрузка, вращающаяся по периферии пластины со скоростью, близкой к скорости распространения волн ($\omega = p/n$), то она может вызвать резонансные колебания и разрушение пластины. В практике такие ситуации возникают в дисках турбомашин. Критические скорости вращения диска при этом могут быть найдены при известных собственных частотах колебания диска p_n по формуле

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{p_n}{n},$$

где n – число узловых диаметров при колебаниях диска с собственной частотой p_n .

Пример 6.1

Определить собственные частоты и формы колебаний сплошной круглой пластинки с радиусом R , заделанной по контуру.

Решение.

Граничные условия в этом случае имеют вид (6.59). Подставляя в них выражение (6.55), запишем систему уравнений:

$$C_1 J_n(\lambda) + C_3 I_n(\lambda) = 0, \quad (6.64)$$

$$C_1 [J_{n-1}(\lambda) - J_{n+1}(\lambda)] + C_3 [I_{n-1}(\lambda) + I_{n+1}(\lambda)] = 0, \quad (6.65)$$

где

$$\lambda = \alpha R, \quad \alpha = \sqrt[4]{m_0 p^2 / D}. \quad (6.66)$$

Составляя определитель этой системы, разворачивая его и приравнивая к нулю, получим частотное уравнение:

$$J_n(\lambda)[I_{n-1}(\lambda) + I_{n+1}(\lambda)] - \\ - I_n(\lambda)[J_{n-1}(\lambda) - J_{n+1}(\lambda)] = 0. \quad (6.67)$$

Задавая значения λ и определяя по таблицам или численно значения функций Бесселя, можно построить график функции левой части этого уравнения. Точки пересечения этого графика с осью λ_{mn} и будут определять решения частотного уравнения. Зная эти значения можно определить собственные частоты по формуле

$$p_{mn} = \lambda_{mn}^2 \sqrt{D / m_0 R^4}. \quad (6.68)$$

В таблице 6.2. приведены значения λ_{mn} для первых трех форм колебаний пластины, заделанной по контуру. Подставляя эти значения в формулу (6.68), получим при колебаниях без узловых окружностей:

$$p_{00} = 10,214 \sqrt{\frac{D}{m_0 R^4}}, \quad p_{01} = 21,261 \sqrt{\frac{D}{m_0 R^4}}, \\ p_{02} = 34,881 \sqrt{\frac{D}{m_0 R^4}}.$$

При колебаниях без узловых диаметров:

$$p_{00} = 10,214 \sqrt{\frac{D}{m_0 R^4}}, \quad p_{10} = 39,766 \sqrt{\frac{D}{m_0 R^4}},$$

$$p_{20} = 89,094 \sqrt{\frac{D}{m_0 R^4}}.$$

Выражая из уравнения (6.64)

$$C_3 = -\frac{J_n(\lambda_{mn})}{I_n(\lambda_{mn})} C_1,$$

подставляя это соотношение в (6.55), и принимая $C_1 = 1$, получим форму колебаний в безразмерном виде:

$$w_{mn}(r, \varphi) = \left[J_n \left(\lambda_{mn} \frac{r}{R} \right) - \frac{J_n(\lambda_{mn})}{I_n(\lambda_{mn})} I_n \left(\lambda_{mn} \frac{r}{R} \right) \right] \cos n\varphi. \quad (6.69)$$

Зная собственные частоты можно найти критические скорости вращения нагрузки для данной пластины:

$$\omega_{кр1} = p_{01} = 21,261 \sqrt{D/m_0 R^4},$$

$$\omega_{кр2} = p_{02}/2 = 17,44 \sqrt{D/m_0 R^4}.$$

Полученные результаты показывают, что с увеличением числа узловых диаметров критические скорости уменьшаются.

Для сравнения в таблице 6.2. приведены значения λ_{mn} для сплошных круглых пластин при различных граничных условиях. Из этих данных видно, что закрепление края пластины приводит к увеличению значений λ_{mn} , а, следовательно, и к увеличению собственных частот колебаний. Однако с увеличением номера формы колебаний это различие уменьшается.

Например, если сравнивать собственные частоты пластины, заделанной по контуру, и опертой по контуру, то при $m = 0, n = 0$ частота опертой пластины на 45 % меньше, чем заделанной, а при $n = 2, m = 2$ – всего на 6,5 % меньше. Это связано с уже отмеченным ранее обстоятель-

ством, что краевые условия оказывают влияние на прогиб пластины на расстоянии от края равном половине длины волны. Поэтому с увеличением частоты и уменьшением длины волны влияние граничных условий на собственные частоты уменьшается.

Таблица 6.2 [5] – Значения λ_{mn} для круглых сплошных пластинок

m	Заделка по контуру			Опираие по контуру			Свободный контур		
	n			n			n		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	3,196	4,611	5,906	2,231	3,733	5,065	–	–	2,292
1	6,306	7,799	9,197	5,455	6,965	8,375	3,014	4,630	5,937
2	9,439	10,96	12,40	8,614	10,139	11,59	6,209	7,737	9,160

Частоты собственных колебаний свободной пластины существенно меньше, чем заделанной или опертой по краю. Следует обратить внимание, что при отсутствии в свободной пластине узловых окружностей и узловых диаметров ($m = 0, n = 0$) колебания отсутствуют и пластина перемещается как твердое недеформируемое тело. То же самое происходит и при одном узловом диаметре, когда $m = 0, n = 1$.

6.6. Вынужденные колебания прямоугольных пластин

Зная собственные частоты и формы колебаний пластины можно, используя метод главных координат, получить решение для вынужденных колебаний путем разложения их по собственным формам и частотам. Такое разложение называют разложением по нормальным гармоникам.

Вспомним, что при расчете вынужденных колебаний балки (см. раздел 5.10) главная координата q_k при k -ой

форме колебаний определялась из дифференциального уравнения

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{Q_k}{m_k}, \quad Q_k = \sum_{i=1}^n P_i(t) u_{ik},$$

где Q_k – обобщенная сила; $P_i(t)$ – действующая внешняя сила, зависящая от времени; u_{ik} – перемещение точки приложения силы при k -ой форме колебаний.

После определения главных координат для каждой формы колебаний находилось решение уравнения движения при вынужденных колебаниях как сумма произведений амплитудной функции на главную координату по всем формам колебаний:

$$x(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) q_k(t).$$

Поскольку в пластинах положение каждой точки характеризуется двумя координатами x, y , то в формуле обобщенной силы появится двойная сумма и решение уравнения движения в главных координатах запишется в виде:

$$\xi(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{km}(x, y) q_{km}(t). \quad (6.70)$$

Именно в таком виде получено выражение (6.14). Но поскольку оно описывает свободные колебания системы, главная координата представляет собой гармоническую функцию $\cos(p_{km}t + \varphi_{km})$.

При вынужденных колебаниях пластины под действием сосредоточенной силы $P(t)$, приложенной в точке с координатами x_0, y_0 , дифференциальное уравнение для главной координаты принимает вид:

$$\ddot{q}_{km} + p_{km}^2 q_{km} = \frac{P(t) w_{km}(x_0, y_0)}{\iint m_0 w_{km}^2(x, y) dx dy}. \quad (6.71)$$

Решением этого уравнения при $m_0 = \text{const}$ является функция:

$$q_{km} = \frac{1}{p_{km}} \cdot \frac{w_{km}(x_0, y_0)}{m_0 \iint w_{km}^2(x, y) dx dy} \cdot \int_0^t P(\theta) \sin[p_{km}(t - \theta)] d\theta, \quad (6.72)$$

где $P(\theta)$ – закон изменения действующей силы во времени.

Подставляя эту функцию в выражение (6.70), получим решение уравнения движения в виде разложения по нормальным гармоникам (по собственным формам колебаний)

$$\xi(x, y, t) = \frac{1}{m_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w_{km}(x, y) w_{km}(x_0, y_0)}{p_{km} \iint w_{km}^2(x, y) dx dy} \times \int_0^t P(\theta) \sin[p_{km}(t - \theta)] d\theta. \quad (6.73)$$

Пример 6.2

Определить закон движения квадратной пластины с размером стороны a и толщиной h шарнирно опертой по всем четырем сторонам, если в некоторый момент времени к её центру с координатами $x_0 = a/2$, $y_0 = a/2$ приложена сила P , сохраняющая в дальнейшем свою величину.

Решение.

В разделе 6.2 найдено, что собственные частоты и формы колебаний прямоугольной пластины определяются выражениями (6.12), (6.13). Для симметричных форм колебаний квадратной пластины с длиной стороны a эти формулы запишутся так:

$$p_k = 2k^2 \pi^2 \sqrt{D/m_0} a^4,$$

$$w_k(x, y) = C_k \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{a}.$$

Вычислим интегралы, входящие в формулу (6.73), учитывая, что $P = const$:

$$\int_0^t P \sin[p_k(t - \theta)] d\theta = \frac{P}{p_k} (1 - \cos p_k t),$$

$$\iint_0^a w_k^2(x, y) dx dy = C_k^2 \iint_0^a \sin^2 \frac{k\pi x}{a} \sin^2 \frac{k\pi y}{a} dx dy =$$

$$= \frac{C_k^2 a^2}{4},$$

$$w_k(x_0, y_0) = C_k \sin^2 \frac{k\pi}{2} = C_k, \quad k = 1, 3, 5 \dots$$

Из последней формулы следует, что при четных значениях k функция $w_k(x_0, y_0)$ равна нулю и, следовательно, в системе могут происходить только симметричные колебания с нечетным числом полуволн.

Подставляя эти выражения в формулу для прогибов пластины (6.73), запишем:

$$\xi(x, y, t) = \frac{a^2 P}{\pi^4 D} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^4} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{a} (1 - \cos p_k t). \quad (6.74)$$

Прогиб центра пластины будет определяться зависимостью:

$$\begin{aligned} \xi(x_0, y_0, t) &= \frac{a^2 P}{\pi^4 D} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^4} (1 - \cos p_k t) = \\ &= \frac{2a^2 P}{\pi^4 D} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^4} \sin^2 \frac{p_k}{2} t. \end{aligned}$$

Представим последнюю формулу в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \xi(x_0, y_0, t) &= \\ &= \frac{2a^2 P}{\pi^4 D} \left(\sin^2 \frac{p_1}{2} t + \frac{1}{81} \sin^2 \frac{p_2}{2} t + \frac{1}{625} \sin^2 \frac{p_3}{2} t + \dots \right). \end{aligned}$$

Из неё следует, что в разложении функции прогибов по нормальным гармоникам с увеличением частоты гармоники её амплитуда интенсивно уменьшается. Амплитуда третьей гармоники составляет всего 0,16 % от амплитуды первой.

Рассматриваемую задачу можно было решить и обычным способом, минуя формулу (6.72). При постоянной силе, действующей в центре пластины, учитывая, что

$$Q_k = Pw(x_0, y_0) = PC_k,$$

формулу (6.71) можно записать в виде

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{PC_k}{m_k}.$$

Решение этого неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы общего решения однородного уравнения, и частного решения неоднородного уравнения:

$$q_k = A \sin p_k t + B \cos p_k t + \frac{PC_k}{p_k^2 \mathfrak{M}_k}. \quad (6.75)$$

Здесь первые два слагаемых описывают общее решение однородного уравнения, а третье слагаемое – частное решение неоднородного уравнения. При нулевых начальных условиях по перемещениям и скоростям точек пластины имеем:

$$q_k(0) = 0, \quad \dot{q}_k(0) = 0.$$

Подставляя в эти начальные условия решение (6.75), найдем:

$$B = -\frac{PC_k}{p_k^2 \mathfrak{M}_k}, \quad A = 0,$$

$$q_k = \frac{PC_k}{p_k^2 \mathfrak{M}_k} (1 - \cos p_k t).$$

$$\begin{aligned} \xi(x, y, t) &= \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} w_k(x, y) q_k(t) = \\ &= \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{w_k(x, y) PC_k}{p_k^2 \mathfrak{M}_k} (1 - \cos p_k t). \end{aligned}$$

Подставляя в это выражение

$$w_k(x, y) = C_k \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{a},$$

$$\mathfrak{M}_k = \iint_0^a w_k^2(x, y) dx dy = \frac{C_k^2 a^2}{4},$$

получим формулу (6.74).

6.7. Уравнения движения цилиндрических оболочек

Для описания колебаний цилиндрической оболочки необходимо выбрать обобщенные координаты, определяющие положение всех точек системы в любой момент времени. Положение любой точки на поверхности цилиндрической

оболочки можно задать двумя координатами: координатой x вдоль образующей оболочки (рисунок 6.8) и координатой s по окружности оболочки. Перемещение любой точки на поверхности оболочки можно разложить на три составляющие: перемещение вдоль образующей u_1 , перемещение по окружности u_2 и перемещение по нормали к поверхности оболочки или прогиб поверхности оболочки w .

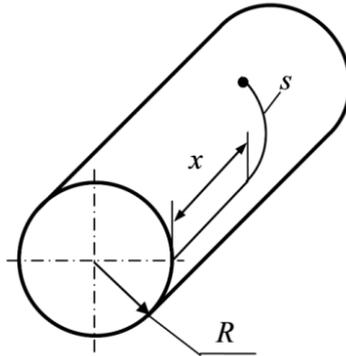


Рисунок 6.8

Уравнение движения оболочки получают из уравнения её деформации под действием статических внешних сил путем присоединения к этим уравнениям инерционных сил. В результате получают для трех переменных u_1 , u_2 , w три уравнения движения:

$$\frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial s} + \frac{\mu}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) = m_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (6.76)$$

$$\frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial s} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} \right) + \frac{D}{R^2} \left[2(1-\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} - 2(1-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial s} - R \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \right] = m_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (6.77)$$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{w}{R} \right) + \\ + D \left\{ \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R} \left[(2-\mu) \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial s} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial s^3} \right] \right\} = -m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (6.78)$$

Решение этой системы уравнений при произвольных граничных условиях является чрезвычайно громоздким и выполняется численными методами. Поэтому при возможности стараются упростить эти уравнения.

Для тонких оболочек может быть использована *безмоментная теория оболочек*, которая не учитывает изгибающие и крутящие моменты. В этом случае уравнение (6.76) остается без изменения, а в уравнениях (6.77) и (6.78) исчезают члены с множителем D . В результате эти уравнения принимают более простой вид:

$$\frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial s} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} \right) = m_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (6.79)$$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{w}{R} \right) = -m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (6.80)$$

Для пологих оболочек в уравнениях (6.77), (6.78) можно пренебречь членами, стоящими в квадратных скобках и записать:

$$\frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial s} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} \right) = m_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{R} \cdot \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{w}{R} \right) + D \nabla^2 \nabla^2 w = -m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Не останавливаясь на решении этих уравнений ввиду его громоздкости, отметим, что в справочной литературе, например [5, 18], можно найти значения собственных частот и форм колебаний цилиндрических оболочек для различных граничных условий.

7. КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ ПРИ УДАРЕ

7.1. Контактная теория Герца

В 1881 г. Герцем была разработана теория статического сжатия тел с криволинейными контактными поверхностями, описываемыми уравнениями второго порядка. В соответствии с этой теорией при статическом сжатии двух сферических тел зависимость между контактной силой и сближением центров масс тел имеет вид:

$$P = K\alpha^{3/2}, \quad (7.1)$$

где $\alpha = u_1 - u_2$ – сближение центров масс тел; u_1, u_2 – перемещение центров масс тел; K – коэффициент, зависящий от упругих свойств материалов тел и радиусов кривизны их ударных поверхностей r_1, r_2 ;

$$K = \frac{4}{3 \left[\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right]} \sqrt{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}, \quad (7.2)$$

E, μ – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона для материалов тел.

Позже, на основе зависимости (7.1), Герц разработал модель, позволяющую определить усилия в контакте двух сферических тел при ударе и время удара. В основе этой модели лежат две гипотезы.

Во-первых, предполагается, что при ударном взаимодействии тел существенными являются местные деформации в зоне контакта, а общими деформациями тел вследствие их малости можно пренебречь.

Во-вторых, принимается, что зависимость контактной силы от деформации при ударе остается такой же, как и при статическом сжатии тел.

С учетом принятых допущений задача удара сводится к соударению двух твердых тел (рисунок 7.1 а), взаимодей-

ствующих друг с другом через упругий элемент с нелинейной характеристикой, имеющей вид (7.1) (рисунок 7.1 б).

Записывая уравнения движения тел в виде:

$$m_1 \ddot{u}_1 = -P,$$

$$m_2 \ddot{u}_2 = P,$$

умножая первое из этих уравнений на m_2 , второе на m_1 и вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$m_1 m_2 (\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2) = P(m_1 + m_2).$$

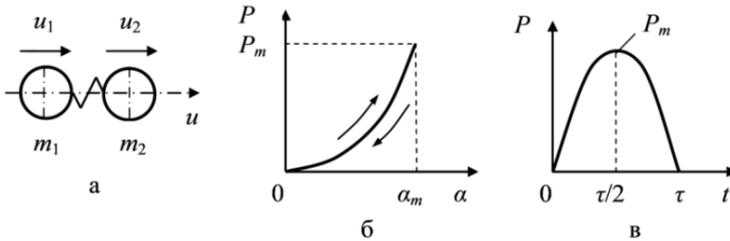


Рисунок 7.1

Заменяя в этом уравнении

$$u_1 - u_2 = \alpha, \quad m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = m, \quad P = K \alpha^{3/2},$$

запишем:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{K}{m} \alpha^{3/2}. \quad (7.3)$$

Для интегрирования выражения (7.3) перепишем его в виде:

$$\frac{d\dot{\alpha}}{dt} = -\frac{K}{m} \alpha^{3/2}.$$

Умножая числитель и знаменатель левой части этого уравнения на $d\alpha$, и учитывая, что $d\alpha/dt = \dot{\alpha}$, приведем его к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\dot{\alpha} d\dot{\alpha} = -\frac{K}{m} \alpha^{3/2} d\alpha.$$

Интегрирование этого уравнения при начальных условиях

$$\alpha(0) = 0, \dot{\alpha}(0) = V_0,$$

где V_0 – относительная скорость движения тел, приводит к выражению

$$\dot{\alpha} = \sqrt{V_0^2 - \frac{4K}{5m}\alpha^{5/2}}. \quad (7.4)$$

Максимальное сближение тел α_m соответствует моменту времени, когда их относительная скорость равна нулю. Приравнявая правую часть последнего выражения к нулю, найдем:

$$\alpha_m = \left(\frac{5mV_0^2}{4K}\right)^{2/5}. \quad (7.5)$$

Максимальная сила удара определится как

$$P_m = K\alpha_m^{3/2} = K^{2/5}(1,25mV_0^2)^{3/5}. \quad (7.6)$$

Повторное интегрирование уравнения (7.4) позволяет определить время удара. Не останавливаясь на процедуре интегрирования, запишем конечную формулу для времени удара, приведенную в работах [7, 15]:

$$\tau = 3,213 \left(\frac{m^2}{V_0 K^2}\right)^{1/5}. \quad (7.7)$$

Из этой формулы видно, что длительность удара в наибольшей степени зависит от массы соударяющихся тел и с её увеличением возрастает. Меньшее влияние на время удара оказывают скорость соударения и приведенный радиус кривизны контактных поверхностей тел, который входит в коэффициент K в степени $1/2$. С увеличением этих параметров время удара уменьшается.

В работе [7] показано, что, продолжая решение этой задачи, можно получить приближенные формулы, описывающие зависимости сближения тел и силы удара от времени:

$$\alpha = \alpha_m \sin \frac{1,06V_0}{\alpha_m} t, \quad P = K\alpha^{3/2}. \quad (7.8)$$

График зависимости $P(t)$ показан на рисунке 7.1 в. Поскольку модель Герца описывает упругие деформации, график $P(t)$ симметричен относительно вертикальной оси, проходящей через точку P_m .

Границы применимости модели Герца

В [15] отмечается, что модель Герца дает результаты, хорошо совпадающие с экспериментом, если продолжительность удара τ значительно больше наибольшего периода свободных колебаний T соударяющихся тел

$$\tau/T > 10.$$

Но время удара τ , как видно из формулы (7.7), с увеличением скорости удара уменьшается, и при превышении некоторого значения скорости теория Герца будет давать существенные ошибки.

С другой стороны, увеличение скорости приводит к росту контактных напряжений и при определенных значениях скорости в контакте начнут развиваться пластические деформации, которые моделью Герца не учитываются. Это второе ограничение является главным, поскольку наступает раньше первого [15] и границы применимости теории Герца следует определять по этому ограничению.

Третье ограничение связано со значениями радиусов кривизны контактирующих поверхностей. При неограниченном увеличении радиусов кривизны контактирующих поверхностей значение коэффициента K , а, следовательно, и контактной силы (7.6) стремится к бесконечности, а время удара (7.7) – к нулю. Это не соответствует результатам экспериментов.

7.2. Линеаризация модели Герца

Нелинейная модель Герца приводит к определенным сложностям при интегрировании уравнений движения и для ряда параметров ударного процесса позволяет получить только приближенные зависимости. Она неудобна для исследования более сложных ударных систем, состоящих из нескольких соударяющихся тел.

В связи с этим В.Л. Бидерманом [2] было предложено упростить модель Герца, аппроксимировав функцию $P(\alpha)$ кусочно-линейной (рисунок 7.2 а) вида

$$P = 0, \text{ если } \alpha \leq \alpha_0, \\ P = c(\alpha - \alpha_0), \text{ если } \alpha > \alpha_0, \quad (7.9)$$

где c – коэффициент жесткости линейной характеристики; α_0 – постоянная величина.

Величины c и α_0 определяются из условий равенства контактных сил и потенциальных энергий деформации тел в момент их максимального сближения (α_m) в линейной и нелинейной модели. При этом величины максимального сближения тел в обеих моделях принимаются одинаковыми.

Потенциальная энергия деформации определяется площадью, ограниченной функцией $P(\alpha)$ и осью абсцисс (рисунок 7.2 а):

$$U = \int_{\alpha_0}^{\alpha_m} P(\alpha) d\alpha.$$

Для нелинейной модели Герца:

$$U_1 = \int_0^{\alpha_m} K\alpha^{3/2} d\alpha = \frac{2}{5} K\alpha_m^{5/2},$$

для линеаризованной модели:

$$U_2 = \int_{\alpha_0}^{\alpha_m} c(\alpha - \alpha_0) d\alpha = \frac{c}{2} (\alpha_m - \alpha_0)^2.$$

Приравнивая потенциальные энергии деформаций и величины максимальных контактных сил в линейной и нелинейной модели, получим систему уравнений:

$$\frac{2}{5}K\alpha_m^{5/2} = \frac{c}{2}(\alpha_m - \alpha_0)^2,$$

$$K\alpha^{3/2} = c(\alpha - \alpha_0),$$

из которой найдем:

$$\alpha_0 = \frac{1}{5}\alpha_m, \quad c = 1,25K\alpha_m^{1/2} = 1,25K^{2/3}P_m^{1/3}. \quad (7.10)$$

Подставляя в последнее выражение соотношение (7.6), получим формулу для определения приведенного коэффициента жесткости при известных условиях соударения

$$c = 1,25^{6/5}K^{4/5}(mV_0^2)^{1/5}. \quad (7.11)$$

Из этой формулы видно, что коэффициент жесткости с увеличением приведенной массы системы или с увеличением энергии удара возрастает, хотя и незначительно – в степени 1/5.

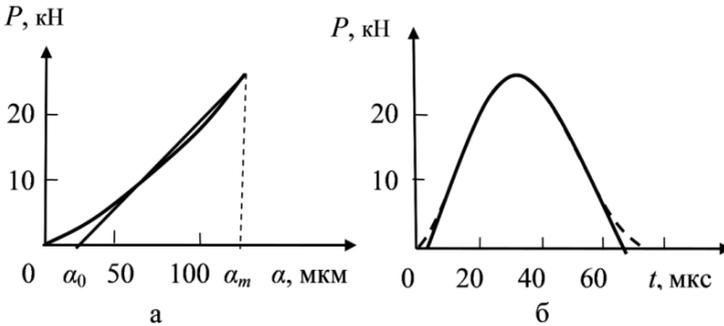


Рисунок 7.2

Далее задача соударения двух тел решается так же, как и при использовании модели Герца. Подставляя в правую часть уравнения (7.3) линеаризованную зависимость силы от местной деформации (7.9), приходим к уравнению вида:

$$\ddot{\alpha} + \lambda^2\alpha = \lambda^2\alpha_0,$$

где $\lambda^2 = c/m$.

Решением этого уравнения является функция

$$\alpha = A \sin \lambda t + B \cos \lambda t + \alpha_0,$$

в которой A и B – постоянные коэффициенты, определяемые из начальных условий: $\alpha(0) = \alpha_0$, $\dot{\alpha}(0) = V_0$, как $A = V_0/\lambda$, $B = 0$.

С учетом найденных постоянных формулы, определяющие зависимости от времени сближения тел при ударе, их относительной скорости и усилий, возникающих в контакте тел, имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \frac{V_0}{\lambda} \sin \lambda t, & V &= \dot{\alpha} = V_0 \cos \lambda t, \\ P &= \frac{cV_0}{\lambda} \sin \lambda t. \end{aligned} \quad (7.12)$$

а время удара определяется формулой:

$$\tau = \frac{\pi}{\lambda} + \frac{2\alpha_0}{V_0}. \quad (7.13)$$

Второе слагаемое в правой части последнего уравнения учитывает время прохождения телами расстояний α_0 в начале и перед окончанием соударения.

Максимальное значение силы теперь можно найти по более простой формуле

$$P_m = cV_0/\lambda. \quad (7.14)$$

Обычно при определении коэффициента жесткости c по формуле (7.10) значение максимальной силы P_m заранее неизвестно. В этом случае коэффициент жесткости находится методом последовательных приближений. Вначале задается некоторое значение силы P_m и по нему определяется коэффициент жесткости c . Затем по формуле (7.14) вычисляется значение P_m и по нему уточняется коэффициент жесткости c и т.д., пока расхождение между результатами расчета по предыдущему и последующему циклу не будет меньше заданной величины, например 1 %.

Для оценки погрешности в определении времени, вносимой линеаризацией контактной характеристики, подставим в формулу (7.13) соотношения

$$\lambda = \sqrt{c/m}, \quad \alpha_0 = 0,2\alpha_m,$$

где α_m определяется выражением (7.5), а c – выражением (7.11), получим:

$$\tau = 1,25^{-0,6}(\pi + 0,5) \left(\frac{m^2}{K^2 V_0} \right)^{0,2} = 3,185 \left(\frac{m^2}{K^2 V_0} \right)^{0,2}.$$

Сравнение этого выражения с выражением (7.7) показывает, что время удара в линейной модели меньше, чем в нелинейной. Однако это уменьшение несущественно и составляет всего 0,87 %. Напомним, что максимальная деформация, максимальная энергия деформации и контактная сила в обеих моделях одинаковые. Таким образом, линеаризация модели Герца позволяет существенно упростить расчетные зависимости при незначительной погрешности в определении времени удара.

Пример 7.1

Рассмотрим пример расчета соударения тел с использованием модели Герца.

Допустим, стальной шар с радиусом $r = 15$ мм ударяет по массивной стальной плите. Скорость шара перед ударом $V_0 = 5$ м/с. Модуль упругости стали $E = 21 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, плотность $\rho = 7800$ кг/м³, масса шара при указанных размерах $m = 0,11$ кг. Необходимо определить зависимость контактной силы от времени, максимальное значение силы и время удара.

Решение

Так как шар и плита выполнены из одного материала, поверхность плиты плоская и радиус её кривизны стремится к бесконечности, формула (7.2) для определения коэффициента K в данном случае принимает вид:

$$K = \frac{2E}{3(1-\mu^2)} \sqrt{r}.$$

Подставляя в эту формулу численные значения, найдем

$$K = 1,884 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^{3/2}.$$

Тогда из формул (7.5)–(7.7) следует:

$$\alpha_m = [5 \cdot 0,11 \cdot 5^2 / (4 \cdot 1,884 \cdot 10^{10})]^{2/5} = 1,272 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

$$P_m = 1,884 \cdot 10^{10} \cdot (1,272 \cdot 10^{-4})^{3/2} = 27030 \text{ Н.}$$

$$\tau = 3,213 \cdot 0,11^{2/5} (5 \cdot 1,884^2 \cdot 10^{20})^{1/5} = 74,8 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

Подставляя значения максимального сближения α_m , скорости соударения V_0 , коэффициента K в формулы (7.8) и задавая времени t значения из интервала $0 < t < \tau$, построим график зависимости $P(t)$. На рисунке 7.2 б он показан штриховой линией.

Проведем теперь расчет по линейной модели. Подставляя в формулы (7.10) численные значения, получим:

$$\alpha_0 = 1,272 \cdot 10^{-4} / 5 = 0,254 \cdot 10^{-4} \text{ м,}$$

$$c = 1,25 \cdot 1,884 \cdot 10^{10} (1,272 \cdot 10^{-4})^{1/2} = 2,656 \cdot 10^8 \text{ Н/м.}$$

Тогда

$$\lambda = (2,656 \cdot 10^8 / 0,11)^{1/2} = 4,914 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1},$$

и в соответствии с формулой (7.13)

$$\tau = (\pi / 4,914 \cdot 10^4) + 2 \cdot 0,254 \cdot 10^{-4} / 5 = 74,06 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

График зависимости $P(t)$ для линейной модели, построенный по формуле (7.12), показан на рисунке 7.2 б сплошной линией.

Таким образом, при принятом подходе к линеаризации модели линейная модель дает такие же результаты по максимальным перемещениям, силам и скоростям, что и нелинейная. Отличие заключается лишь в небольшом расхождении значений времени удара (до 1 %) и функции $P(t)$ в начале и в конце удара, что для большинства практических задач несущественно.

7.3. Уругопластическая модель удара

Поскольку модель Герца уругая, то коэффициент восстановления скорости шара в ней независимо от материала шара равен единице. Это не подтверждается опытом. Известно, например, что коэффициент восстановления зависит от материала соударяющихся тел и от многих других факторов. В действительности он всегда меньше единицы.

Причина несоответствия теоретических и экспериментальных результатов заключается в том, что модель Герца не учитывает рассеяние энергии при ударе в виде звуковых волн, волн деформаций, распространяющихся по плите, а также не учитывает затраты энергии на внутреннее трение в материале соударяющихся тел и возможные пластические деформации тел.

Из всех перечисленных факторов наиболее существенным обычно бывает последний. В работе [15] отмечается, что пластические деформации в телах могут возникать даже при скоростях удара, меньших 1 м/с, что соответствует падению тела на жесткую поверхность с высоты 5 см.

Следует отметить, что предел текучести материала, по достижении которого начинают развиваться пластические деформации, с увеличением скорости соударения для большинства материалов возрастает, причем, это проявляется особенно сильно в диапазоне скоростей удара до 10 м/с.

Например, по данным различных исследователей [10] при увеличении скорости удара от нуля до 10 м/с предел текучести стали 45 возрастает примерно в 2,2 раза, стали 30ХГСА – в 1,4 раза, стали 30Х не меняется, а стали ШХ15 наоборот уменьшается примерно на 30%.

На основании результатов исследований в настоящее время наибольшее распространение получила уругопластическая модель удара, в которой контактная характеристика состоит из двух ветвей (рисунок 7.3 а). Ветви

нагрузки 1, соответствующей упругопластическим деформациям, и ветви разгрузки 2, соответствующей упругому восстановлению поверхностей.

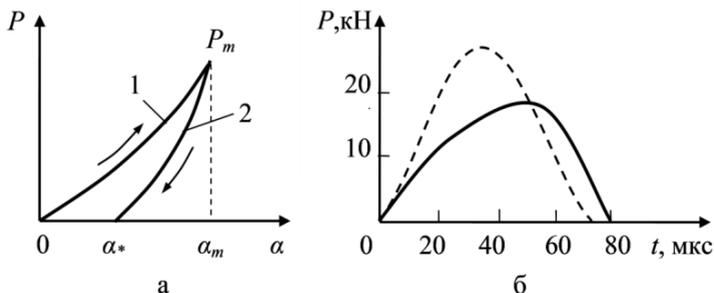


Рисунок 7.3

Взаимосвязь контактной силы с местной контактной деформацией на этапе нагрузки описывается зависимостью

$$P = b\alpha^n, \quad (7.15)$$

где b и n коэффициенты, отличные от коэффициентов в формуле Герца, причем коэффициент n для сферических поверхностей должен иметь значения, лежащие в диапазоне $1 < n < 1,5$. Методика определения коэффициентов b и n приведена в работах [9, 10].

На этапе разгрузки зависимость контактного усилия от деформации тел подчиняется упругому закону Герца:

$$P = K(\alpha - \alpha_*)^{3/2}, \quad (7.16)$$

где α_* – величина остаточной пластической деформации.

Приравнявая уравнения (7.15) и (7.16) при $\alpha = \alpha_m$, можно выразить величину остаточной деформации через максимальное сближение тел или через максимальную силу:

$$\alpha_* = \alpha_m - \left(\frac{b\alpha_m^n}{K}\right)^{2/3} = \left(\frac{P_m}{b}\right)^{1/n} - \left(\frac{P_m}{K}\right)^{2/3}. \quad (7.17)$$

Далее задача решается так же, как и при описании модели Герца, т.е. записываются уравнения движения тел,

в которых контактная сила в зависимости от фазы удара представляется в виде (7.15) или (7.16), и интегрированием этих уравнений определяется сближение тел α .

Опуская математические выкладки, которые можно найти в [10, 15], запишем конечные выражения для определения основных параметров упругопластического удара: максимальное сближение тел

$$\alpha_m = \left[\frac{mV_0^2(n+1)}{2b} \right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad (7.18)$$

максимальное значение контактной силы

$$P_m = \left[\frac{mV_0^2}{2} (n+1)b^n \right]^{\frac{n}{n+1}}, \quad (7.19)$$

длительность фазы нагрузки

$$\tau_1 = \frac{\alpha_m F_1(n)}{V_0}, \quad (7.20)$$

где $F_1(n)$ – множитель, выражающийся через гамма-функцию параметра n и имеющий значения, представленные в таблице 7.1.

Таблица 7.1 – Значения функции $F_1(n)$ [15]

n	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$F_1(n)$	1,571	1,548	1,526	1,507	1,489	1,472

Длительность фазы разгрузки

$$\tau_2 = 1,606(\alpha_m - \alpha_*)^{-1/4} \sqrt{m/K}, \quad (7.21)$$

коэффициент восстановления

$$R = 5^{-1/2} K^{-1/3} [(mV_0^2)^{2n-3} 2^{n+6} (n+1)^{5n} b^5]^{\frac{1}{6(n+1)}}. \quad (7.22)$$

Пример 7.2

Допустим, в предыдущем примере соударения шара с плитой в контакте тел при ударе возникают пластические деформации. При этом коэффициенты, входящие в урав-

нение (7.15), имеют значения: $n = 1,25$; $b = 10^9 \text{ Н/м}^{1,25}$. Необходимо определить максимальные контактные деформации тел, остаточную деформацию, максимальную силу и время удара, коэффициент восстановления скорости шара после удара.

Решение.

Подставляя исходные данные в формулу (7.18), находим максимальное сближение центров масс тел:

$$\alpha_m = 1,652 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

затем находим величину остаточной деформации шара (7.17):

$$\alpha_* = 0,656 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

вычисляем максимальную контактную силу (7.19):

$$P_m = 18729 \text{ Н.}$$

По формуле (7.20) с учетом данных таблицы 7.1 находим длительность фазы нагрузки:

$$\tau_1 = 50,4 \cdot 10^{-6} \text{ с};$$

вычисляем длительность фазы разгрузки (7.21):

$$\tau_2 = 39,1 \cdot 10^{-6} \text{ с};$$

общее время удара:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = 89,5 \cdot 10^{-6} \text{ с}$$

и коэффициент восстановления скорости шара при ударе (7.22)

$$R = 0,738.$$

В рассматриваемом примере диаграмма зависимости контактной силы от времени имеет вид, показанный на рисунке 7.3 б сплошной линией. Для сравнения на этом же рисунке штриховой линией показана диаграмма изменения контактной силы при отсутствии пластических деформаций. Из этих диаграмм видно, что пластические деформации контактной зоны приводят к уменьшению максимальной силы,

увеличению длительности удара и смещению времени достижения максимальной силы в сторону больших значений.

Линеаризация контактной характеристики, представленной на рисунке 7.3 а, по методике изложенной выше, позволяет упростить расчетные формулы. Вид полученных таким образом формул приведен в работе [10]. Они следующие.

Для фазы нагрузки:

усилия в контакте тел $P_1(t)$ и длительность фазы нагрузки τ_1

$$P_1(t) = \frac{c_1 V_0}{\lambda_1} \sin \lambda_1 t, \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1},$$

где $\lambda_1 = \sqrt{c_1/m}$, c_1 – приведенный коэффициент жесткости линейной характеристики в фазе нагрузки:

$$c_1 = 0,5(n+1)b^{1/n}P_m^{(n-1)/n}, \quad P_m = c_1 V_0 / \lambda_1.$$

Для фазы разгрузки:

усилия в контакте тел $P_2(t)$ и длительность фазы разгрузки τ_2 :

$$P_2(t) = P_m \cos \lambda_2 (t - \tau_1), \quad \tau_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2},$$

где $\lambda_2 = \sqrt{c_2/m}$, c_2 – приведенный коэффициент жесткости линейной характеристики в фазе разгрузки:

$$c_2 = 1,25K^{2/3}P_m^{1/3}, \quad P_m = c_1 V_0 / \lambda_1.$$

7.4. Продольное соударение стержней. Волновая модель удара Сен-Венана

Теория Герца дает результаты, хорошо согласующиеся с опытом, при соударении тел, поперечные размеры которых соизмеримы с продольными, а ударные поверхности тел сферические. В этом случае правомерно принятое Герцем допущение, что общие деформации тел при ударе пренебрежимо малы по сравнению с местными контактными деформациями. Но это допущение не применимо к соуда-

рению стержней с плоскими торцами. В этом случае, наоборот, местные контактные деформации пренебрежимо малы по сравнению с общими деформациями тел.

Задачу о соударении стержней с плоскими торцами пытался решить А. Навье (1823), описывая движение сечений стержня одномерным волновым уравнением (5.1). Запишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (7.23)$$

где u – перемещение сечений стержня; x – продольная координата сечения стержня; t – время; a – скорость распространения волны деформации в стержне, $a = \sqrt{E/\rho}$.

Навье искал решение этого уравнения в виде произведения двух функций, одна из которых зависела только от координаты сечения, а вторая – только от времени. По сути Навье применил метод главных координат, рассмотренный нами в предыдущей главе (см. раздел 5.2.) и получил решение в виде бесконечных рядов. Учитывая, что ударные процессы быстропротекающие и генерируемые при ударе продольные волны деформации состоят из высокочастотных гармоник ряда, полученные Навье, сходились медленно.

По мнению различных исследователей, для того чтобы получить приемлемую для инженерной практики точность необходимо учесть в этих рядах от 70 до 200 гармоник. Это, конечно сильно затрудняло практическое использование этого метода.

В отличие от Навье Сен-Венан решает волновое уравнение (7.23) методом Д'Аламбера, в соответствии с которым решение волнового уравнения записывается в виде суммы двух функций:

$$u(x, t) = f(at - x) + \varphi(at + x), \quad (7.24)$$

одна из которых $f(at - x)$ описывает перемещение сечений в волне, распространяющейся в положительном направле-

нии оси x , а вторая – $\varphi(at + x)$ – перемещение сечений в волне, распространяющейся в отрицательном направлении оси x .

Дифференцируя решение (7.24) дважды по аргументам t и x и подставляя полученные выражения в уравнение (7.23), можно убедиться, что оно обращается в тождество не зависимо от того, какой вид имеют функции f и φ .

Вид функций $f(at-x)$ и $\varphi(at+x)$ определяется из граничных и начальных условий решаемой задачи.

Решение, полученное Сен-Венаном для продольного соударения двух стержней с плоскими ударными торцами, описывалось разрывными функциями. Это объясняло медленную сходимость рядов в решении Навье.

Волновая модель удара, основанная на описании движения сечений стержней одномерными волновыми уравнениями, и их последующем решении методом Д'Аламбера с учетом граничных и начальных условий задачи, получила название *волновой модели удара Сен-Венана*. Она оказалась удобной для практических расчетов и впоследствии широко использовалась.

Эксперименты показывают, что модель Сен-Венана дает результаты, достаточно хорошо совпадающие с опытными данными в том случае, если ударные торцы соударяющихся тел абсолютно плоские и параллельные, а продольные размеры тел в 10 и более раз превышают поперечные. Но зачастую модель Сен-Венана используется в качестве приближенной модели и в случаях, когда отношение продольных размеров соударяющихся тел к поперечным меньше указанных выше значений. При этом модель дает завышенные по сравнению с экспериментом значения усилий и деформаций в соударяющихся телах, но эта разница при выполнении прочностных расчетов деталей машин уходит в повышение запаса их прочности.

В качестве примера использования волновой модели Сен-Венана рассмотрим соударение двух стержней, которые в общем случае имеют различные диаметры и могут быть выполнены из различных материалов.

Допустим стержень 1, имеющий площадь поперечного сечения S_1 и длину l , двигаясь со скоростью V_0 , наносит удар по неподвижному стержню 2 с площадью поперечного сечения S_2 (рисунок 7.4 а). Предположим, что длина второго стержня L намного больше, чем первого и волны деформации, отраженные от правого торца второго стержня, не оказывают влияния на формирование начальной волны во втором стержне.

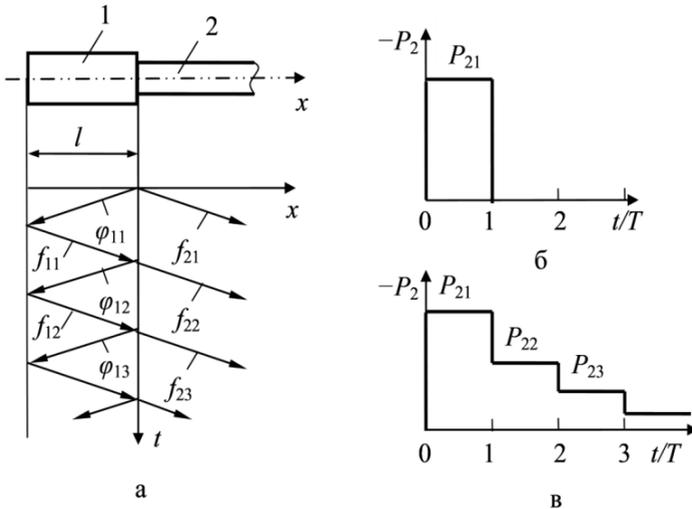


Рисунок 7.4

Стержни выполнены из различных материалов с модулями упругости соответственно E_1 , E_2 и плотностями ρ_1 , ρ_2 . Скорости распространения волн деформаций в стержнях a_1 и a_2 . Необходимо определить параметры волны деформации, генерируемой в стержне 2 при ударе.

В соответствии с моделью Сен-Венана движение сечений стержней описывается одномерными волновыми уравнениями:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0,$$

где $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ – соответственно перемещения сечений первого и второго стержня.

За начало оси x примем точку контакта стержней. Так как в процессе ударного взаимодействия упругие силы, действующие со стороны стержней на их контактное сечение, уравнивают друг друга, а взаимодействующие торцы стержней движутся совместно, то граничные условия для контактного сечения запишутся в виде:

$$E_1 S_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = E_2 S_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t), \quad (7.25)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u_2}{\partial t}(0, t), \quad u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad (7.26)$$

а начальные условия:

$$u_1(0, 0) = u_2(0, 0) = 0. \quad (7.27)$$

Граничное условие на свободном торце стержня 1 имеет вид:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(-l, t) = 0. \quad (7.28)$$

В начальный момент удара в стержнях возникают волны деформации, описываемые функциями $\varphi_{11}(a_1 t + x)$ и $f_{21}(a_2 t - x)$ (рисунок 7.4 а). Для нахождения вида этих функций запишем решения волновых уравнений в форме Д'Аламбера. Так как первый стержень до удара двигался со скоростью V_0 , а при ударе в его контактном сечении возникла волна, движущаяся в отрицательном направлении оси x , то перемещение сечений стержня, охваченных этой волной, будет описываться функцией:

$$u_1(x, t) = V_0 t + \varphi_{11}(a_1 t + x). \quad (7.29)$$

Здесь и далее первая цифра в индексе функций f и φ показывает номер стержня, а вторая – номер волны, возникающей в этом стержне.

Во втором стержне до удара волн деформаций не было, и он был неподвижен. При ударе в нем формируется волна деформации, движущаяся в положительном направлении оси x и, следовательно,

$$u_2(x, t) = f_{21}(a_2 t - x). \quad (7.30)$$

Подставляя эти решения в первые два граничных условия, и заменяя $E_1 S_1 = C_1 a_1$, $E_2 S_2 = C_2 a_2$ (где $C_i = \rho_i a_i S_i$ – ударная жесткость соответствующего стержня), получим систему уравнений:

$$C_1 a_1 \varphi'_{11}(a_1 t) = -C_2 a_2 f'_{21}(a_2 t),$$

$$V_0 + a_1 \varphi'_{11}(a_1 t) = a_2 f'_{21}(a_2 t),$$

решая которую найдем:

$$\varphi'_{11}(a_1 t) = -\frac{C_2 V_0}{a_1(C_1 + C_2)}, \quad f'_{21}(a_2 t) = \frac{C_1 V_0}{a_2(C_1 + C_2)}.$$

Учитывая аргументы функций f и φ , запишем их в общем виде

$$\begin{aligned} \varphi'_{11}(a_1 t + x) &= -\frac{C_2 V_0}{a_1(C_1 + C_2)}, \\ f'_{21}(a_2 t - x) &= \frac{C_1 V_0}{a_2(C_1 + C_2)}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Интегрируя эти функции при нулевых начальных условиях, получим:

$$\varphi_{11}(a_1 t + x) = -\frac{C_2 V_0}{a_1(C_1 + C_2)}(a_1 t + x),$$

$$f_{21}(a_2 t - x) = \frac{C_1 V_0}{a_2(C_1 + C_2)}(a_2 t - x).$$

Тогда смещения сечений стержней, охваченных волнами φ_{11} , f_{21} , скорости этих сечений и усилия в них определяются как:

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= V_0 t - \frac{c_2 V_0}{a_1(c_1 + c_2)} (a_1 t + x), \\
u_2(x, t) &= \frac{c_1 V_0}{a_2(c_1 + c_2)} (a_2 t - x), \\
V_{11}(x, t) &= \frac{\partial u_{11}}{\partial t} = \frac{c_1 V_0}{(c_1 + c_2)}, \quad V_{21}(x, t) = V_{11}(x, t), \\
P_{11}(x, t) &= E_1 S_1 \frac{\partial u_{11}}{\partial x} = P_{21}(x, t) = E_2 S_2 \frac{\partial u_{21}}{\partial x}, \\
P_{21} &= -\frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)} V_0. \tag{7.32}
\end{aligned}$$

Знак минус в последней формуле показывает, что в сечениях действуют усилия сжатия.

Волна φ_{11} , распространяясь по стержню 1, в момент времени $t = l/a_1$ достигает левого свободного торца стержня 1 и отражается от него волной f_{11} (рисунок 7.4 а). С этого момента времени перемещение сечений, охваченных волнами φ_{11} и f_{11} , описывается функцией

$$u_1(x, t) = V_0 t + f_{11}(at - x) + \varphi_{11}(at + x).$$

Подставляя эту функцию в граничное условие (7.28) запишем

$$f'_{11}(a_1 t + l) = \varphi'_{11}(a_1 t - l),$$

или

$$f'_{11}(\xi) = \varphi'_{11}(\xi - l),$$

где $\xi = a_1 t + l$.

Из последнего выражения следует, что функция f'_{11} имеет такой же вид, как и функция φ'_{11} , но с аргументом на $2l$ меньшим. При этом

$$f'_{11}(a_1 t - x) = -\frac{c_2 V_0}{a_1(c_1 + c_2)}. \tag{7.33}$$

Интегрируя эту функцию можно найти перемещение в сечениях, охваченных волной f_{11} , а затем и общее перемещение сечения, охваченного прямой и отраженной волной.

Волна f_{11} , достигая контактного сечения стержней, частично проходит через него в стержень 2, а частично отражается обратно в стержень 1. Этот процесс можно рассматривать как возникновение в контактном сечении в момент времени $t = 2l/a_1$ новых волн, описываемых функциями f_{22} и φ_{12} (рисунок 7.4 а). С этого момента времени для перемещения сечений стержней можно записать:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= V_0 t + f_{11}(at - x) + \varphi_{12}(at + x), \\ u_2(x, t) &= f_{22}(at - x). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в граничные условия (7.25), (7.26), получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 a_1 [-f'_{11}(a_1 t) + \varphi'_{12}(a_1 t)] &= -C_2 a_2 f'_{22}(a_2 t), \\ V_0 + a_1 f'_{11}(a_1 t) + a_1 \varphi'_{12}(a_1 t) &= a_2 f'_{22}(a_2 t). \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно неизвестных функций $\varphi'_{12}(a_1 t)$, $f'_{22}(a_2 t)$ и учитывая соотношение (7.33), найдем:

$$\begin{aligned} \varphi'_{12}(a_1 t + x) &= -\frac{2C_1 C_2 V_0}{a_1 (C_1 + C_2)^2}, \\ f'_{22}(a_2 t - x) &= \frac{C_1 (C_1 - C_2) V_0}{a_2 (C_1 + C_2)^2}. \end{aligned}$$

Тогда скорости смещения сечений, охваченных волной f_{22} , определяются как

$$V_{22}(x, t) = a_2 f'_{22}(a_2 t - x) = \frac{C_1 (C_1 - C_2) V_0}{(C_1 + C_2)^2},$$

а усилия в этих сечениях:

$$P_{22}(x, t) = -E_2 S_2 f'_{22}(a_2 t - x) = -\frac{C_1 C_2 (C_1 - C_2)}{(C_1 + C_2)^2} V_0.$$

Продолжая решение задачи аналогично предыдущему, можно найти вид функций, описывающих волны деформации f_{12} , φ_{13} , f_{23} (рисунок 7.4 а), а затем определить скорости смещения сечений, охваченных волной f_{23} и усилия в них.

В общем случае для усилий в n -ой волне деформации f_{2n} , получим

$$P_{2n} = -\frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)} \cdot \left(\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}\right)^{n-1} V_0. \quad (7.34)$$

Обозначая

$$q = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} = \frac{r_{12} - 1}{r_{12} + 1}, \quad r_{12} = \frac{c_1}{c_2}, \quad (7.35)$$

приведем уравнение (7.34) к виду

$$P_{2n} = P_{21} q^{n-1}. \quad (7.36)$$

Из выражения (7.34) следует, что при $C_1 \leq C_2$ через время $t = 2l/a$ от начала соударения усилия в контактном сечении стержней становятся равными нулю или изменяются по знаку. Но, поскольку связь стержней неудерживающая, в их контактном сечении растягивающих усилий быть не может. Изменение знака усилий указывает на то, что процесс удара окончен, и необходимо изменить граничные условия на ударных торцах стержней, приняв, что усилия на торцах равны нулю.

Таким образом, при выполнении условия $C_1 \leq C_2$ в стержне 2 генерируется волна прямоугольной формы с длительностью $T = 2l/a$ (рисунок 7.4 б).

Определим коэффициент восстановления скорости ударяющего стержня (бойка) для рассматриваемого случая. При известном импульсе сил, действующих на первый стержень во время удара, его скорость после удара может быть найдена из теоремы об изменении количества движения. Записывая для первого стержня

$$m_1 V_1 - m_1 V_0 = P_{21} T,$$

и подставляя в эту формулу $m_1 = \rho_1 S_1 l$, $T = 2l/a$, а также выражение для P_{21} (7.32), получим:

$$V_1 = q V_0.$$

Тогда коэффициент восстановления скорости ударяющего стержня определится как

$$R = -\frac{V_1}{V_0} = -q. \quad (7.37)$$

Из полученной формулы видно, что коэффициент восстановления зависит от соотношения ударных жесткостей соударяющихся стержней r_{12} . При изменении этого соотношения от 1 до 0 коэффициент восстановления скорости меняется от 0 до 1.

Известно [10], что энергия волны деформации, распространяющейся по стержню без отражений и наложений, определяется формулой:

$$A_B = \frac{1}{C_2} \int_0^T P^2(t) dt, \quad (7.38)$$

где C_2 – ударная жесткость стержня, по которому распространяется волна; $P(t)$ – зависимость усилий в волне деформаций от времени.

Подставляя выражение (7.32) в формулу (7.38), обозначая начальную энергию стержня 1 до удара через A_0 и учитывая, что

$$\tau = T = \frac{2l}{a_1}, C_1 = \rho_1 a_1 S_1, \quad \frac{\rho_1 S_1 l}{2} V_0^2 = A_0,$$

получим:

$$A_B = \frac{4r_{12}}{(1+r_{12})^2} A_0.$$

Коэффициент передачи энергии стержня 1 в стержень 2 определится как

$$\eta = \frac{A_B}{A_0} = \frac{4r_{12}}{(1+r_{12})^2}. \quad (7.39)$$

Из этой формулы следует, что с уменьшением r_{12} от 1 до 0,7 коэффициент передачи энергии от стержня 1 в стержень 2 уменьшается на 3 %, т. е. незначительно, а с дальнейшим уменьшением r_{12} изменение коэффициента передачи энергии уже существенно и, например, при $r_{12} = 0,2$ он равен 0,55.

Рассмотрим теперь случай, когда ударная жесткость первого стержня больше ударной жесткости второго, т.е.

$C_1 > C_2$. Из формулы (7.36) следует, что в этом случае в стержне 2 генерируется волна деформации ступенчатой формы, с амплитудами ступеней, уменьшающимися с течением времени (рисунок 7.4 в). Длительность каждой ступени этой волны равна T , а количество ступеней и длительность всей волны, а, следовательно, и время удара, стремятся к бесконечности. Очевидно, что в этом случае коэффициент восстановления скорости стержня 1 после удара равен нулю.

Теоретически ступенчатая волна деформации имеет бесконечную длительность, но практически более 98 % энергии удара содержится в первых ступенях волны, количество которых равно отношению ударных жесткостей соударяющихся стержней: $r_{12} = C_1/C_2$ [10].

Поэтому в практических расчетах время удара и длительность волны деформации можно принять конечной и равной

$$\tau = \frac{2r_{12}l}{a_2}. \quad (7.40)$$

При одинаковых скоростях распространения волн деформаций в стержнях ($a_1 = a_2$) эту формулу можно представить в виде

$$\tau = \frac{2m_1}{c_2}. \quad (7.41)$$

Следует обратить внимание на то, что эффективная длительность волны деформации не зависит от соотношения длины и диаметра ударяющего стержня, а определяется только его массой.

Пример 7.3

Боек ударной машины имеет диаметр $d_1 = 40$ мм и длину $l = 200$ мм.

Найти минимальный диаметр d_2 и длину L инструмента, по которому наносится удар бойком, из условия обес-

печения его прочности и отсутствия влияния волны, отраженной от обрабатываемой поверхности, на формирование начальной волны в инструменте.

Материал бойка и инструмента сталь с модулем упругости $E = 20 \cdot 10^{10}$ Па, плотностью $\rho = 7800$ кг/м³ и допускаемыми напряжениями $[\sigma] = 250$ МПа. Скорость бойка перед ударом 10 м/с.

Решение.

Для решения задачи вначале определим скорость распространения волны деформации в элементах ударной системы:

$$a = \sqrt{E/\rho} = \sqrt{20 \cdot 10^{10}/7800} = 5064 \text{ м/с.}$$

Если боек и инструмент представляют собой гладкие стержни, то усилия в контакте бойка с инструментом максимальные в первой ступени волны деформации, генерируемой в инструменте, и определяются формулой (7.32).

При этом в общем случае формулы для нахождения максимальных напряжений в бойке и инструменте будут следующими:

$$\sigma_1 = \frac{1}{1+r_{12}} \rho_1 a_1 V_0, \quad \sigma_2 = \frac{r_{12}}{1+r_{12}} \rho_2 a_2 V_0. \quad (7.42)$$

Если боек и инструмент выполнены из одного материала, то $\rho_1 a_1 = \rho_2 a_2 = \rho a$ и напряжения в инструменте больше напряжений в бойке в r_{12} раз.

Зная допускаемые напряжения для инструмента, из последней формулы запишем:

$$r_{12} \leq \frac{[\sigma]}{\rho a V_0 - [\sigma]}.$$

Подставляя в эту формулу численные значения, получим $r_{12} \leq 1,724$.

При одинаковых материалах бойка и инструмента отношение их ударных жесткостей равно отношению площадей поперечных сечений или отношению диаметров в квадрате.

Тогда минимальный из условия прочности диаметр инструмента определится как

$$d_2 = \frac{d_1}{\sqrt{r_{12}}} = \frac{40}{\sqrt{1,724}} = 30,46 \text{ мм.}$$

Примем $d_2 = 32$ мм и уточним отношение ударных жесткостей бойка и инструмента:

$$r_{12} = (40/32)^2 = 1,5625.$$

Для того чтобы волна, отраженная от обрабатываемого объекта, не влияла на процесс формирования начальной волны в инструменте необходимо, чтобы длина инструмента была больше половины длины эффективной части начальной волны.

Так как длина эффективной части волны с учетом (7.40) равна $2lr_{12}$, то минимальная длина инструмента определится как

$$L_{min} = lr_{12} = 200 \cdot 1,5625 = 312,5 \text{ мм.}$$

Принимаем $L = 315$ мм.

Пример 7.4

Ударяющий стержень выполнен из стали с модулем упругости $E_1 = 20 \cdot 10^{10}$ Па, плотностью $\rho_1 = 7800$ кг/м³ и допускаемыми напряжениями $[\sigma]_1 = 250$ МПа. Материал ударяемого стержня сплав алюминия АМГ-6 с модулем упругости $E_2 = 7,1 \cdot 10^{10}$ Па, плотностью $\rho_2 = 2700$ кг/м³ и допускаемыми напряжениями $[\sigma]_2 = 120$ МПа.

Найти соотношение между диаметрами стержней и допускаемую скорость их соударения, исходя из условия равной прочности стержней.

Решение.

Максимальные напряжения в элементах системы, как и в предыдущей задаче, определяются выражениями (7.42). Приравнявая эти напряжения к допускаемым, запишем:

$$[\sigma]_1 = \frac{1}{1+r_{12}} \rho_1 a_1 [V_0], \quad [\sigma]_2 = \frac{r_{12}}{1+r_{12}} \rho_2 a_2 [V_0]. \quad (7.43)$$

где $[V_0]$ – допускаемая скорость соударения.

Поскольку максимальные усилия в стержнях при ударе одинаковы, то условие равной прочности этих элементов будет выполняться, если их площади поперечных сечений удовлетворяют условию:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{[\sigma]_2}{[\sigma]_1}.$$

Отсюда следует

$$d_1/d_2 = \sqrt{[\sigma]_2/[\sigma]_1}, \quad r_{12} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{[\sigma]_2}{[\sigma]_1} \sqrt{\frac{E_1 \rho_1}{E_2 \rho_2}}.$$

Подставляя в эти формулы численные значения, получим:

$$d_1 = 0,693d_2, \quad r_{12} = 1,369.$$

Используя первую формулу (7.43), и учитывая, что из предыдущего примера $a_1 = 5064$ м/с, определим допускаемую скорость соударения стержней:

$$[V_0] = \frac{[\sigma]_1(1+r_{12})}{\rho_1 a_1} = \frac{250 \cdot 10^6 (1+1,369)}{7800 \cdot 5064} = 15 \text{ м/с}.$$

Таким образом, для обеспечения равной прочности элементов ударной системы должно выполняться условие $d_1 = 0,693d_2$, а для обеспечения напряжений, не превышающих допускаемые, скорость соударения должна быть меньше 15 м/с.

7.5. Модель, учитывающая общие и местные деформации соударяющихся тел

Допустим, тело массой m со сферической ударной поверхностью радиусом r , двигаясь с начальной скоростью V_0 , ударяет по неподвижному и ненапряженному стержню с площадью поперечного сечения S (рисунок 7.5 а). Про-

дольные размеры ударяющего тела соизмеримы с поперечными.

Необходимо определить параметры волны деформации, генерируемой в стержне при ударе.

В этой системе общими деформациями ударяющего тела можно пренебречь по сравнению с местными и представить его как жесткое тело с податливой сферической ударной поверхностью. Для стержня, наоборот, местные контактные деформации пренебрежимо малы по сравнению с общими.

Таким образом, рассматриваемая система относится к системе со смешанными параметрами. Ударяющее тело имеет сосредоточенные параметры, а ударяемое – распределенные параметры.

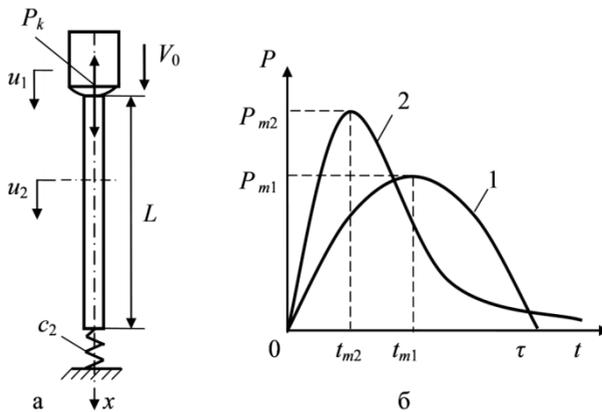


Рисунок 7.5

При решении задачи предположим вначале, что длина стержня такова, что волны деформации, отраженные от его торца противоположного ударному, не влияют на взаимодействие жесткого тела со стержнем. Проведем ось x в направлении движения тела. За её начало примем точку контакта тела со стержнем. Обозначим перемещение цен-

тра масс жесткого тела через u_1 , а перемещение сечений стержня через u_2 . При этом перемещение центра масс тела зависит только от времени $u_1(t)$, а перемещение сечений стержня зависит как от времени, так и от координаты сечения $u_2(x, t)$.

С момента начала удара уравнение движения жесткого тела имеет вид:

$$m\ddot{u}_1 = -P_k, \quad (7.44)$$

где P_k – усилие в контакте тела со стержнем.

Движение сечений стержня описывается одномерным волновым уравнением (7.23)

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0,$$

решением которого в общем случае является функция

$$u_2(x, t) = f(at - x) + \varphi(at + x). \quad (7.45)$$

Граничные условия в контакте тела со стержнем имеют вид

$$ES \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t) + P_k = 0. \quad (7.46)$$

Первое слагаемое в этом условии представляет собой упругую силу в стержне, а второе слагаемое – это контактная сила, обусловленная местной деформацией соударяющихся тел. Зависимость этой силы от деформации описывается законом Герца (7.1):

$$P = K\alpha^{3/2},$$

где α – сближение центра масс тела с ударным торцом стержня, равное местной контактной деформации

$$\alpha = u_1(t) - u_2(0, t);$$

K – коэффициент, зависящий от упругих свойств материалов тел, и геометрии соударяющихся поверхностей. Примем, что материалы ударяющего тела и стержня имеют одинаковые модули упругости и коэффициенты Пуассона. Тогда из (7.2) следует:

$$K = \frac{2E}{3(1-\mu^2)}\sqrt{r}, \quad (7.47)$$

где E , μ – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона для материалов тел.

Граничные условия на торце стержня, противоположном ударному могут быть различными, например: при жесткой опоре:

$$u_2(L, t) = 0; \quad (7.48)$$

при свободном торце:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(L, t) = 0; \quad (7.49)$$

при упругой опоре:

$$ES \frac{\partial u_2}{\partial x}(L, t) + c_2 u_2(L, t) = 0, \quad (7.50)$$

где c_2 – приведенный коэффициент жесткости опоры.

Выражение (7.50) является более общим по сравнению с предыдущими. Из него как частные случаи можно получить условия (7.48) и (7.49).

Дальнейшее решение задачи существенно упрощается, если провести линеаризацию формулы Герца (7.1) методом, описанным в разделе 7.2. При этом зависимость контактной силы от сближения центра масс тела и ударного торца стержня представляется в виде:

$$P_k = c_1[u_1(t) - u_2(0, t)], \quad (7.51)$$

где c_1 – приведенный коэффициент жесткости, который определяется по формуле (7.10). В этой формуле величина максимальной контактной силы P_m заранее неизвестна, поэтому коэффициент жесткости c находится методом последовательных приближений.

Линеаризация контактной характеристики в данном случае полезна и тем, что общее решение задачи, полученное для линейной модели, можно распространить на большой класс контактных характеристик, которые с той или

иной степенью точности могут быть описаны линейными или кусочно-линейными функциями.

С учетом зависимости (7.51) уравнение движения тела (7.44) и граничные условия (7.46) запишутся в виде:

$$m\ddot{u}_1(t) = -c_1[u_1(t) - u_2(0, t)], \quad (7.52)$$

$$ES \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t) = -c_1[u_1(t) - u_2(0, t)]. \quad (7.53)$$

В соответствии с решением Д'Аламбера (7.45) для начального периода удара, когда в стержне отраженных волн еще нет,

$$u_2(x, t) = f(at - x).$$

Подставляя это решение в граничное условие (7.53), получим:

$$-ESf'(at) = -c_1[u_1(t) - f(at)]. \quad (7.54)$$

Определяя из последнего уравнения

$$u_1(t) = \frac{ES}{c_1}f'(at) - f(at), \quad (7.55)$$

и подставляя это выражение в уравнение (7.52), запишем:

$$f'''(at) + \frac{c_1}{ES}f''(at) + \frac{c_1}{ma^2}f'(at) = 0.$$

Вводя обозначения:

$$\xi = at, \quad f'(\xi) = \Phi(\xi), \quad h = \frac{c_1}{2ES}, \quad k^2 = \frac{c_1}{ma^2},$$

перепишем последнее уравнение в виде:

$$\Phi''(\xi) + 2h\Phi'(\xi) + k^2\Phi(\xi) = 0. \quad (7.56)$$

Решив это уравнение и определив функцию $\Phi(\xi)$, можно найти усилия в сечениях стержня и скорости сечений, используя соотношения:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= -ES\Phi(at - x), \\ V(x, t) &= a\Phi(at - x). \end{aligned} \quad (7.57)$$

Перемещения сечений стержня определяются интегрированием функции скорости по времени при известных начальных условиях.

Решение дифференциального уравнения (7.56) зависит от корней его характеристического уравнения:

$$s^2 + 2hs + k^2 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня:

$$s_1 = -h + \sqrt{h^2 - k^2}, \quad s_2 = -h - \sqrt{h^2 - k^2},$$

вид которых определяется соотношением коэффициентов h и k .

При $h < k$ – корни – комплексные числа: $s_{1,2} = -h \pm i\lambda$, $\lambda = \sqrt{k^2 - h^2}$, $i = \sqrt{-1}$ и решение уравнения (7.56) записывается в виде:

$$\Phi(\xi) = e^{-h\xi} (A_1 \sin \lambda\xi + A_2 \cos \lambda\xi). \quad (7.58)$$

При $h > k$ – корни – действительные отрицательные числа и решение уравнения (7.56) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= A_1 e^{-s_1\xi} + A_2 e^{-s_2\xi} = \\ &= e^{-h\xi} (A_1 e^{i\lambda\xi} + A_2 e^{-i\lambda\xi}). \end{aligned} \quad (7.59)$$

Для определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 , входящих в эти решения, необходимо иметь два начальных условия. Первое из них очевидно:

$$P(0,0) = ES \frac{\partial u_2}{\partial x}(0,0) = 0,$$

что равносильно

$$\Phi(0) = 0. \quad (7.60)$$

Второе начальное условие получим из уравнения (7.54), продифференцировав его по времени:

$$f''(0,0) = \frac{c_1}{ESa} [\dot{u}_1(0) - af'(0,0)].$$

Так как из первого начального условия следует $f'(0,0) = 0$, а из начальных условий задачи $\dot{u}_1(0) = V_0$, то из последнего уравнения получим второе начальное условие в виде:

$$f''(0,0) = \Phi'(0) = \frac{c_1 V_0}{ESa}. \quad (7.61)$$

Остановимся подробнее на анализе первого случая, когда $h < k$, поскольку он чаще встречается в практике. Подставляя решение (7.58) в начальное условие (7.60), найдем $A_2 = 0$. Из второго начального условия (7.61) следует: $A_1 = cV_0/ES\lambda a$. С учетом найденных постоянных решение (7.58) принимает вид:

$$\Phi(\xi) = \frac{c_1 V_0}{ESa\lambda} e^{-h\xi} \sin \lambda \xi. \quad (7.62)$$

Возвращаясь к прежним обозначениям и, учитывая, что аргумент ξ может принимать любые положительные значения, получим следующее выражение для искомой функции $f'(at - x)$:

$$\Phi(at - x) = \frac{c_1 V_0}{ESa\lambda} e^{-h(at-x)} \sin \lambda(at - x). \quad (7.63)$$

Для нахождения функции смещения сечений $f(at-x)$ проинтегрируем последнее выражение по времени при начальных условиях $u_2(0, 0) = 0$:

$$f(at - x) = \frac{c_1 V_0}{ESak^2} \left[1 - e^{-h(at-x)} \left(\frac{h}{\lambda} \sin \lambda(at - x) + \cos \lambda(at - x) \right) \right].$$

Усилия в сечениях стержня, охваченных волной деформации, найдем, подставив выражение (7.63) в соотношение для усилия (7.57). Учитывая, что $c/ES = 2h$, $ES/a = C$ для контактного сечения тела со стержнем получим:

$$P(0, t) = -2CV_0 \left(\frac{h}{\lambda} \right) e^{-hat} \sin \lambda at. \quad (7.64)$$

График этой функции показан на рисунке 7.5 б кривой 1. Он представляет собой синусоиду «деформированную» экспоненциальной функцией.

Время удара τ соответствует условию $P(0, \tau) = 0$, которое выполняется при $\sin(\lambda a \tau) = 0$. Отсюда следует:

$$\tau = \frac{\pi}{a\lambda}. \quad (7.65)$$

Для нахождения максимального значения силы P_{m1} продифференцируем функцию усилия (7.64) по времени и приравняем полученное выражение к нулю:

$$2CV_0 \left(\frac{h}{\lambda}\right) e^{-hat_{m1}} (h \sin \lambda at_{m1} - \lambda \cos \lambda at_{m1}) = 0.$$

Решая это уравнение, найдем момент времени t_{m1} , соответствующий максимальному значению силы:

$$tg \lambda at_{m1} = \frac{\lambda}{h}; \quad t_{m1} = \frac{1}{a\lambda} \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda}{h}\right). \quad (7.66)$$

Подставляя найденное значение времени в уравнение (7.64), и учитывая соотношение

$$\sin \lambda at_{m1} = \frac{tg \lambda at_{m1}}{\sqrt{1+tg^2 \lambda at_{m1}}} = \frac{\lambda}{k},$$

получим следующую формулу для определения максимальной силы удара:

$$P_{m1} = -2CV_0 \left(\frac{h}{k}\right) \exp \left(-\frac{h}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{h}\right). \quad (7.67)$$

Вспомним, что при линейаризации модели Герца приведенный коэффициент жесткости c_1 (7.10) находится методом последовательных приближений. Вначале, исходя из опыта, задается какое-то значение максимальной силы удара P_{m1} и определяется коэффициент жесткости c_1 . Затем, с учетом найденного значения c_1 , находят коэффициенты h , k^2 и λ . После этого по формуле (7.67) определяется значение максимальной силы P_{m1} . С учетом этого значения по формуле (7.10) уточняется величина приведенного коэффициента жесткости и т. д., до тех пор, пока расхождение между результатами предыдущего и последующего циклов расчета не станет меньше некоторой заданной величины, например, 1 %. В реальных конструкциях это обычно достигается после трех-четырех циклов вычислений.

Так как в рассматриваемой системе стержень гладкий, то при отсутствии отраженных волн зависимость усилий от времени в любом сечении стержня будет описываться

формулой (7.64), в которой вместо аргумента at следует принять $(at - x)$.

Для того чтобы решение задачи было полным, необходимо определить коэффициент восстановления скорости ударяющего тела при ударе R и коэффициент передачи энергии этого тела в стержень η . В данном случае это проще сделать, используя теорему об изменении количества движения:

$$mV_1(\tau) - mV_0 = -I_1, \quad (7.68)$$

из которой следует:

$$R = -\frac{V_1(\tau)}{V_0} = 1 - \frac{I_1}{mV_0},$$

где $I_1 = \int_0^\tau P(0, t) dt$ – ударный импульс, действующий на ударяющее тело.

Подставляя в последнее выражение функцию (7.64) с положительным знаком, поскольку знак импульса уже учтен в уравнении (7.68), вычисляя интеграл, и учитывая, что $\sin \lambda a \tau = 0$; $\cos \lambda a \tau = -1$, получим:

$$I_1 = mV_0 \left[1 + \exp\left(-\frac{\pi h}{\lambda}\right) \right],$$

$$R = \exp\left(-\frac{\pi h}{\lambda}\right). \quad (7.69)$$

Коэффициент передачи энергии ударяющего тела в стержень определится как

$$\eta = \frac{A_B}{A_0} = 1 - R^2, \quad (7.70)$$

где A_B – энергия волны деформации, сформированной в стержне (энергия, переданная в стержень); A_0 – кинетическая энергия тела перед ударом.

Из полученных результатов видно, что коэффициент восстановления скорости тела при ударе и коэффициент передачи энергии удара в стержень зависят только от отношения коэффициентов λ/h . При $\lambda/h \rightarrow \infty$ коэффициент

восстановления стремится к единице, а коэффициент передачи энергии – к нулю.

Мы рассмотрели случай, когда $h < k$. Если параметры системы таковы, что выполняется условие $h > k$, то решение уравнения (7.56) имеет вид (7.59). Проводя с этим решением ту же процедуру, что и с решением (7.58), получим следующую формулу для определения функции $\Phi(at - x)$:

$$\Phi(at - x) = \frac{c_1 V_0}{2ESpa} e^{-h(at-x)} (e^{p(at-x)} - e^{-p(at-x)}),$$

или

$$\Phi(at - x) = \frac{c_1 V_0}{ESpa} e^{-h(at-x)} sh p(at - x), \quad (7.71)$$

где $p = \sqrt{h^2 - k^2}$.

Формула (7.71) отличается от формулы (7.63) только тем, что в ней вместо функции синуса стоит функция гиперболического синуса.

С учетом функции (7.71) остальные формулы имеют вид:

$$P(0, t) = -C V_0 e^{-hat} sh pat, \quad (7.72)$$

$$t_{m2} = \frac{1}{ap} \ln \left(\frac{h+p}{h-p} \right),$$

$$P_{m2} = -C V_0 \frac{h}{h-p} \left(\frac{h+p}{h-p} \right)^{-0,5 \left(1 - \frac{h}{p} \right)}.$$

Вид функции (7.72) показан на рисунке 7.5 б кривой 2. Время удара τ в этом случае стремится к бесконечности. При этом если стержень имеет бесконечно большую длину, коэффициент восстановления ударяющего тела при ударе равен нулю, а коэффициент передачи его энергии в стержень стремится к единице.

Волна деформации, описываемая функцией $f(at - x)$, достигая торца стержня, противоположного ударному, отражается от него в виде волны, описываемой функцией

$\varphi(at + x)$. Вид этой функции находится из граничных условий (7.48)–(7.50).

Записывая

$$u_2(x, t) = f(at - x) + \varphi(at + x), \quad (7.73)$$

и подставляя эту функцию, например, в граничное условие (7.50), получим уравнение

$$ES[-f'(at - L) + \varphi'(at + L)] + c_2[f(at - L) + \varphi(at + L)] = 0,$$

из которого следует

$$\varphi'(\xi) + \frac{c_2}{ES} \varphi(\xi) = f'(\xi - 2L) - \frac{c_2}{ES} f(\xi - 2L), \quad (7.74)$$

где $\xi = at + L$.

Подставляя в правую часть этого уравнения функцию $f(at - x)$, найденную ранее, с аргументом на $2L$ меньшим, и решая полученное уравнение, можно найти функцию $\varphi(at + x)$, затем перемещение сечений, охваченных прямой и отраженной волной (7.73), и усилия в этих сечениях:

$$P(x, t) = ES[-f'(at - x) + \varphi'(at + x)].$$

7.6. Поперечный удар по упругой балке

Модель Кокса

Впервые задача об ударе жестким телом по упругой балке с распределенной массой была решена Коксом (1849 г.). Кокс использовал приближенный метод, суть которого заключалась в том, что распределенная масса балки заменялась приведенной сосредоточенной массой, расположенной на линии удара.

Расчетная схема при этом имела вид, показанный на рисунке 7.6. В ней жесткое тело массой m_1 , падая с высоты

h , ударяет по жесткому телу массой m_2 , расположенному на невесомой упругой балке.

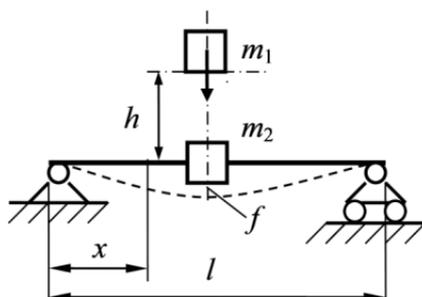


Рисунок 7.6

Приведенная масса m_2 определялась из условия равенства кинетических энергий балки с распределенной массой и с сосредоточенной массой. Для определения кинетической энергии балки с распределенной массой необходимо знать распределение скоростей её поперечных сечений по длине. Кокс предположил, что оно такое же, как и распределение прогибов балки при действии на её середину сосредоточенной силы.

Поскольку система симметричная, то достаточно рассмотреть половину балки, для которой закон распределения скоростей запишется в виде:

$$0 < x < l/2,$$

$$V(x) = V_+ \frac{3l^2x - 4x^3}{l^3}, \quad (7.75)$$

где V_+ – скорость среднего сечения балки после удара; x – координата сечения, отсчитываемая от левого конца балки.

Обозначая интенсивность распределенной массы балки через $m_0(x)$, для кинетической энергии балки после удара можно записать:

$$T_+ = 2 \left[\frac{V_+^2}{2} \int_0^{l/2} m_0(x) \left(\frac{3l^2x - 4x^3}{l^3} \right)^2 dx \right].$$

Если масса балки равномерно распределена по её длине, то $m_0(x) = \text{const}$ и из последнего выражения после интегрирования получается:

$$T_+ = \frac{17}{35} \cdot \frac{m_0 l V_+^2}{2}.$$

Приравнивая кинетическую энергию приведенной массы балки m_2 к кинетической энергии балки с распределенной массой, запишем:

$$\frac{m_2 V_+^2}{2} = \frac{17}{35} \cdot \frac{m_0 l V_+^2}{2},$$

откуда найдем:

$$m_2 = \frac{17}{35} m_0 l. \quad (7.76)$$

Считая, что при падении тела на балку отскока не происходит и с момента контакта тела с балкой скорости масс m_1 и m_2 одинаковы и равны V_+ , а до момента контакта с балкой скорость тела была V_- на основании теоремы о сохранении количества движения можно записать:

$$m_1 V_- = (m_1 + m_2) V_+,$$

откуда следует:

$$V_+ = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_- = \frac{V_-}{1 + \frac{17 m_0 l}{35 m_1}}. \quad (7.77)$$

Далее Коксом вводилось допущение, что после удара ударяющее тело движется совместно с балкой до достижения её максимального прогиба. Тогда обозначая максимальный прогиб балки через f , коэффициент её жесткости через c , и учитывая, что кинетическая энергия масс и работа силы тяжести падающего тела в момент максимального прогиба полностью переходит в энергию упругой деформации балки, можно записать

$$\frac{(m_1 + m_2) V_+^2}{2} + m_1 g h = \frac{c f^2}{2},$$

или после преобразований

$$f^2 - \frac{2m_1g}{c}f - \frac{(m_1+m_2)V_+^2}{c} = 0.$$

Решением этого уравнения, с учетом, что $m_1g/c = f_{cm}$, где f_{cm} – прогиб балки под действием статической силы тяжести падающего груза, является функция:

$$f = f_{cm} + \sqrt{f_{cm}^2 + \frac{(m_1+m_2)V_+^2}{c}}. \quad (7.78)$$

Подставляя в последнее выражение соотношения (7.76), (7.77), учитывая, что $V_-^2 = 2gh$, и деля все члены на f_{cm} , получаем:

$$\mu_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{cm}\left(1 + \frac{17}{35} \frac{m_0l}{m_1}\right)}}. \quad (7.79)$$

Коэффициент μ_{∂} , равный отношению прогиба балки при ударе к статическому прогибу под действием силы тяжести ударяющего тела, в курсах теоретической механики и сопротивления материалов называют коэффициентом динамичности.

Позже Эшлером (1941 г.) формула Кокса (7.79) была уточнена. Эшлер заметил, что если принят некоторый закон распределения скоростей по длине балки в начальный момент удара, то неверно сначала находить приведенную массу из энергетических соображений, а затем послеударную скорость. Эта скорость находится сразу из уравнения количества движения. Например, при $m_0 = const$ из закона сохранения количества движения следует:

$$m_1V_- = m_1V_+ + 2m_0V_+ \int_0^{l/2} \left(\frac{3l^2x - 4x^3}{l^3} \right) dx,$$

откуда после вычисления интеграла сразу находится послеударная скорость:

$$V_+ = \frac{V_-}{1 + \frac{5}{8} \frac{m_0l}{m_1}} \quad (7.80)$$

которая отличается от (7.77), хотя и незначительно.

С учетом этой поправки формула для определения динамического коэффициента имеет вид:

$$\mu_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h\left(1 + \frac{17}{35} \frac{m_0 l}{m_1}\right)}{f_{cm}\left(1 + \frac{5}{8} \frac{m_0 l}{m_1}\right)^2}} \quad (7.81)$$

Считалось, что динамические напряжения σ_{∂} , возникающие в балке при ударе, можно определить умножая статические напряжения σ_{cm} от силы тяжести тела на коэффициент динамичности:

$$\sigma_{\partial} = \sigma_{cm} \mu_{\partial}.$$

Однако дальнейшие исследования показали, что это далеко не так.

Модель Тимошенко

Первой моделью поперечного удара, учитывающей распределенную массу упругой балки и местные контактные деформации, была модель С.П. Тимошенко (1916 г.) [19, 20]. Им рассматривался удар шаром массой m по середине балки, шарнирно опертой по краям (рисунок 7.7).

Для определения контактной силы С.П. Тимошенко использовал известную модель Герца (7.1), в которой a это сближение центра масс шара и нейтральной оси балки, равное контактной деформации; K – коэффициент, определяемый при контакте шара с балкой по формуле (7.47).

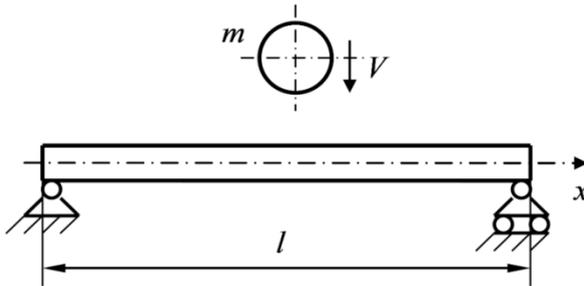


Рисунок 7.7

При ударе полное перемещение центра шара $u(t)$, отсчитываемое от положения, соответствующего первому контакту шара с балкой, складывается из местной контактной деформации $\alpha(t)$ и прогиба балки в точке удара $y(x_1, t)$:

$$u(t) = \alpha(t) + y(x_1, t). \quad (7.82)$$

Это уравнение является основным в теории С. П. Тимошенко.

Перемещение шара $u(t)$ находится из дифференциального уравнения его движения:

$$m\ddot{u} = -P(t),$$

где $P(t)$ – усилие в контакте шара с балкой.

После интегрирования этого уравнения дважды при начальных условиях $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = V$, получается

$$u(t) = Vt - \frac{1}{m} \int_0^t dt \int_0^t P(\theta) d\theta, \quad (7.83)$$

где θ – время, отсчитываемое от начала удара.

Местная деформация выражается из закона Герца (7.1) как

$$\alpha = (P/K)^{2/3}. \quad (7.84)$$

Прогиб балки y определяется из дифференциального уравнения движения балки, построенного на основе технической теории изгиба.

Если на балку в сечении $x = x_1$ действует внешняя сила, то балка совершает вынужденные колебания, описываемые уравнением:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{m_0}{EJ} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{P(x_1, t)}{EJ},$$

где $P(x_1, t)$ – внешняя сила, действующая на балку.

Решение этого уравнения С.П. Тимошенко записывал в виде разложения колебаний по собственным формам и частотам. При этом в соответствии с методом главных координат решение представлялось в виде

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) q_n(t), \quad (7.85)$$

где $q_n(t)$ – главная координата, зависящая только от времени и определяемая из уравнения:

$$\ddot{q}_n + p_n^2 q_n = \frac{Q_n}{\mathfrak{M}_n},$$

X_n, p_n – соответственно собственные формы и частоты колебаний балки; Q_n и \mathfrak{M}_n – обобщенная сила и обобщенная масса.

Для балки постоянного сечения, на которую в сечении $x = x_1$ действует сосредоточенная сила $P(t)$

$$Q_n = \frac{P(t)}{l} X_n(x_1); \quad \mathfrak{M}_n = \int_0^l m_0 X_n^2(x) dx.$$

С учетом этого формула разложения колебаний для перемещений в общем случае граничных условий записывается в виде [7]:

$$y(x, t) = \frac{1}{m_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x) X_n(x_1)}{p_n \int_0^l X_n^2(x) dx} \int_0^t P(\theta) \sin[p_n(t - \theta)] d\theta. \quad (7.86)$$

С.П. Тимошенко рассматривал балку с шарнирно опертыми концами, для которой при $x_1 = l/2$

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad X_n(x_1) = \sin \frac{n\pi}{2}, \quad \int_0^l X_n^2 dx = \frac{l}{2}.$$

Очевидно, что при четных значениях n выполняется условие $X_n(x_1) = 0$ и в разложении (7.86) остаются только нечетные члены, соответствующие симметричным формам колебаний.

В результате для прогиба центра балки при $x = x_1 = l/2$ получается:

$$y = \frac{2}{m_0 l} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{p_n} \int_0^t P(\theta) \sin[p_n(t - \theta)] d\theta. \quad (7.87)$$

Подстановка выражений (7.83), (7.84), (7.87) в соотношение (7.82) приводит к интегральному уравнению, которое получило название уравнения Тимошенко:

$$Vt - \frac{1}{m} \int_0^t dt \int_0^t P(\theta) d\theta = \left(\frac{P}{K}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{m_0 l} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{p_n} \int_0^t P(\theta) \sin[p_n(t - \theta)] d\theta. \quad (7.88)$$

В работе [15] Я.Г. Пановко отмечает, что при свободном падении тела на балку в его уравнении движения необходимо учесть вес тела. Тогда уравнение (7.88) примет вид:

$$Vt + \frac{gt^2}{2} - \frac{1}{m} \int_0^t dt \int_0^t P(\theta) d\theta = \left(\frac{P}{K}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{m_0 l} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{p_n} \int_0^t P(\theta) \sin[p_n(t - \theta)] d\theta.$$

Приближенная оценка, выполненная автором работы [15], показала, что за время удара второй член левой части уравнения последнего может быть одного порядка с первым и пренебрежение им не всегда возможно.

В данном пособии не рассматривается удар по балке Тимошенко, которая описывается уравнениями (5.51), (5.52) и учитывает деформации сдвига и силы инерции от поворота сечений. Эта задача подробно рассмотрена в работах [6, 10, 21]. Здесь приведем только конечные уравнения, напомнив, что в этом случае решение дает два спектра частот: низший p_{1n} и высший p_{2n} . При этом прогиб балки описывается функцией:

$$y(x, t) = \frac{2G}{k_s \rho^2 l J} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x_1}{l} \left(\frac{Y_{1n} I_{1n} - Y_{2n} I_{2n}}{p_{1n}^2 - p_{2n}^2} \right),$$

где k_s – коэффициент, учитывающий форму сечения балки;

$$Y_{1n} = \frac{1}{p_{1n}} - \frac{k_s \rho J p_{1n}}{GS} + \frac{k_s \rho E J n^2 \pi^2}{p_{1n} m_0 G l^2},$$

$$Y_{2n} = \frac{1}{p_{2n}} - \frac{k_s \rho J p_{2n}}{GS} + \frac{k_s \rho E J n^2 \pi^2}{p_{2n} m_0 G l^2},$$

$$I_{1n} = \int_0^t P(\theta) \sin[p_{1n}(t - \theta)] d\theta,$$

$$I_{2n} = \int_0^t P(\theta) \sin[p_{2n}(t - \theta)] d\theta,$$

а уравнение Тимошенко (7.88) принимает вид:

$$Vt - \frac{1}{m} \int_0^t dt \int_0^t P(\theta) d\theta =$$

$$= \left(\frac{P}{K}\right)^{2/3} + \frac{2G}{k_s m_0 \rho J} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{Y_{1n} I_{1n} - Y_{2n} I_{2n}}{p_{1n}^2 - p_{2n}^2}.$$

Решение уравнения Тимошенко численными методами позволяет определить зависимость контактной силы от времени $P(t)$, а затем и другие параметры движения: прогиб балки, скорость отскока шара от балки и т. д. На рисунке 7.8 показаны полученные Тимошенко графики зависимости от времени контактной силы $P(t)$, перемещение шара $u(t)$ и прогиб центра балки $y(t)$ при ударе стальным шаром радиусом 1 см по балке длиной 15,35 см с квадратным поперечным сечением размером 1 см [20]. Скорость соударения шара с балкой 0,01 м/с. Отношение масс балки и ударника 3,675, $\tau = 5,555$ мкс.

Из результатов, полученных С.П. Тимошенко, вытекают следующие важные выводы.

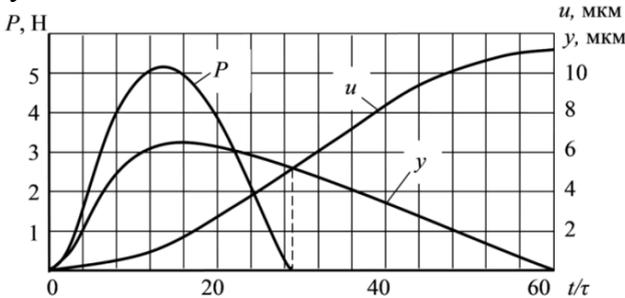


Рисунок 7.8

Максимальный прогиб балки не совпадает по времени с максимальной силой удара (рисунок 7.8). После того, как ударная сила становится равной нулю, прогиб балки продолжает возрастать, а перемещение шара уменьшается, в результате происходит отделение балки от шара. Отсюда следует, что принятое в модели Кокса допущение о том,

что тело движется совместно с балкой до достижения максимального прогиба неприемлемо, если удар не является абсолютно неупругим.

В дальнейшем при восстановлении первоначальной формы балки произойдет повторное соударение шара с балкой. При этом контактная сила при втором соударении может быть даже больше, чем при первом.

7.7. Поперечный удар сферой по пластине

Задача о поперечном ударе сферой по пластине с учетом местных контактных деформаций соударяющихся тел стала уже классической и рассматривалась во многих работах, например [7, 10, 21].

Расчетная схема для этой задачи показана на рисунке 7.9. Сфера радиусом R и массой m , двигаясь с начальной скоростью V_0 , ударяет по пластине с размерами сторон a_1 , a_2 и толщиной δ . Оси x и y лежат в срединной плоскости пластины, а их начало расположено у угла пластины. Ось z направлена перпендикулярно поверхности пластины.

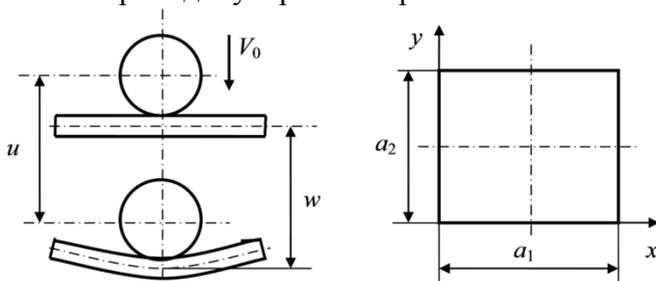


Рисунок 7.9

Перемещение центра масс сферы описывается координатой $u(t)$, а поперечные перемещения точек срединной поверхности пластины – координатой $w(x,y,t)$. Местные контактные деформации сферы и пластины выражаются через сближение центра масс сферы с поверхностью пла-

стины α , которое определяется также как и в случае удара по балке соотношением:

$$\alpha(t) = u(t) - w(x_0, y_0, t), \quad (7.89)$$

где x_0, y_0 – координаты точки контакта сферы с пластиной.

В основе математической модели процессов, протекающих при соударении сферы с пластиной, лежат три уравнения: уравнение движения сферы, уравнение движения пластины и уравнение связи, описывающее контактную характеристику взаимодействующих тел.

Уравнение движения сферы:

$$m\ddot{u} = -P(t),$$

где $P(t)$ – сила, действующая в контакте сферы с пластиной.

Решением этого уравнения является функция (7.83):

$$u(t) = Vt - \frac{1}{m} \int_0^t dt \int_0^t P(\theta) d\theta.$$

Уравнение движения пластины при малых прогибах, соизмеримых с толщиной пластины, имеет вид [2]:

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \xi}{\partial y^4} + \frac{m_0}{D} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{D} P(x_0, y_0, t), \quad (7.90)$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины, $D = E\delta^3/12(1 - \mu^2)$; E, ρ – соответственно модуль упругости и плотность материала пластины; μ – коэффициент Пуассона; $P(x_0, y_0, t)$ – действующая сила $P(t)$, отнесенная к единице площади пластины; m_0 – масса квадратного метра пластины, $m_0 = \rho\delta$.

Решение уравнения движения пластины записывается в виде разложения колебаний по нормальным гармоникам:

$$w(x, y, t) = \frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{W_{ij}(x, y) W_{ij}(x_0, y_0)}{p_{ij} \iint W_{ij}^2(x, y) dx dy} \int_0^t P(\theta) \times \\ \times \sin[p_{ij}(t - \theta)] d\theta, \quad (7.91)$$

где $P(\theta)$ – зависимость внешней силы, действующей на пластину, от времени; $W_{ij}(x, y)$, p_{ij} – соответственно собственные формы и частоты колебаний, зависящие от граничных условий на краях пластины. Собственные формы и частотные уравнения для различных граничных условий приведены в таблице 6.1.

Из выражения (7.91) следует, что прогиб пластины в точке соударения описывается функцией:

$$w(x_0, y_0, t) = \frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{W_{ij}^2(x_0, y_0)}{p_{ij} \iint W_{ij}^2(x, y) dx dy} \int_0^t P(\theta) \times \\ \times \sin[p_{ij}(t - \theta)] d\theta.$$

Для прямоугольной пластины с размерами сторон a_1 и a_2 , свободно опертой по всем краям, при расположении начала координат в углу пластины собственные формы в безразмерном виде и частоты находятся из соотношений (6.12), (6.13):

$$W_{ij}(x, y) = \sin \frac{i\pi x}{a_1} \sin \frac{j\pi y}{a_2}. \quad (7.92)$$

$$p_{ij} = \pi^2 \left(\frac{i^2}{a_1^2} + \frac{j^2}{a_2^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m_0}}. \quad (7.93)$$

При этом

$$\int_0^{a_1} \int_0^{a_2} W_{ij}^2(x, y) dx dy = \frac{a_1 a_2}{4},$$

$$W_{ij}(x_0, y_0) = \sin \frac{i\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2}.$$

Из последнего выражения следует, что также как и при ударе по балке при четных значениях i и j функция $W_{ij}(x_0, y_0)$ обращается в нуль и в разложении (7.91) под знаком сумм остаются только члены с нечетными значениями индексов i и j . При этом выполняются равенства:

$$\sin \frac{i\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2} = (-1)^{\frac{i+j}{2}-1}, \quad W_{ij}^2(x_0, y_0) = 1.$$

С учетом этого при центральном ударе по свободно опертой прямоугольной пластине функция прогибов в общем случае имеет вид:

$$w(x, y, t) = \frac{4}{m_0 a_1 a_2} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{i+j}{2}-1} W_{ij}(x,y)}{p_{ij}} \int_0^t P(\theta) \times \sin[p_{ij}(t - \theta)] d\theta,$$

а прогиб пластины в точке приложения силы описывается выражением:

$$w(x, y, t) = \frac{4}{m_0 a_1 a_2} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{p_{ij}} \int_0^t P(\theta) \times \sin[p_{ij}(t - \theta)] d\theta. \quad (7.94)$$

Записывая закон Герца в виде (7.84) и подставляя выражения (7.83), (7.84) и (7.94) в соотношение (7.89), получим уравнение, аналогичное уравнению Тимошенко (7.88):

$$Vt - \frac{1}{m} \int_0^t dt \int_0^t P(\theta) d\theta = \left(\frac{P}{K}\right)^{2/3} + \frac{4}{m_0 a_1 a_2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{p_{ij}} \int_0^t P(\theta) \sin[p_n(t - \theta)] d\theta. \quad (7.95)$$

Решая это уравнение численными методами, находят зависимость контактной силы и прогиба пластины от времени.

Следует отметить, что полученные формулы являются приближенными и основаны на допущении, что влиянием на изгиб пластины перерезывающих сил и сжимающего напряжения σ_z можно пренебречь. Погрешность, вносимая этим допущением в результаты расчета, тем меньше, чем меньше отношение толщины пластины к её размерам в плане.

Численный расчет по приведенным выше формулам связан с громоздкими вычислениями, причем как отмечается в работе [7], для получения удовлетворительной схо-

димости двойных сумм в выражении (7.95) необходимо учесть не менее 70 первых гармоник колебаний. При определении напряжений в пластине с помощью найденных функций прогибов сходимость рядов еще меньше и в этом случае необходим учет не менее 200 гармоник. В связи с этим разрабатывались приближенные методы, позволяющие упростить процедуры расчета. Эти методы изложены в учебном пособии [10].

7.8. Повторно-ударные процессы в автономных системах

Задача Мак-Миллана

В большинстве практических случаев при ударном взаимодействии тел они испытывают многократные соударения. Первый удар является только началом всего ударного процесса. За ним следуют другие, причем каждое последующее соударение определяется результатами предыдущего соударения. Мы уже сталкивались с этим явлением при поперечном ударе по балке или пластине. То же самое будет происходить и при падении шара на жесткую поверхность. После удара он отскочит от поверхности на какую-то высоту, затем вновь упадет и т. д., причем как будет показано далее, число повторных соударений при этом будет бесконечным, хотя весь повторно-ударный процесс будет протекать за конечный промежуток времени.

Повторно-ударные процессы могут протекать как в автономных, так и в неавтономных системах. Примером повторно-ударных процессов в неавтономных системах является работа обычного отбойного молотка. За счет энергии внешнего источника питания в нем происходит многократное соударение бойка с рабочим инструментом. В данном курсе лекций такие системы не рассматриваются, поскольку они являются предметом исследования динамики виброударных машин.

В автономных системах, т. е. системах, в которых нет поступления энергии от внешних источников питания, повторно-ударные процессы могут возникать под действием потенциальных сил: сил тяжести или сил упругости.

Рассмотрим такие системы.

Классическим примером повторно-ударных процессов является так называемая задача Мак-Миллана, в которой рассматриваются последовательные соударения тела, падающего с высоты h_0 на неподвижную горизонтальную поверхность (рисунок 7.10 а).

После падения тела с высоты h_0 оно отскочит от поверхности на высоту h_1 , определяемую коэффициентом восстановления скорости при ударе. Затем, упав с этой высоты, тело отскочит на высоту h_2 и т. д.

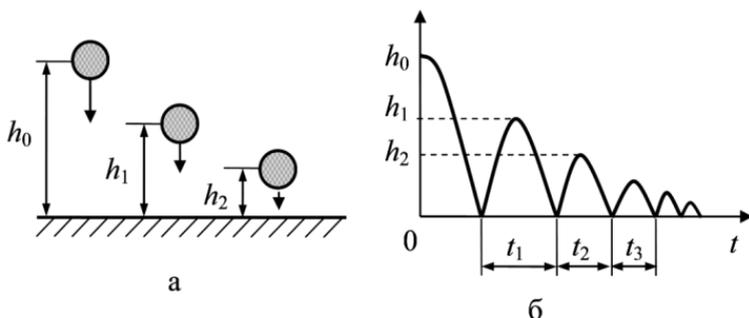


Рисунок 7.10

При первом ударе о поверхность скорость тела можно найти, приравняв его потенциальную энергию в начальный момент движения к кинетической энергии в конце движения

$$mgh_0 = \frac{mV_{1-}^2}{2},$$

где m – масса тела; g – ускорение свободного падения; V_{1-} – скорость тела перед первым ударом. Здесь и далее индекс минус показывает скорость тела до удара, а индекс плюс – после удара.

Из последней формулы следует

$$V_{1-} = -\sqrt{2gh_0}. \quad (7.96)$$

Здесь знак минус перед скоростью стоит потому, что положительная ось перемещений направлена вверх (рисунок 7.10 б).

Скорость отскока тела определится через коэффициент восстановления скорости R как

$$V_{1+} = -RV_{1-} = R\sqrt{2gh_0}. \quad (7.97)$$

После отскока тело совершает свободное движение под действием силы тяжести. Уравнение его движения

$$y(t) = V_{1+}t - \frac{gt^2}{2}; \quad \dot{y} = V_{1+} - gt.$$

Когда тело достигнет верхней точки, оно остановится и время, соответствующее этому моменту, определится из условия $\dot{y} = 0$ как

$$t_{m1} = \frac{V_{1+}}{g} = -\frac{RV_{1-}}{g},$$

а перемещение тела в этот момент времени будет равно:

$$h_1 = V_{1+}t_{m1} - \frac{gt_{m1}^2}{2} = \frac{R^2V_{1-}^2}{2g} = R^2h_0. \quad (7.98)$$

Поскольку при свободном движении тела время его подъема на высоту h_1 равно времени падения с этой высоты, то время между первым и вторым ударом (рисунок 7.10 б) определится как

$$t_1 = 2t_{m1} = -\frac{2RV_{1-}}{g}. \quad (7.99)$$

Скорость отскока тела от поверхности при втором ударе с учетом, что $V_{2-} = -V_{1+}$ и выражения (7.97), определится из соотношения

$$V_{2+} = RV_{1+} = -R^2V_{1-},$$

высота отскока

$$h_2 = \frac{V_{2+}^2}{2g} = \frac{R^4 V_{1-}^2}{2g} = R^4 h_0,$$

время между вторым и третьим ударом

$$t_2 = \frac{2V_{2+}}{g} = -\frac{2R^2 V_{1-}}{g}.$$

Продолжая рассмотрение движения тела, для n -го удара получим:

скорость тела перед ударом:

$$V_{n-} = R^n V_{1-},$$

высота отскока после удара:

$$h_n = R^{2n} h_0, \quad (7.100)$$

время между n -м и последующим ударом:

$$t_n = -R^n \frac{2V_{1-}}{g} = 2R^n \sqrt{2h_0/g}.$$

Для определения времени всего повторно-ударного процесса просуммируем все промежутки времени между двумя последовательными ударами:

$$\tau = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 2\sqrt{2h_0/g} \sum_{n=1}^{\infty} R^n.$$

Так как под знаком суммы стоит геометрическая прогрессия со знаменателем R , а сумма n членов этой прогрессии определяется по формуле:

$$\sum R + R^2 + R^3 + \dots + R^n = \frac{R^{n+1} - R}{R - 1},$$

то при $R < 1$, $n \rightarrow \infty$, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} R^n = \frac{R}{1-R}, \quad (7.101)$$

и, следовательно,

$$\tau = \frac{2R}{1-R} \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}. \quad (7.102)$$

Из формулы (7.100) следует, что число ударов стремится к бесконечности, но при этом формула (7.102) показывает, что время ударов конечно.

Пример 7.5

Стальной шар падает с высоты 1 м на гладкую стальную поверхность. Определить время повторно-ударного процесса и число ударов, через которое высота отскока шара будет составлять 0,1 % от начальной высоты падения. Коэффициент восстановления скорости шара при ударе равен $5/9$.

Решение.

Подставляя численные значения в формулу (7.102), найдем:

$$\tau = \frac{2 \cdot 5}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot 1/9,81} = 1,129 \text{ с.}$$

Из полученного результата следует, что при бесконечном числе ударов время всего повторно-ударного процесса достаточно мало.

Для определения числа ударов, через которое высота отскока шара будет составлять менее 0,1 % от начальной высоты падения, прологарифмируем формулу (7.100) и запишем её в виде:

$$n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lg(h_n/h_0)}{\lg R}.$$

Учитывая, что по условию задачи $h_n/h_0 = 0,001$, $R = 5/9$, получим $n = 12$ ударов.

Повторно-ударные процессы в системах с упругим элементом

Рассмотрим повторно-ударные процессы в системе с упругим элементом. Допустим, что тело массой m , связанное с упругим элементом, коэффициент жесткости которого c , может перемещаться внутри цилиндра (рисунок 7.11). В начальном положении тело прижато к дну цилиндра (ограничителю) статическим усилием P_c , создаваемым за счет предварительного натяга пружины δ

$$P_c = c\delta.$$

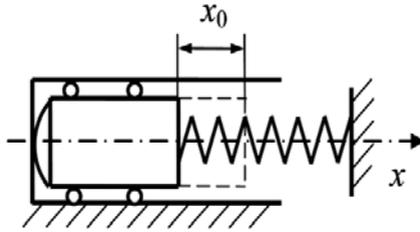


Рисунок 7.11

Если переместить тело из начального состояния на величину x_0 и отпустить, то под действием сил упругости оно начнет двигаться влево, ударит по ограничителю и отскочит от него с какой-то скоростью, определяемой коэффициентом восстановления. При этом вначале тело будет двигаться вправо, сжимая упругий элемент, а затем снова влево, и вновь ударит по ограничителю. Таким образом, в системе возникнут повторно-ударные процессы.

Для описания этих процессов запишем уравнение движения тела после его отклонения на величину x_0 :

$$m\ddot{x} + c(x + \delta) = 0.$$

Обозначая $k^2 = c/m$, где k – собственная частота колебаний системы, перепишем уравнение движения в виде:

$$\ddot{x} + k^2x = -k^2\delta. \quad (7.103)$$

Решением этого уравнения является функция

$$x(t) = A \sin kt + B \cos kt - \delta. \quad (7.104)$$

При начальных условиях $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ имеем:

$$A = 0, \quad B = x_0 + \delta,$$

и решение уравнения движения принимает вид

$$x(t) = (x_0 + \delta) \cos kt - \delta. \quad (7.105)$$

Момент первого удара t_0 определяется из условия $x = 0$. Приравнявая выражение (7.105) к нулю, найдем:

$$\cos kt_0 = \frac{\delta}{(x_0 + \delta)}.$$

Скорость тела перед первым ударом равна

$$\dot{x}(t_0) = -k(x_0 + \delta) \sin kt_0.$$

Учитывая, что

$$\sin kt_0 = \sqrt{1 - \cos^2 kt_0} = \frac{\sqrt{2\delta x_0 + x_0^2}}{(x_0 + \delta)},$$

запишем:

$$V_{1-} = \dot{x}(t_0) = -k\sqrt{2\delta x_0 + x_0^2}.$$

Тогда

$$V_{1+} = -RV_{1-} = Rk\sqrt{2\delta x_0 + x_0^2}.$$

Такую же скорость тело будет иметь и перед вторым ударом

$$V_{2-} = -V_{1+}.$$

После второго удара

$$V_{2+} = -RV_{2-} = R^2k\sqrt{2\delta x_0 + x_0^2},$$

а после n -го удара

$$V_{n+} = R^n k \sqrt{2\delta x_0 + x_0^2}.$$

В промежутке между n и $n+1$ ударами уравнение движения (7.103) не изменяется, но изменяются начальные условия для его решения. При этом решение записывается в виде

$$x(t) = A_n \sin kt + B_n \cos kt - \delta, \quad (7.106)$$

где t – время, отсчитываемое от начала n -го удара.

Начальные условия теперь имеют вид

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = V_{n+},$$

а постоянные интегрирования

$$B_n = \delta, \quad A_n = \frac{V_{n+}}{k}.$$

С учетом этого уравнение движения (7.105) принимает вид:

$$x(t) = \frac{V_{n+}}{k} \sin kt - \delta(1 - \cos kt). \quad (7.107)$$

Для нахождения промежутка времени между ударами приравняем это выражение к нулю и запишем функции синуса и косинуса через половинный аргумент. Тогда получим:

$$2 \frac{V_{n+}}{k} \sin \frac{kt_n}{2} \cos \frac{kt_n}{2} = 2\delta \sin^2 \frac{kt_n}{2},$$

откуда следует

$$tg \frac{kt_n}{2} = \frac{V_{n+}}{k\delta} = \frac{R^n}{\delta} \sqrt{x_0(x_0 + 2\delta)}. \quad (7.108)$$

Если $R < 1$, то при больших значениях n можно принять:

$$tg \frac{kt_n}{2} \approx \frac{kt_n}{2}, \quad t_n = \frac{2}{k\delta} R^n \sqrt{x_0(x_0 + 2\delta)},$$

$$\tau = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{x_0}{\delta} \left(\frac{x_0}{\delta} + 2 \right)} \sum_{n=1}^{\infty} R^n.$$

Сумма, входящая в это выражение, определена ранее (7.101). С учетом этого можно записать:

$$\tau = \frac{2R}{k(1-R)} \sqrt{\frac{x_0}{\delta} \left(\frac{x_0}{\delta} + 2 \right)}. \quad (7.109)$$

Это решение приближенное. Для точного решения из (7.108) нужно записать

$$t_n = \frac{2}{k} \operatorname{arctg} \left(R^n \sqrt{\frac{x_0}{\delta} \left(\frac{x_0}{\delta} + 2 \right)} \right). \quad (7.110)$$

Для упрощения дальнейших выкладок обозначим

$$b = \sqrt{\frac{x_0}{\delta} \left(\frac{x_0}{\delta} + 2 \right)},$$

и разложим функцию $\operatorname{arctg} bR^n$ в ряд Тейлора:

$$\operatorname{arctg} bR^n = bR^n - \frac{(bR^n)^3}{3} + \frac{(bR^n)^5}{5} - \frac{(bR^n)^7}{7} + \dots + \frac{(bR^n)^{2m-1}}{2m-1},$$

где m – порядковый номер члена ряда.

Время всего повторно-ударного процесса определится как

$$\tau = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \frac{2}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(bR^n - \frac{(bR^n)^3}{3} + \frac{(bR^n)^5}{5} - \frac{(bR^n)^7}{7} + \dots \right).$$

Суммируя отдельно только первые, только вторые, только третьи члены и т. д., запишем:

$$\tau = \frac{2}{k} \left[b \sum_{n=1}^{\infty} R^n - \frac{b^3}{3} \sum_{n=1}^{\infty} R^{3n} + \frac{b^5}{5} \sum_{n=1}^{\infty} R^{5n} - \frac{b^7}{7} \sum_{n=1}^{\infty} R^{7n} + \dots \right].$$

После определения всех сумм геометрических прогрессий, стоящих в скобках, получаем:

$$\tau = \frac{2bR}{k} \left[\frac{1}{1-R} - \frac{b^2}{3} \cdot \frac{R^2}{1-R^3} + \frac{b^4}{5} \cdot \frac{R^4}{1-R^5} - \frac{b^6}{7} \cdot \frac{R^6}{1-R^7} + \dots \right]. \quad (7.111)$$

Очевидно, что первый член этой суммы представляет собой решение (7.109), а остальные члены уточняют полученное решение. При этом, чем больше предварительный натяг упругого элемента δ , тем меньше величина b и тем быстрее сходится ряд (7.111).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Значения функций Крылова

αz	$K_1(\alpha z)$	$K_2(\alpha z)$	$K_3(\alpha z)$	$K_4(\alpha z)$
0,00	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,01	1,00000	0,01000	0,00005	0,00000
0,02	1,00000	0,02000	0,00020	0,00000
0,03	1,00000	0,03000	0,00045	0,00000
0,04	1,00000	0,04000	0,00080	0,00001
0,05	1,00000	0,05000	0,00125	0,00002
0,06	1,00000	0,06000	0,00180	0,00004
0,07	1,00000	0,07000	0,00245	0,00006
0,08	1,00000	0,08000	0,00320	0,00009
0,09	1,00000	0,09000	0,00405	0,00012
0,10	1,00000	0,10000	0,00500	0,00017
0,20	1,00007	0,20000	0,02000	0,00133
0,30	1,00034	0,30002	0,04500	0,00450
0,40	1,00106	0,40008	0,07999	0,01062
0,50	1,00261	0,50026	0,12502	0,02084
0,60	1,00539	0,60064	0,18006	0,03606
0,70	1,01001	0,70190	0,24516	0,05718
0,80	1,01702	0,80273	0,32036	0,08537
0,90	1,02735	0,90492	0,40574	0,12159
1,0	1,04169	1,00833	0,50139	0,16686
1,1	1,06106	1,11343	0,60746	0,22222
1,2	1,08651	1,22075	0,72415	0,28871
1,3	1,11920	1,33097	0,85170	0,36691
1,4	1,16043	1,44487	0,99046	0,45942
1,5	1,21157	1,56338	1,14083	0,56589
1/2 π	1,25409	1,65015	1,25409	0,65015
1,6	1,27413	1,68757	1,30333	0,63800
1,7	1,39974	1,81864	1,47832	0,82698
1,8	1,44013	1,95801	1,66823	0,98416

1,9	1,54722	2,10723	1,87551	1,16093
2,0	1,67277	2,26808	2,08917	1,35828
2,1	1,82973	2,44253	2,32458	1,57937
2,2	1,98970	2,63280	2,57820	1,82430
2,3	2,18547	2,84133	2,85175	2,09562
2,4	2,4078	3,07085	3,14717	2,39537
2,5	2,66551	3,32433	3,46671	2,72586
2,6	2,95606	3,60511	3,81295	3,08961
2,7	3,08470	3,91682	4,18872	3,48944
2,8	3,65520	4,26346	4,59747	3,92846
2,9	4,07181	4,64940	5,04277	4,41016
3,0	4,53883	5,07949	5,52882	4,93837
3,1	5,06118	5,55901	6,06032	5,51743
π	5,29597	5,77437	6,29597	5,77437
3,2	5,64418	6,09375	6,64247	6,15212
3,3	6,29364	6,69006	7,28112	6,84781
3,4	7,01592	7,35491	7,98277	7,61045
3,5	7,81818	8,09592	8,75464	8,44760
3,6	8,70801	8,92147	9,60477	9,36399
3,7	9,69345	9,84072	10,54205	10,37056
3,8	10,78540	10,86377	11,57637	11,47563
3,9	11,99271	12,00167	12,71864	12,68943
4,0	13,32739	13,26656	13,98093	14,02336
4,1	14,80180	14,67179	15,37662	15,49007
4,2	16,43020	16,23204	16,92046	17,10362
4,3	18,27794	17,96347	18,62874	18,87964
4,4	20,21212	19,88385	20,51945	20,83545
4,5	22,40166	22,01274	22,61246	22,99027
4,6	24,81751	24,37172	24,92966	25,36541
4,7	27,48287	26,98456	27,49526	27,98448
$3\pi/2$	27,83169	27,32720	27,83169	28,32720
4,8	30,42341	29,87746	30,33591	30,87362
4,9	33,66756	33,07936	33,48105	34,06181

5,0	37,24680	36,62214	36,96314	37,58106
5,1	41,19599	40,54105	40,81801	41,46686
5,2	45,55370	44,87495	45,08518	45,75840
5,3	50,36263	49,66682	49,80826	50,49909
5,4	55,67008	54,96409	55,03539	55,73685
5,5	61,52834	60,81919	60,81967	61,52473
5,6	67,99531	67,29004	66,21974	67,92131
5,7	75,13504	74,44067	74,30033	74,99136
5,8	83,01840	82,34183	82,13288	82,80633
5,9	91,72379	91,07172	90,79631	91,44562
6,0	101,33790	100,37773	100,37773	100,99629
6,1	111,95664	111,37280	110,97337	111,55491
6,2	123,68604	123,19521	122,68950	123,22830
2π	134,37338	133,87245	133,37338	133,87245
6,3	136,64336	136,15092	135,64350	136,13411
6,4	150,96826	150,46912	149,97508	150,35257
6,5	166,77508	166,39259	165,79749	166,17747
6,6	184,24925	183,92922	183,29902	183,61768
6,7	203,55895	203,30357	202,64457	202,89872
6,8	224,89590	224,70860	224,02740	224,21449
6,9	248,47679	248,35764	247,66106	247,77920
7,0	274,53547	274,48665	273,78157	273,82956
7,1	303,33425	303,28381	302,64970	302,62707
7,2	370,33819	335,25434	334,55370	334,46067
7,3	335,16205	370,50003	369,81211	369,64954
7,4	409,21553	409,44531	408,77698	408,54660
7,5	452,18406	452,92446	451,73742	451,54146
7,6	499,67473	500,03281	499,42347	499,06489
7,7	552,16384	552,58097	552,01042	551,58780
7,8	610,17757	610,64966	610,12361	609,65112
$5/2\pi$	643,99272	644,49252	643,99272	643,49252
7,9	674,29767	674,81986	674,34367	673,82102
8,0	745,16683	745,73409	745,31233	744,74473

8,1	823,49532	823,95189	823,73886	823,28200
8,2	910,06807	910,70787	910,40722	909,76714
8,3	1005,75247	1006,41912	1006,18385	1005,51695
8,4	1111,50710	1112,19393	1112,02639	1111,33933
8,5	1228,39125	1229,09140	1228,99326	1228,29291
8,6	1357,57558	1358,28205	1358,25430	1357,54765
8,7	1500,35377	1501,05950	1501,10242	1500,39658
8,8	1658,15549	1658,85342	1658,96658	1658,26850
8,9	1832,56070	1833,42607	1833,42614	1832,74284
9,0	2025,31545	2025,97701	2026,22658	2025,56489
9,1	2238,34934	2238,98270	2239,29706	2238,66360
9,2	2473,79487	2474,39373	2474,76971	2474,17079
9,3	2734,00871	2734,56071	2735,00094	2734,44255
9,4	3021,59536	3022,10755	3022,59505	3022,08297
3 π	3097,41192	3097,91193	3098,41197	3097,91193
9,5	3339,43314	3339,89411	3340,43031	3359,96926
9,6	3690,70306	3691,11321	3691,68775	3691,27754
9,7	4078,92063	4079,26590	4079,88299	4079,53766
9,8	4508,47103	4508,25298	4508,90146	4508,61946
9,9	4982,14802	4982,35202	4983,03721	4982,32136
10	5596,19606	5506,34442	5507,03599	5506,88844

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 568 с.

2. *Бидерман В.Л.* Прикладная теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1972. 416 с.

3. *Бутенин Н.В., Луиц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. Том 2. Динамика. М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит-ры, 1971. 464 с.

4. *Бутенин Н.В.* Введение в аналитическую механику. М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит-ры, 1971. 264 с.

5. Вибрации в технике. Справочник: в 6 т. Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. чл.-корр. АН СССР В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

6. *Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П.* Нестационарные колебания деформируемых систем. Киев: Наукова думка, 1977. 339 с.

7. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.

8. *Добронравов В.В., Никитин Н.Н.* Курс теоретической механики: учебник для машиностроительных спец. вузов. 4-е изд. перераб. и доп. М.: Высш. школа, 1983. 575 с.

9. *Дрозд М.С., Матлин М.М., Сидякин Ю.М.* Инженерные расчеты упругопластической контактной деформации. М.: Машиностроение, 1986. 224 с.

10. *Ересьянец В.Э.* Динамика ударных систем: учебное пособие: в 2-х ч. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2011. 650 с.

11. *Ересьянец В.Э., Тютюкин Г.В.* Аналитическая динамика и теория колебаний. Курсовое проектирование. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2012. 33с.

12. *Кирхгоф Г.* Механика. Лекции по математической физике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.

13. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
14. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний: учебное пособие. М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит.-ры, 1980. 272 с.
15. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механического удара. М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит.-ры, 1977. 224 с.
16. *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Политехника. 1990. 272 с.
17. *Парс Л.А.* Аналитическая динамика / пер. с англ. К.А. Лурье. М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит.-ры, 1971. 636 с.
18. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник: в 3 т. / под общ. ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. Т 3. М.: Машиностроение. 1968. 567 с.
19. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
20. *Тимошенко С.П.* Прочность и колебания элементов конструкций. М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит.-ры, 1975. 704 с.
21. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение. 1970. 734 с.

ПЕРСОНАЛИИ

1. АНДРОНОВ Александр Александрович (1901–1952) советский физик, академик Академии наук СССР (1946). Автор фундаментальных трудов и основатель научной школы по теории нелинейных колебаний и её приложениям в радиофизике, автоматическом регулировании, динамике машин. Один из авторов классической книги «Теория колебаний», первое издание которой вышло в 1937 году.

2. БЕРНУЛЛИ Даниил I (1700–1782). Швейцарский физик, математик, механик и физиолог. Почетный член Петербургской (с 1733), Берлинской, Французской Академий наук и Лондонского королевского общества. Профессор Базельского университета (1733–1782). Основные работы относятся к гидродинамике, кинетической теории газов и теории колебаний. Исследовал колебания физических и механических систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы, используя теорию рядов. Вывел уравнение стационарного движения идеальной жидкости, носящее его имя. Заложил основы теории дифференциальных уравнений с частными производными.

3. БЕРНУЛЛИ Иоган I (1667–1748). Швейцарский математик. Почетный член Петербургской Академии наук (с 1725), член французской академии наук, профессор математики Гронингского (с 1695) и Базельского (с 1705) университетов. Ведущий математик Европы XVIII в. Развивал идеи Г.В. Лейбница в области дифференциальных и интегральных исчислений. Проводил исследования в области механики: теории удара, движения тел в сопротивляющейся среде, колебания натянутой струны. Основоположник математической физики.

4. БОГОЛЮБОВ Николай Николаевич (р. 1909), советский математик и физик теоретик, основатель научных школ по нелинейной механике и теоретической физике.

Академик Академии наук СССР (1953) и Академии наук Украинской ССР (1948), дважды Герой социалистического труда. Фундаментальные труды по нелинейной механике и физике.

5. БИДЕРМАН Вадим Львович (1906–1994). Советский ученый механик, специалист в области динамики и прочности машин. Основные труды по расчетам на прочность в машиностроении, прикладной теории механических колебаний. Лауреат Ленинской премии. Соавтор трехтомного справочника «Расчеты на прочность в машиностроении» (1952). Автор монографии «Прикладная теория колебаний механических систем» (1972).

6. БУБНОВ Иван Григорьевич (1872–1919). Русский инженер. Заложил основы строительной механики корабля. Один из авторов метода Бубнова–Галеркина.

7. ВАЛЛИС (Уоллис) (Wallis) Джон (1616–1703). Английский математик. Один из основателей Лондонского королевского общества и создателей исчисления бесконечно малых и первых научных работ по теории удара.

8. ВАН-ДЕР-ПОЛЬ Балтазар (1889–1959). Голландский физик и математик. Руководил исследованиями в электро-технической лаборатории в Эйндховене. Основные работы относятся к теории колебаний. Вывел (1920) уравнение автоколебаний в ламповом генераторе (уравнение Ван-Дер-Поля) и предложил для его решения метод медленно меняющихся амплитуд (метод Ван-Дер-Поля).

9. ГАЛЕРКИН Борис Григорьевич (1871–1945). Советский инженер и ученый, академик АН СССР (1935), инженер-генерал-лейтенант. Один из создателей теории изгиба пластин. Труды по строительной механике и теории упругости. Один из авторов метода Бубнова–Галеркина.

10. ГАМИЛЬТОН Уильям Роуан (1805–1865) ирландский математик и механик, иностранный член Петербург-

ской Академии наук (1837). Дал общий принцип наименьшего действия, вывел так называемые канонические уравнения механики.

11. ГЕРЦ (Hertz) Генрих Рудольф (1857–1894) немецкий физик, предложил модель удара, учитывающую местные контактные деформации соударяющихся тел (модель Герца).

12. ГЮЙГЕНС Христиан (1629–1695). Голландский механик, физик и математик. Первый иностранный член Лондонского королевского общества (1663), член Французской АН, её первый президент (1681). Основные труды посвящены теоретической механике, математике, физике и астрономии. Дал одно из решений задачи удара неупругих тел.

13. Д'АЛАМБЕР (D'Alembert) Жан Лерон (1717–1783). Французский математик, механик и философ просветитель. Иностранный почетный член Петербургской Академии наук (1764). Сформулировал правила составления дифференциальных уравнений движения материальных систем. Основные труды по теории дифференциальных уравнений, теории рядов, алгебре.

14. ДЕКАРТ Рене (1596–1650). Французский философ, физик, математик и физиолог. Ввел понятие количества движения, не учитывая, однако, что это векторная величина. Сформулировал закон сохранения количества движения (1644), исследовал законы удара и впервые сформулировал закон инерции (1644). В математике первым ввел понятие переменной величины и функции (1637), заложил основы аналитической геометрии.

15. ЗОММЕРФЕЛЬД Арнольд Иоган Вильгельм (1868–1951). Немецкий физик-теоретик, член-корреспондент Берлинской Академии наук (1920). Работы посвящены квантовой теории атома, спектроскопии, квантовой теории метал-

лов, математической физике. Автор популярных учебников по теоретической физике, механике, математической физике. Дал объяснение ряду эффектов, возникающих в динамике машин, например, эффект Зоммерфельда. Используя законы динамики твердого тела и теории удара, описал механику игры на бильярде.

16. КИЛЬЧЕВСКИЙ Николай Александрович (1909–1979). Советский математик и механик, академик Академии наук Украинской ССР (1964). Основные труды посвящены общей механике, теории оболочек, исследованию контактных задач теории упругости и теории удара. Автор капитальной монографии по удару «Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар» (1976).

17. КРЫЛОВ Алексей Николаевич (1863–1945). Советский математик, механик и кораблестроитель, академик Российской Академии наук (1916). Основные исследования посвящены теории корабля, строительной механике, теории гироскопов, теории дифференциальных уравнений, теории колебаний и вибрации корабля. Разработал методы расчета изгибных колебаний балок с промежуточными опорами, ввел в расчеты изгибных колебаний специальные функции, названные впоследствии функциями Крылова.

18. ЛАГРАНЖ (Lagrange) Жозеф Луи (1736–1813). Французский математик и механик, член (1759) и президент (1766–1787) Берлинской Академии наук, иностранный почетный член Петербургской Академии наук (1776). Основные труды по вариационному исчислению, аналитической механике. В трактате «Аналитическая механика» (1788) в основу статики положил принцип возможных перемещений, в основу динамики – сочетание этого принципа с принципом Д'Аламбера.

19. ЛУРЬЕ Анатолий Исаакович (1901–1980), советский ученый в области механики, член-корреспондент

Академии наук СССР (1960). Труды по теории упругости, устойчивости систем, автоматическому управлению, аналитической механике.

20. МАНДЕЛЬШТАМ Леонид Исаакович (1879–1944). Советский физик, один из основателей научной школы по радиофизике в СССР, академик Академии наук СССР (1929). Совместно с Н.Д. Папалекси выполнил основополагающие исследования по нелинейным колебаниям, разработал метод параметрического возбуждения электрических колебаний.

21. МАРЦИ (Marci) Йоханнес Маркус (1595–1667). Чешский ученый. Основные труды посвящены исследованию дифракции и дисперсии света. Один из авторов первых работ по теории удара.

22. ОСТРОГРАДСКИЙ Михаил Васильевич (1801–1861/62), русский математик, академик Петербургской Академии наук (1830). Сформулировал общий вариационный принцип для неконсервативных систем (принцип Остроградского-Гамильтона). Труды по математическому анализу, математической физике, аналитической механике, гидромеханике, теории упругости, баллистике.

23. ПАНОВКО Яков Гилелевич (1913–2002). Советский ученый в области механики, член-корреспондент Академии наук Латвийской ССР (1958). Основные труды посвящены теории колебаний и устойчивости механических систем. Автор популярных книг «Устойчивость и колебания упругих систем» (1967), «Основы прикладной теории колебаний и удара» (1976), «Введение в теорию механического удара» (1977). «Введение в теорию механических колебаний» (1980).

24. РИТЦ Вольтер (1878–1909). Швейцарский физик и математик. Предложил новый метод приближенного решения вариационных задач, который нашел широкое при-

менение в теории колебаний, теории упругости и строительной механике (метод Рэля–Ритца).

25. РЭЛЕЙ Джон Уильям, лорд (1842–1919). Английский физик, член Лондонского королевского общества (1873), его президент (1905–1908). Лауреат Нобелевской премии (1904). Основные работы по механике относятся к теории колебаний, одним из основоположников которой он является. В трактате «Теория звука» (т. 1–2, 1877–1878) изложил основы математической теории колебаний. Ввел понятия обобщенных сил и обобщенных координат. Сформулировал (1873) ряд фундаментальных теорем линейной теории колебаний и разработал метод для нахождения собственных частот колебаний системы (метод Рэля).

26. СЕН-ВЕНАН (Saint Venant) Адемар Жан Клод (1797–1886). Французский ученый механик. Основные труды посвящены теории упругости, сопротивлению материалов и др. Предложил принцип Сен-Венана, разработал волновую модель удара (Модель Сен-Венана), заложил основы теории пластичности.

27. ТИМОШЕНКО Степан Прокофьевич (1878–1972). Русский ученый в области теоретической и прикладной механики. Академик Академии наук Украинской ССР (1918), иностранный член-корреспондент Академии наук СССР (1928). Разработал теорию устойчивости упругих систем, развил вариационные методы теории упругости, решил ряд задач теории удара. Автор фундаментальной монографии «Колебания в инженерном деле» (1928), выдержавшей четыре переиздания (1937, 1955, 1984).

28. ФИЛИППОВ Анатолий Петрович (1899–1978). Советский ученый в области прикладной математики и механики, академик Академии наук Украинской ССР (1967). Основные работы посвящены прикладной теории упругости, теории колебаний механических систем, теории упру-

гого и упруго-пластического удара. Автор фундаментальной монографии «Колебания деформируемых систем» (1970).

29. ЭЙЛЕР Леонард (1707–1783). Швейцарский ученый математик, механик и физик, большую часть жизни проработавший в Петербургской Академии наук (1727–1741, 1766–1783). В 1741–1766 годах работал в Берлинской Академии наук. В области математики положил начало теории функций комплексного переменного, вариационного исчисления, теории специальных функций и др. Труды в области физики посвящены механике, оптике, акустике, электричеству, математической физике. Установил закон сохранения момента количества движения (1746), развил теорию моментов инерции, заложил основы преобразования механики из геометрической в аналитическую (1736). Наряду с Д. Бернулли является создателем механики жидкостей и газов (1755). Опубликовал труды по колебаниям струн, пластин, мембран, теории устойчивости корабля и др. Член многих академий наук, в частности Петербургской, Берлинской, Парижской, Лондонского королевского общества.

30. ЯКОБИ Карл Густав Якоб (1804–1851), немецкий математик, иностранный член-корреспондент (1830) и иностранный почетный член (1833) Петербургской академии наук. Труды по вариационному исчислению, математическому анализу, дифференциальным уравнениям, теоретической механике.

ОГЛАВЛЕНИЕ

4. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ	3
4.1. Уравнения движения системы в прямой и обратной форме	3
4.2. Определение частот и форм свободных колебаний системы	8
4.3. Ортогональность форм собственных колебаний ...	13
4.4. Учет симметрии системы при расчете собственных форм и частот колебаний.....	23
4.5. Приближенные методы оценки низшей собственной частоты.....	27
4.6. Главные координаты системы. Разложение движения системы по собственным формам колебаний.....	37
4.7. Выражение кинетической и потенциальной энергии через главные координаты.....	39
4.8. Вынужденные колебания систем с конечным числом степеней свободы. Метод главных координат	51
4.9. Вынужденные колебания системы под действием гармонической вынуждающей силы. Метод гармонических функций.....	57
5. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	61
5.1. Продольные и крутильные колебания стержней постоянного сечения, колебания струн.....	61
5.2. Определение собственных частот и форм продольных колебаний стержней постоянного сечения	66
5.3. Колебания ступенчатых стержней	72
5.4. Изгибные колебания балок	74

5.5. Расчет колебаний балок с несколькими участками	85
5.6. Влияние продольных сил на частоту свободных колебаний балок.....	92
5.7. Влияние на собственные частоты колебаний деформации сдвигов и моментов инерции при повороте сечений	96
5.8. Влияние вязкого трения на поперечные колебания балки	102
5.9. Приближенные методы определения собственных частот колебаний балок	105
5.10. Вынужденные колебания балок	111
5.11. Метод динамических податливостей	120
5.12. Вынужденные колебания рам. Метод динамических жесткостей	124
6. КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК.....	136
6.1. Уравнение движения пластины постоянной толщины	136
6.2. Свободные колебания прямоугольной пластины	139
6.3. Асимптотический метод расчета колебаний пластин	145
6.4. Определение собственных частот колебаний пластин методом Релея-Ритца	152
6.5. Колебания круглых пластин постоянной толщины	158
6.6. Вынужденные колебания прямоугольных пластин	166
6.7. Уравнения движения цилиндрических оболочек	170
7. КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ ПРИ УДАРЕ.....	173
7.1. Контактная теория Герца	173
7.2. Линеаризация модели Герца	177

7.3. Упругопластическая модель удара.....	182
7.4. Продольное соударение стержней. Волновая модель удара Сен-Венана.....	186
7.5. Модель, учитывающая общие и местные деформации соударяющихся тел.....	199
7.6. Поперечный удар по упругой балке.....	209
7.7. Поперечный удар сферой по пластине	218
7.8. Повторно-ударные процессы в автономных системах	222
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	231
Значения функций Крылова.....	231
ЛИТЕРАТУРА.....	235
ПЕРСОНАЛИИ	237

**Виктор Эдуардович Еремьянц,
Яков Исаакович Рудаев,
Геннадий Викторович Тютюкин**

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Учебное пособие

Часть 2

Редактор *И.С. Волоскова*
Компьютерная верстка *Д. Ю. Иванова*

Подписано в печать 9.06.14
Формат 60×84 ¹/₁₆. Печать офсетная.
Объем 15,5 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 38

Издательство КРСУ
720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44

Отпечатано в типографии КРСУ
720048, г. Бишкек, ул. Горького, 2