ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра прикладной математики

А. Керимбеков, Л.С. Красниченко

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебно-методическое пособие

Бишкек 2016

УДК 519.6
ББК 22.18
К 36

Рецензенты:
Я.И. Рудаев, д-р физ.-мат. наук, проф.,
Е.Л. Миркин, д-р техн. наук, проф.,
Е.Ю. Савченко, канд. техн. наук, доцент

Керимбеков А., Красниченко Л.С.
К 36 МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ: учебно-методическое пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2015. 100с.

Учебно-методическое пособие содержит основной теоретический материал по методам оптимизации, а также рекомендации по использованию этого материала для решения практических задач, большое количество решенных задач. Для самостоятельного решения предложены типовые задачи по всем разделам.

Круг вопросов и задач настоящего пособия определяется действующей программой подготовки бакалавров по направлению «Прикладная математика и информатика».

Для студентов, аспирантов и преподавателей вузов.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методы оптимизации – раздел математики, в котором анализируются и решаются экстремальные задачи (задачи минимизации и максимизации функционалов на множествах конечномерных или бесконечномерных пространств).

Экстремальные задачи встречаются в различных сферах человеческой деятельности. Каждое разумное действие является в определенном смысле и оптимальным, ибо оно, как правило, выбирается после сравнения с другими вариантами. Интерес к задачам наилучшего выбора был высоким всегда, но особенно возрос в последние годы в связи интенсивным развитием науки и техники.

Задачи, связанные с отысканием наименьших и наибольших величин, появились еще в древние времена. В XX веке в связи с ростом производства и осознанием того, что ресурсы земли ограниченные, большую актуальность приобрели вопросы наилучшего в том или ином смысле управления различными технологическими процессами, математическая модель которых приводит к задачам оптимизации.

С другой стороны, потребности развития вычислительной математики также привели к необходимости исследования таких задач на максимум и минимум, как, например, задачи наилучшего приближения функций, оптимального выбора параметров итерационного процесса или узлов интерполирования, минимизации, невязки уравнений и т. д.

Дисциплина «Методы оптимизации» возникла как развитие классических методов решения экстремальных задач, которые связаны с именами Ньютона, Эйлера и Лагранжа. Стремление решить прикладные и экстремальные задачи привело к разработке и развитию различных методов оптимизации. В настоящее время теория экстремальных задач обогатилась фундаментальными результатами, появились ее новые разделы, такие как линейные, выпуклые, динамическое программирование, оптимальное управление и др.

Настоящий курс «Методы оптимизации» как дисциплина, относящаяся к прикладной математике, изучает элементы теории экстремальных задач в конечномерном пространстве и имеет своей целью ознакомить студентов с основами наиболее часто используемых на практике методов приближенного решения экстремальных задач.

В данном методическом пособии излагаются основные методы, используемые в настоящее время в теоретических и прикладных работах по оптимизации.

При написании методического пособия использован опыт преподавания общего курса «Методы оптимизации» для студентов третьего курса факультета прикладной математики и информатики Кыргызско-Российского Славянского Университета, который является вводным для курсов: «Методы оптимальных решений», «Теория игр».

В каждой главе излагается основной теоретический материал, сопровождающийся большим количеством примеров с решениями. В конце каждой темы предложены примеры для самостоятельного решения.

При составлении задач автор пользовался многочисленными источниками.

§1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Основные понятия

Определение 1. Пусть на множестве $U \subset \mathbb{R}$ определена функция *f(x)*. Под *минимизацией* функции *f(x)* на множестве *U* будем понимать решение следующей задачи: найти хотя бы одну точку минимума x^* и минимум $f^* = f(x^*)$ этой функции на множестве *U*.

Замечание. Задача нахождения точки максимума и максимального значения функции f(x) сводиться к задаче минимизации заменой *f(x)* на – *f(x)*, поэтому ниже будут рассматриваться только задачи на минимизацию.

Определение 2. Число $x^* \in U$ называется *точкой абсолютного (глобального) минимума* или просто *точкой минимума* функции *f(x)* на множестве *U*, если $f(x^*) \le f(x)$ для всех $x \in U$.

Определение 3. Значения $f^* = \min\limits_{U}(f(x))$ называется *абсолютным (глобальным) минимумом* или *просто минимумом* *f(x)* на *U*. Множество всех точек минимума функции *f(x)* на множестве *U* будет обозначать U^*.

Определение 4. Число $\bar{x} \in U$ называется *точкой локального минимума функции f(x)*, если существует такое число $\partial > 0$, что $f(\bar{x}) \le f(x)$ для всех $x \in U_0 = \left\{ x \mid x \in U,\ \left| x - \bar{x} \right| < \partial \right\}$. Значение $f\left(\bar{x}\right)$ называется *локальным минимумом f(x).* Всякая точка глобального минимума *f(x)* является и точкой локального минимума этой функции. Обратное утверждение – неверно.

Отметим, что минимум функции *f(x)* на множестве *U* может и не существовать, т.е. множество *U** может быть пустым. В этом случае используют обобщение понятия минимума – *точную нижнюю грань* функции *f(x)* на множестве *U*. Пусть *f(x)* ограничена снизу на *U*, т.е. $f(x) \ge A > -\infty$ для всех $x \in U$. Число f_* называется точной нижней гранью функции *f(x)* на множестве

U $f_* = \inf\limits_U (f(x))$, если $f(x) \geq f_*$ при всех $x \in U$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $x_\varepsilon \in U$ такая, что $f(x_\varepsilon) < f_* + \varepsilon$. Для неограниченных снизу функций *f(x)* полагают $f_* = -\infty$. Если $U^* \neq \varnothing$, то $f_* = \inf\limits_U (f(x)) = f^* = \min\limits_U (f(x))$.

Пример 1. Пусть $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{x}, \mathrm{U} = [1; +\infty)$. Показать, что множество U^* точек минимума функции *f(x)* на множестве *U* пусто и $f_* = \inf\limits_U (f(x)) = 0$.

Решение. Предположим, что $f(x^*) = {}^1\!/_{x^*} > {}^1\!/_x = f(x)$, т.е. существует хотя бы она точка минимума функции *f(x)* на *U*. Возьмем произвольное число $x > x^*$. Тогда $x \in U$ и $f(x^*) = {}^1\!/_{x^*} > {}^1\!/_x = f(x)$, т.е. x^* не является точкой минимума *f(x)* на *U*. Полученное противоречие и доказывает, что множество U^* точек минимума пусто.

Покажем, что $f_* = \inf\limits_U (f(x)) = 0$. Очевидно, для произвольного $x \in [1; +\infty)$ справедливо неравенство $f(x) = \frac{1}{x} > 0$. Далее, пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем произвольное $x_\varepsilon > \max(\frac{1}{\varepsilon}, 1)$, тогда $x_\varepsilon \in U$ и $f(\mathrm{x}_\varepsilon) < \varepsilon = 0 + \varepsilon$, следовательно $f_* = 0$.

Пример 2. Пусть $f(x) = \ln(x)$, $U = [0; 1)$. Найти $f_* = \inf\limits_U (f(x))$.

Решение. Функция *f(x)* не ограничена снизу на множестве *U*, поэтому по определению точной нижней грани полагаем $f_* = -\infty$.

В случае $U^* \neq \varnothing$ под задачей минимизации *f(x)* на множестве *U* понимают определение $f_* = \inf_U (f(x))$, полагая $f_* = f^*$. При этом точка минимума x^* не ищется.

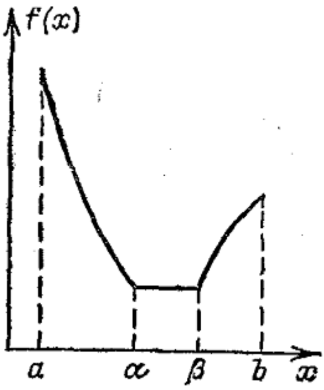
Существование локальных минимумов функции *f(x)*, отличных от абсолютного, почти всегда затрудняет поиск точек $x^* = U^*$, поэтому многие приближенные методы минимизации применимы только тогда, когда любой локальный минимум *f(x)* является одновременно и глобальным. Один из классов функций, удовлетворяющих этому условию, составляют *унимодальные функции.*

Определение 5. Функция *f(x)* называется *унимодальной на отрезке [a;b],* если она непрерывная на [a;b] и существуют числа α и β, $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, такие, что:

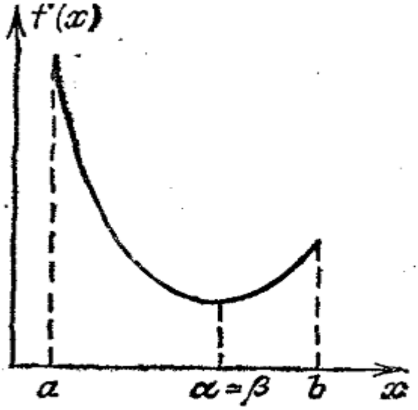
1) если $a \leq \alpha$, на отрезке $[a;\alpha]$ *f(x)* монотонно убывает;
2) если $\beta \leq b$, на отрезке $[\beta;b]$ *f(x)* монотонно возрастает;
3) при $x \in [\alpha;\beta]$ $\quad f(x) = f^* = \min_{[a;b]} f(x)$.

Возможно вырождение в точку одного или двух из отрезков $[a;\alpha]$, $[\alpha;\beta]$, $[\beta;b]$. Некоторые варианты расположения и вырождения в точку отрезков монотонности и постоянства унимодальной функции показаны на рис. 1(а-г).

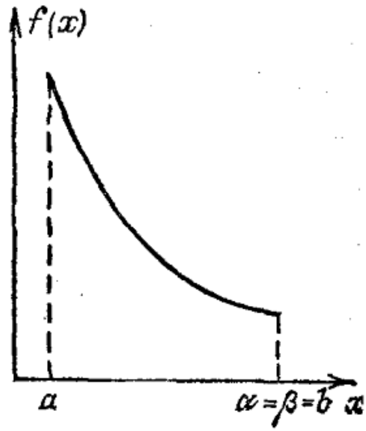
Множество функций, унимодальных на отрезке [a;b], обозначают $Q[a;b]$



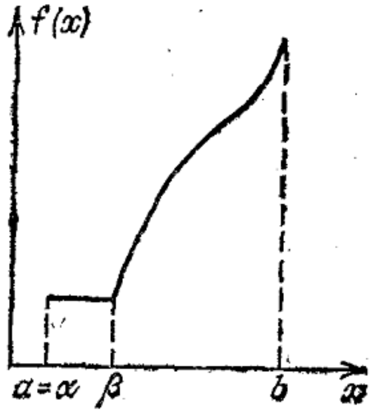
а



б



в



г

Рисунок 1. Варианты унимодальной функции

Критерии проверки унимодальности функции *f(x)*:

1) Если функция f(x) дифференцируема на отрезке [a;b] и производная $f^{'}(x)$ не убывает на этом отрезке, то $f(x) \in Q[a;b]$;

2) если функция f(x) дважды дифференцируема на отрезке [a;b] и $f''(x) \ge 0$ при $x \in Q[a;b]$.

Замечание. Унимодальность функций является исключительно важным свойством. Фактически все одномерные методы поиска, используемые на практике, основаны на предположении, что исследуемая функция в допустимой области, *по крайней мере,* обладает свойством унимодальности. Полезность этого свойства определяется тем фактом, что для унимодальной функции *f(x)* сравнение значений *f(x)* в двух различных точках интервала поиска позволяет определить, в каком из заданных двумя указанными точками интервалов точка оптимума *отсутствует.*

Пример 3. Показать, что функция $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + 5x$ унимодальная на отрезке $[3;5]$.

Решение. Вторая производная функции *f(x)* равно $f''(x) = 12x^2 - 60x + 72$. Корни полученного квадратного трехчлена $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Следовательно, $f''(x) \ge 0$, если $x \ge 3$ и, в частности, при $x \in [3;5]$. Используя второй критерий унимодальности, получаем, что $f(x) \in Q[3;5]$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Пусть $f(x) = |x^2 - 1|$ при $x \ne 1$ и $f(1) = 1$. Найти множество U_* точек минимума $f(x)$ на $X = R$. Можно ли утверждать, что любая минимизирующая последовательность для этой функции будет сходится к U_*.

2. Найти все точки локального экстремума функции $f(x) = \left|\left||x^2 - 1| - 1\right| - 1\right|$ на отрезке $[a,b]$ при различных *a, b*. При каких *a, b* эта функция будет унимодальной на $[a,b]$.

3. Выяснить, на каких отрезках будут унимодальными функции $f(x) = e^x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = -x^2$, $f(x) = \sqrt{|x|}$, $f(x) = \cos x$.

4. Найти множество точек минимума U* функции f(x) на множестве U

$$f(x)=\begin{cases} x & при \quad |x|>1, \\ 1 & при \quad |x|\le 1, \end{cases} \quad U=R.$$

В задачах 5–9 убедиться, что множество точек минимума функции *f(x)*, заданной на множестве **U**, пусто, и найти $f_* = \inf_U f(x)$:

5. $f(x)=2x^3-9x^2+12x+5, \quad U=(-\infty;5).$
6. $f(x)=x\sin x, \quad U=R.$
7. $f(x)=tgx, \quad U=[-2;2]$
8. $f(x)=arctgx, \quad U=(-\infty;-1].$
9. $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}, \quad а) U=(0;1); \quad б) \quad U=(1,+\infty)$.

В задачах 10–13 убедиться в унимодальности функций *f(x)* на указанных отрезках [a; b].

10. $f(x)=\sqrt{1+x^2}+e^{-2x}, \quad [0;1]$
11. $f\left(x\right)=x^2-3x+x\ln x, [1;2]$
12. $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+x^2-8x+12, \quad [0;2]$
13. $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\sin x, \quad [0;1]$

14. Следует ли из унимодальности функций f_1, f_2 унимодальность функций f_1+f_2; $\max\left(f_1, f_2\right)$.

15. Найти максимальное значение b, при котором функция $f(x)=-x^2+5x-6$ унимодальна на отрезке [-5; b].

2. Прямые методы минимизации

Большую группу приближенных методов минимизации функций составляют прямые методы минимизации, основанные на вычислении только значений минимизируемой функции в некоторых точка и не использующие значений ее производных.

Метод перебора является простейшим из прямых методов минимизации. Пусть $f(x) \in Q[a;b]$ и требуется найти какую-либо из точек минимума x^* функции *f(x)* на отрезке $[a;b]$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon > 0$. Разобьем $[a;b]$ на n равных частей точками деления $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$, $i = 0,1,2,\ldots,n$, где $n \geq \frac{(b-a)}{\varepsilon}$. Вычислив значение *f(x)* в этих точках, путем сравнения найдем точку x_m, для которой

$$F\left(x_m\right) = \min_{0 \leq i \leq n} f\left(x_i\right). \quad (1.1)$$

Далее полагаем $x^* \approx x_m, f^* \approx f(x_m)$. При этом максимальная погрешность ε_n определения точки x^* равна $\varepsilon_n = \frac{(b-a)}{n}$.

Пример 4. Найти минимальное значение f^* и точку минимума x^* функции $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ на отрезке $[1,5;2]$. Точку x^* найти с погрешностью $\varepsilon = 0,05$.

Решение. $f(x) \in [1,5;2]$. Так как $f''(x) = 12x^2 + 48x - 12 > 0$ при $x \in [1,5;2]$. Выбрав $n = \frac{2-1,5}{0,05} = 10$, вычислим значения $f(x_i)$, $x_i = 1,5 + i0,05, \quad i = 0,1,\ldots,10$, поместив их в таблице 1.

Таблица 1

i	x_i	$f(x_i)$
0	1.50	-89.4
1	1.55	-90.2
2	1.60	-91.2

3	1.65	-91.8
4	1.70	-92.08
5	1.75	-92.12
6	1.80	-91.9
7	1.85	-91.4
8	1.90	-90.5
9	1.95	-89.4
10	2.00	-88.0

Из таблице 1 находим $x^* \approx 1.75, \quad f^* \approx -92.12$

Метод перебора, предполагающий предварительный выбор в точке $x_i, i = 0, 1, \dots, n$, называется также *пассивной стратегией* поиска точки минимума x^*. На практике точки x_i выбираются заранее, когда удобно провести *n+1* независимых экспериментов по измерению значений *f(x),* а последовательное измерение их трудоемко или невозможно, например ввиду нехватки времени. Однако использование уже полученной в предыдущих экспериментах информации о функции *f(x)* для выбора очередной точки x_i, измерения (вычисления) *f(x)* приводят к более эффективному поиску точки x^*.

3. Последовательные методы минимизации

Методы минимизации, в которых точки x_i, определяются в процессе поиска точки минимума с помощью найденных ранее значений функции *f(x),* называются *последовательными методами.*

Метод деления отрезка пополам является простейшим последовательным методом минимизации. Он позволяет для любой функции $f(x) \in Q[a;b]$ построить последовательность вложенных отрезков $[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset \dots \supset [a_{n-1};b_{n-1}] \supset [a_n;b_n]$, каждый из которых содержит хотя бы одну из точек минимума x^* функции *f(x).*

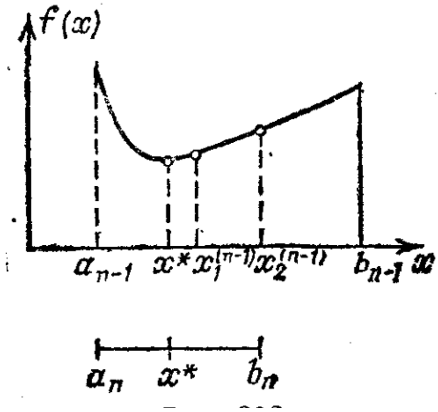


Рисунок 2

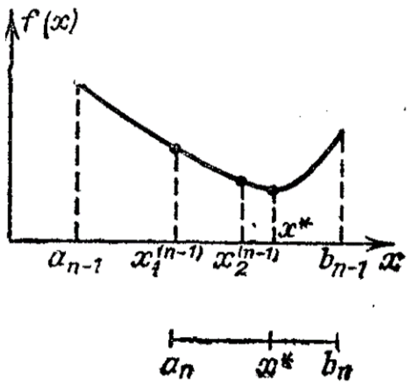


Рисунок 3

Пусть $\varepsilon > 0$ – требуемая точность определения точки x^*. Выбрав $\delta \in (0; 2\varepsilon)$, построим последовательности $\{a_n\}, \{b_n\}, \{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, n = 0{,}1 \ldots,$ используя рекуррентные формулы $a_0 = a$, $b_0 = b$

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(n-1)} &= \frac{(a_{n-1} + b_{n-1} - \partial)}{2} \\ x_2^{(n-1)} &= \frac{(a_{n-1} + b_{n-1} + \partial)}{2} \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

$a_n = a_{n-1},\ b_n = x_2^{(n-1)}$, если $f\left(x_1^{(n-1)}\right) \le f\left(x_2^{(n-1)}\right)$,

$$a_n = x_1^{(n-1)},\ b_n = b_{n-1}, \text{ если } \ f\left(x_1^{(n-1)}\right) > f\left(x_2^{(n-1)}\right).$$

Переход от отрезка $[a_{n-1};b_{n-1}]$ к отрезку $[a_n;b_n]$ методом деления отрезка пополам иллюстрируется на рис. 2, если $f\left(x_1^{(n-1)}\right) \le f\left(x_2^{(n-1)}\right)$, и на рис. 3, если $f\left(x_1^{(n-1)}\right) > f\left(x_2^{(n-1)}\right)$. Полагая $x^* \approx \dfrac{(a_n + b_n)}{2}$, находим x^* с абсолютной погрешностью, не превосходящей величины

$$\varepsilon_n = \frac{(b_n - a_n)}{2} = \frac{(b - a - \delta)}{2^{n+1}} + \frac{\delta}{2} \ . \qquad (1.3)$$

Используя условие $\varepsilon_n \le \varepsilon$, из последнего выражения можно найти необходимое число шагов n для обеспечения требуемой точности ε. Однако на практике часто поступают иначе: определив границы отрезка $[a_n;b_n]$, вычисляют ε_n по формуле (1.3) и сравнивают с заданной точностью ε.

Пример 5. Решить пример 4 методом деления отрезка пополам

Решение. Положим $\delta = 0,02 < 2\varepsilon = 0,1$. Построим последовательность вложенных отрезков $[a_n;b_n]$ по формулам (1.2), записывая результаты вычислений в таблице 2:

Таблица 2

n	a_n	b_n	$\varepsilon_n = \dfrac{(b_n - a_n)}{2}$	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$f(x_1^{(n)})$	$f(x_2^{(n)})$	Примечание
0	1,5	2	0,25	1,74	1,76	-92,135	-92,096	$f\left(x_1^{(0)}\right) \le f\left(x_2^{(0)}\right)$, $b_1 = x_2^{(0)}$
1	1,5	1,76	0,13	1,62	1,64	-91,486	-91,696	$f\left(x_1^{(1)}\right) > f\left(x_2^{(1)}\right)$, $a_2 = x_1^{(1)}$

2	1,62	1,76	0,07	1,68	1,70	-91,995	-92,084	$f\left(x_1^{(2)}\right) > f\left(x_2^{(2)}\right),\ a_3 = x_1^{(2)}$
3	1,68	1,76	0,04					$\varepsilon_3 < \varepsilon$, точность достигнута

Следовательно, $x^* \approx 1{,}72, \quad f^* = f\left(1{,}72\right) \approx 92.13$.

Для увеличения скорости сходимости метода величину $\delta \in (0; 2\varepsilon)$ целесообразно выбирать как можно меньше, однако этот выбор ограничен снизу используемым количеством верных десятичных знаков при задании аргумента x. В любом случае δ должно быть больше машинного нуля применяемого вычислительного средства.

Метод золотого сечения также является последовательным методом минимизации. Опираясь на свойства золотого сечения отрезка, этот метод использует найденные значения *f(x)* более рационально, чем метод деления отрезка пополам, что позволяет переходить к очередному отрезку, содержащему точку x^* после вычисления одного, а не двух значений *f(x)*. Деление отрезка на две неравные части так, что отношения длины всего отрезка к длине большей части равно отношению длины большей части к длине меньшей части, называется *золотым сечением* этого *отрезка.*

Золотое сечения отрезка *[a;b]* осуществляется двумя точками:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a), \\ x_2 &= a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a), \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

причем x_i есть вторая точка золотого сечения отрезка $\left[a;x_2\right]$, а x_2 – первая точка золотого сечения отрезка $[x_1;b]$.

Зная одну из точек золотого сечения отрезка $[a;b]$, другую можно найти по одной из формул

$$x_2 = a + b - x_1, \qquad x_1 = a + b - x_2. \tag{1.5}$$

Пусть $f(x) \in Q[a;b]$ и требуется найти точку минимума x^* функции *f(x)* на $[a;b]$. Построим последовательности $\{a_n\}, \{b_n\}, \{x_n\}, \quad n = 1, 2, \ldots$, следующим образом:

$$a_n = a_{n-1},\ b_n = x_2^{(n-1)},\ \overline{x_n} = x_1^{(n-1)},$$

если $f\left(x_1^{(n-1)}\right) \le f\left(x_2^{(n-1)}\right)$, (1.6)

$$a_n = x_1^{(n-1)},\ b_n = b_{n-1},\ \overline{x_n} = x_2^{(n-1)}, \quad \text{если} \quad f\left(x_1^{(n-1)}\right) > f\left(x_2^{(n-1)}\right),$$

n=2,3,…,

где $a_1 = a$, $b_1 = b$, $x_1^{(n-1)}$, $x_2^{(n-1)}$ – первая и вторая точки золотого сечения (1.4) отрезка $[a_{n-1};b_{n-1}]$.

Для определения чисел a_n, b_n, $\overline{x_n}$ по найденным a_{n-1}, b_{n-1},, $\overline{x}_{n-1}$ необходимо выполнить следующие операции:

1) найти одну из точек золотого сечения отрезка $[a_{n-1};b_{n-1}]$ по известной другой точке $\overline{x}_{n-1}$, используя формулы (1.5);

2) вычислить значение *f(x)* во вновь найденной точке золотого сечения (значения в другой точке $\overline{x}_{n-1}$ уже вычислено на одном из предыдущих шагов);

3) сравнить значения $f(x_1^{(n-1)})$ и $f(x_2^{(n-1)})$, найти a_n, b_n, $\overline{x_n}$ по формулам (1.6).

Таким образом, на каждом шаге определения a_n, b_n, $\overline{x_n}$, n=2,3,…, требуется вычисление одного значения *f(x)*. Положив $x^* \approx \overline{x}_n$, найдем точку минимума x^* с точностью ε_n:

$$\left|x^* - \overline{x_n}\right| \le \varepsilon_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \left(b-a\right).$$

Откуда следует, что число шагов *n* метода золотого сечения, обеспечивающее заданную точность ε в нахождении точки x^*, должно удовлетворять неравенству

$$n \geq \frac{\ln\left(\dfrac{\varepsilon}{b-a}\right)}{\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} \approx -2{,}1\ln\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right). \qquad (1.7)$$

Пример 6. Решить пример 3 методом золотого сечения.

Решение. При определении x^* с большой точностью, чтобы избежать накопления ошибок округления, обычно точки золотого сечения отрезка $[a_n;b_n]$ находят по формулам (1.4) и в качестве $x_1^{(n-1)}$ и $x_2^{(n-1)}$ используют $\bar{x}_{n-1}$ и ту из найденных точек, которая больше отличается от $\bar{x}_{n-1}$. Вычисления проведем по формулам (1.6), представив результаты в таблице 3.

Таблица 3

N	ε_n	a_n	b_n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$f(x_1^{(n)})$	$f(x_2^{(n)})$	Примечание
1	0,309	1,5	2	1,691	1,809	-92,049	-91,814	$f(x_1^{(1)}) < f(x_2^{(1)})$, $b_2 = x_1^{(1)}$)
2	0,191	1,5	1,809	1,618	1,691	-91,464	-92,049	$f(x_1^{(2)}) < f(x_2^{(2)})$, $a_3 = x_1^{(2)}$
3	0,118	1,618	1,809	1,691	1,736	-92,049	-92,138	$f(x_1^{(1)}) < f(x_2^{(3)})$, $a_4 = x_1^{(3)}$
4	0,073	1,691	1,809	1,736	1,764	-92,138	-92,083	$f(x_1^{(4)}) < f(x_2^{(4)})$, $b_5 = x_2^{(4)}$
5	0.045			1.736			-92.138	$\varepsilon_n < \varepsilon$, точность достигнута

Из таблицы 3 получаем $x^* \approx \bar{x}_5 = 1{,}736$, $f^* \approx f(\bar{x}_5) = -92{,}138$.

Заметим, что если воспользоваться формулой (1.7), то необходимое число шагов *n* можно определить заранее. В нашем случае $n \geq 4{,}79$, т.е. n = 5, и отпадает необходимость во втором столбце табл. 3.

В прямых методах минимизации, рассмотренных выше, требуется, чтобы функция *f(x)* была унимодальной. Если *f(x)* этим свойством не обладает, то применение указанных методов приводит к неверному результату. Кроме того, во многих случаях доказательство унимодальности функции *f(x)* бывает затруднительно.

Метод ломаных является последовательным методом, рассчитанным на минимизацию произвольных (не обязательно унимодальных) функций, удовлетворяющих условию Липшица. Говорят, что функция *f(x)* удовлетворяет на отрезке [a;b] *условию Липшица,* если существует такое число L>0 (константа Липшица), что

$$\left| f(x') - f(x'') \right| \leq L \left| x' - x'' \right| \tag{1.8}$$

для всех x', $x'' \in [a;b]$.

Для проверки условия Липшица используют следующий факт: *если функция f(x) имеет на отрезке [a;b] ограниченную производную, то она удовлетворяет условию (8), где* $l \geq \max\limits_{[a;b]} \left| f'(x) \right|$.

Пусть функция *f(x)* удовлетворяет на [a;b] условию Липшица с константой L. Опишем метод ломаных для минимизации *f(x).*

Положим $x_1^* = \frac{1}{2L}\left[f(a) - f(b) + L(a+b) \right]$, $p_1^* = \frac{1}{2}\left[f(a) + f(b) + L(a-b) \right]$ и реализуем следующую схему вычислений:

Шаг 1. Вместо пары чисел $\left(x_1^*, p_1^*\right)$ образуем две новые пары $\left(x_1', p_1\right)$ и $\left(x_1'', p_1\right)$ следующим образом:

$x_1' = x_1^* - \Delta_1$, $\quad x_1'' = x_1^* + \Delta_1$, $\quad p_1 = \dfrac{1}{2}\left[f\left(x_1^*\right) + p_1^* \right]$, где $\Delta_1 = \dfrac{1}{2L}\left[f\left(x_1^*\right) - p_1^* \right]$.

Шаг 2. Из полученных двух пар $\left(x_1', p_1\right)$ и $\left(x_1'', p_1\right)$ выберем ту, у которой вторая компонента минимальна. Обозначим ее $\left(x_2^*, p_2^*\right)$ и исключим из рассматриваемого множества (очевидно, на данном шаге в качестве $\left(x_2^*, p_2^*\right)$ можно взять любую из пар $\left(x_2', p_2\right)$, $\left(x_2'', p_2\right)$).

Вместо пары $\left(x_2^*, p_2^*\right)$ добавляем две новые пары $\left(x_2', p_2\right)$ $\left(x_2'', p_2\right)$, компоненты которых находятся по формулам

$x_2' = x_2^* - \Delta_2$, $\quad x_2'' = x_2^* + \Delta_2$, $\quad p_2 = \dfrac{1}{2}\left[f\left(x_2^*\right) + p_2^* \right]$, где $\Delta_2 = \dfrac{1}{2L}\left[f\left(x_2^*\right) - p_2^* \right]$.

В результате получим множество, состоящее из трех пар чисел (x, p).

Шаг n. Из n полученных на предыдущих шагах пар (x, p) выберем ту, у которой вторая компонента p минимальна. Обозначим ее $\left(x_n^*, p_n^*\right)$. Исключим эту пару из рассматриваемого множества и добавляем вместо нее две новые пары чисел $\left(x_n', p_n\right)$ и $\left(x_n'', p_n\right)$ по формулам:

$$x_n' = x_n^* - \Delta_n, \quad x_n'' = x_n^* + \Delta_n, \quad p_n = \frac{1}{2}\left[f\left(x_n^*\right) + p_n^* \right] \qquad (1.9)$$

где $\Delta_n = \dfrac{1}{2L}\left[f\left(x_n^*\right) - p_n^* \right]$.

Полагая $x^* \approx x_n^*$, $f^* \approx f\left(x_n^*\right)$, получим приближенное решение задачи минимизации. Точность определения f^* характеризуется неравенствами $0 \le f\left(x_n^*\right) - f^* \le 2L\Delta_n$.

Геометрически метод ломаных состоит в построении последовательности ломаных, приближающихся к графику функции *f(x)* снизу и имеющих угловые коэффициенты всех звеньев, равные $\pm L$ (рис. 4).

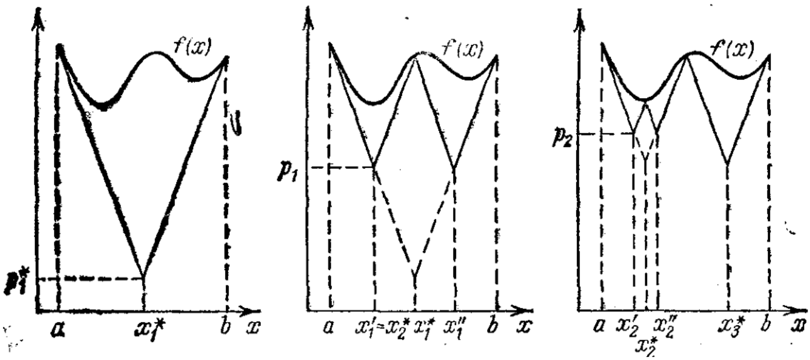


Рисунок 4

Пример 7. Методом ломаных найти минимум f^* функции $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ на отрезке $[10;15]$ с точностью 0,01 и точку минимума x^*.

Решение. Функция *f(x)* дифференцируема на указанном отрезке. Так как

$$\left| f'(x) \right| = \left| \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} \right| < \frac{x\left|\cos(x)\right| + \left|\sin(x)\right|}{x^2} < \frac{x+1}{x^2} \le 0{,}11,$$

при $x \in [10;15]$, то *f(x)* удовлетворяет условию Липшиц с константой $L = 0{,}11$.

Найдя $x_1^* = 12{,}056$, $p_1^* = -0{,}281$, продолжим вычисления, используя соотношения (9). Результаты вычислений представим в табл. 4.

Таблица 4

n	Исключаемая пара (x,p)		$2L\Delta_n$	Включенные пары (x,p)		
	x_n^*	p_n^*		x_n'	x_n''	p_n
1	12,056	-0,281	0,240	10,963	13,149	-0,161
2	10,963	-0,161	0,070	10,646	11,280	-0,126
3	13,149	-0,161	0,203	12,227	14,071	-0,096
4	10,646	-0,126	0,038	10,474	10,818	-0,107
5	11,280	-0,126	0,041	11,094	11,466	-0,106
6	10,474	-0,107	0,024	10,364	10,584	-0,095
7	10,818	-0,107	0,160	10,745	10,891	-0,099
8	11,094	-0,106	0,016	11,020	11,168	-0,098
9	11,466	-0,106	0,028	11,338	11,594	-0,092
10	10,891	-0,099	$0,008<\varepsilon$	-	-	-

Из таблицы 4 находим $x^* \approx 10,89$, $f^* \approx f(10,89) = 0,091$. Отметим, что $f(x) \notin Q[10,15]$. Поэтому из методов минимизации, рассмотренных выше, в данном случае применим только метод ломаных.

Задачи для самостоятельного решения:

Методом перебора найти точку минимума $\boldsymbol{x^*}$ функции *f(x)* на отрезке [a; b] с точностью **ε** и минимум $\boldsymbol{f_*}$.

1. $f(x)=\sqrt{1+x^2}+e^{-2x}$, $[0;1]$ $\varepsilon=0,1$
2. $f(x)=x^2-2x+e^{-x}$, $[1;1,5]$ $\varepsilon=0,05.$
3. $f(x)=tg\,x-2\sin x$, $[0;\pi/4]$ $\varepsilon=0,03.$
4. $f(x)=x^4+4x^2-32x+1$, $[1,5;2]$ $\varepsilon=0,05.$
5. $f(x)=x^3-3\sin x$, $[0,5;1]$ $\varepsilon=0,05.$

Убедившись в унимодальности функции, на указанном промежутке методом половинного деления найти точки минимума с указанной погрешностью; оценить количество итераций, необходимых для решения задачи с указанной точностью:

6. $f\left(x\right)=e^{x}-\dfrac{1}{3}x^{3}+2x,\quad x\in\left[-1{,}5,-1\right],\quad \varepsilon=0{,}01$

7. $f\left(x\right)=\sqrt{1+x^{2}}+e^{-2x},\quad x\in\left[0{,}1\right],\quad \varepsilon=0{,}01$

8. Найти наименьшее n, начиная с которого точность метода золотого сечения больше точности метода деления отрезка пополам в 2 раза; в 10 раз.

4. Методы минимизации, основанные на использовании производных функции

Если вычисление или измерение производных функции *f(x)* не представляют больших затруднений, то при решении задачи минимизации можно применять непрямые методы, основанные на использовании производных *f(x)*. Во многих случаях эти методы обеспечивают более быструю сходимость, чем прямые методы минимизации.

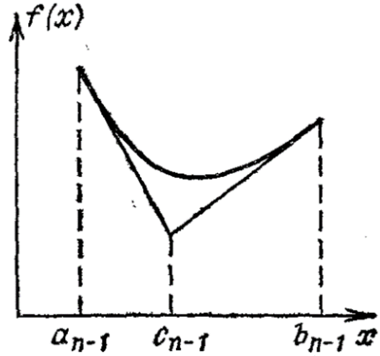


Рисунок 5

Метод касательных применяется для минимизации *выпуклых* дифференцируемых функций. Функция *f(x)* называется выпуклой на отрезке $\left[a;b\right]$, если

$$f\left[\alpha x'+(1-\alpha)\,x''\right]\le\alpha f\left(x'\right)+(1-\alpha)\,f\left(x''\right), \qquad (1.10)$$

для произвольных x', $x''\in\left[a;b\right]$ и $\alpha\in\left[0;1\right]$.

Проверка условия (1.10) почти всегда вызывает затруднения, поэтому на практике используют следующий критерий выпуклости:

Для того, чтобы дважды дифференцируемая на отрезке $[a;b]$ *функция f(x) была выпукла на отрезке* $[a;b]$*, необходимо и достаточно, чтобы* $f''(x) \geq 0$ *при всех* $x \in [a;b]$.

Опишем метод касательных. Пусть *f(x)* – выпуклая дифференцируемая на отрезке $[a;b]$ функция, причем $f'(a) \times f'(b) < 0$. Построим последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$, n= 1,2,…, в соответствии с рекуррентными соотношениями: $a_0 = a$, $b_0 = b$

$$c_{n-1} = \frac{b_{n-1} f'(b_{n-1}) \; - \; a_{n-1} f'(a_{n-1}) \; + \; f(a_{n-1}) \; - \; f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1}) \; - \; f'(a_{n-1})} \qquad (1.11)$$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}, b_n = c_{n-1} \text{ при } f'(c_{n-1}) \geq 0 \\ a_n = c_{n-1}, b_n = b_{n-1} \text{ при } f'(c_{n-1}) < 0 \end{cases}. \qquad (1.12)$$

После n шагов полагаем $x^* \approx c_n$, $f^* \approx f(c_n)$. Требуемая точность минимизации *f(x)* считается достигнутой, если производная $f'(c_n)$ достаточно близка к нулю, т.е. $|f'(c_n)| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

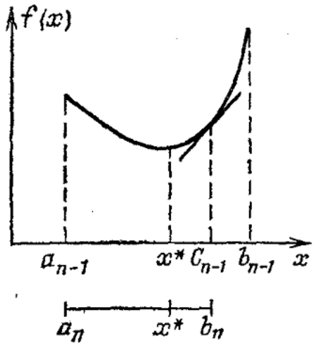


Рисунок 6

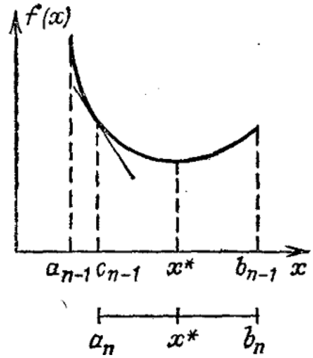


Рисунок 7

Метод касательных имеет простой геометрический смысл: величина c_{n-1} из (1.11) – это абсцисса точки пересечения касательных к графику *f(x)*, проведенных в граничных точках отрезка $\left[a_{n-1};b_{n-1}\right]$ (рис. 5). Рис. 6 и 7 поясняют формулы (1.11) для случаев $f'\left(c_{n-1}\right)>0$ и $f'\left(c_{n-1}\right)<0$ соответственно. Отрезок $\left[a_n;b_n\right]$ выбирается так, чтобы $x^*\in\left[a_n;b_n\right]$.

Если условие $f'(a)\times f'(b)<0$ не выполняется, то

a) $x^*=a$ при $f'(a)>0$, $f'(b)>0$;

b) $x^*=b$ при $f'(a)<0$, $f'(b)<0$;

c) если $f'(a)=0$, и $x^*=b$, если $f'(b)=0$.

Пример 8. Убедимся, что функция $f(x)=x^2+e^x$ выпукла на $[-1:1]$. Минимизировать ее методом касательных с точностью $\left|f'\left(c_n\right)\right|\le 0,05$.

Решение. Так как $f''(x)=2+e^x>0$, то *f(x)* – выпуклая функция; кроме того, $f'(a)\times f'(b)<0$. Проведем вычисления по формулам (1.11), (1.12), поместив результаты вычислений в табл. 5.

Таблица 5

n	a_n	b_n	c_n	$f'\left(c_n\right)$	Примечание
0	-1	1	0,11586	1,35	$f'\left(c_0\right)>0, b_1=c_0$
1	-1	0,11586	-0,41637	-0,173	$f'\left(c_1\right)>0, b_2=c_1$
2	-0,41637	0,11586	-0,14313	0,58	$f'\left(c_2\right)>0, b_3=c_2$
3	-0,41637	-0,14313	-0,27806	0,02	$\left|f'\left(c_3\right)\right|<0,05$, точность достигнута

Из таблицы 5 находим $x^*\approx c_3=0,278$; $f^*\approx f\left(c_3\right)=0,835$.

Метод Ньютона, использующий не только первую, но и вторую производные функции *f(x)*, при определенных условиях обеспечивает значительно более высокую, чем рассмотренные выше методы минимизации, скорость сходимости к точке минимума x^*.

Пусть *f(x)* – выпуклая дважды дифференцируемая на *R* функция. Выбрал начальное приближение x_0, построим последовательность

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f'(x_{n-1})}{f''(x_{n-1})}, \qquad \text{n} = 1,2,\ldots \tag{1.13}$$

Считая неравенство $\left|f'(x_{n-1})\right| \le \varepsilon$ ($\varepsilon -$ достаточно малое число) условием достижения требуемой точности вычислений, положим $x^* \approx x_n$, $f^* \approx f(x_n)$. При неудачном выборе x_n последовательность (1.13) может расходиться. Если же точка x_n достаточно близка к x^*, то эта последовательность сходится к x^* достаточно быстро.

Оценка скорости сходимости может быть сформулирована следующим образом. Пусть *f(x)* – дважды дифференцируемая на *R* функция, причем $f''(x) \ge \mu > 0$ при всех $x \in R$ и $f''(x)$ удовлетворяет условию Липшица на R с константой L. Тогда, если начальное приближение x_0 удовлетворяет условию $q = \frac{L}{2\mu^2}\left|f'(x_0)\right| < 1$, то последовательность (1.13) сходиться к единственной точке минимума x^* функции *f(x)* на *R*, причем $\left|x^* - x_n\right| \le \frac{2\mu}{L} q^{2^n}$, n= 0,1,…

Пример 9. Методом Ньютона найти точку минимума x^* и минимальное значение f^* функции $f(x) = (x-2)^4 - \ln(x)$ с точностью $\left|f'(x_n)\right| \le 10^{-7}$.

Решение. Выберем $x_0 = 3$ и проведем вычисления по формуле (1.13), записывая результаты в таблице 6.

Таблицы 6

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$)
0	3	-9,86*10^{-2}	3,67
1	2,6972477	-0,7558859	0,985
2	2,5322701	-0,8488508	0,208
3	2,4736906	-0,8553636	2,1*10^{-2}
4	2,4663735	-0,8554408	3*10^{-4}
5	2,4662656	-0,8554408	5*10^{-8}<10^{-7}

Окончательно $x^* \approx 2,4662656$, $f^* \approx -0,8554408$.

Метод Ньютона часто используется на завершающем этапе минимизации, когда точка минимума x^* грубо найдена другим, менее трудоемким методом и требуется найти x^* с большой точностью.

Задачи для самостоятельного решения.

Установите, какие из следующих функций являются выпуклыми или вогнутыми

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = e^{-x}$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
4. $f(x) = x + \log x, \quad x > 0$
5. $f(x) = |x|$
6. $f(x) = x\log x, \quad x > 0$
7. $f(x) = x^{2k}, k - \textit{целое число}$
8. $f(x) = x^{2k+1}, k - \textit{целое число}$

Убедившись в выпуклости функции $f(x)$, на указанном промежутке методом касательных найти точку минимума с указанной погрешностью; оценить количество итераций, необходимых для решения задачи с точностью $|f'(c_n)| \le 0,01$,

9. $f(x) = x - \ln x, \quad [0{,}1;\, 2]$

10. $f(x) = x^2 - \sin x, \quad [0;\, \pi/2]$

11. $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1, \quad [-1;\, 2]$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \cos x, \quad [0;\, 3]$

13. $f(x) = \sqrt{1 + x^2} + e^{-2x}, \quad [0;1]$

14. $f(x) = x^4 + e^{-x}, \quad [0;1]$

15. Найти точку минимума x^* функций 9-14 методом Ньютона, используя в качестве начального приближение, найденное методом касательных. Вычисление закончить при $\left| f'(x_n) \right| \le 10^{-6}$.

16. Исследовать поведение метода Ньютона для функции, «собранной» из двух квадратичных $f(x_1, x_2) = \max\left\{(x_1 + 1)^2 + 5x_2^2;\, (x_1 - 1)^2 + 5x_2^2\right\}$. Дать объяснение обнаруженному эффекту.

§2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

1. Выпуклые множества и выпуклые функции

Пусть $\mathcal{E}_n$ – n-мерное евклидово пространство арифметических векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Определение 6. Множество $U \subset \mathcal{E}_n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками $x^{(1)}$, $x^{(2)} \in U$ оно содержит и отрезок, соединяющий эти точки, т. е.

$$\alpha x^{(1)} + (1 - \alpha) x^{(2)} \in U \text{ для всех } \alpha \in [0;1] \tag{2.1}$$

Пример 10. Показать, что множество точек $x=(x_1,x_2)$ плоскости выпукло $U=\left\{(x_1,x_2)\middle|x_1^2+x_2^2\le 1\right\}$.

Решение. Пусть $x^{(1)}=\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)$ и $x^{(2)}=\left(x_1^{(2)},x_2^{(2)}\right)\in U$, а $x=(x_1,x_2)=\alpha x^{(1)}+(1-\alpha)x^{(2)}$ – точка отрезка, соединяющего точки $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$.

Покажем, что $x\in U$. Имеем

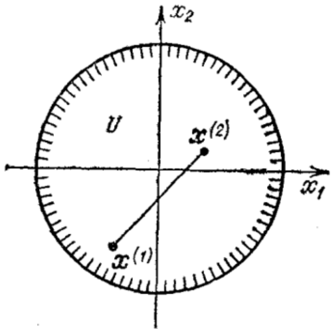


Рисунок 8

$$x_1^2+x_2^2=\left[\alpha x_1^{(1)}+(1-\alpha)x_2^{(1)}\right]^2+\left[\alpha x_1^{(2)}+(1-\alpha)x_2^{(2)}\right]^2=$$

$$=\alpha^2\left[\left(x_1^{(1)}\right)^2+\left(x_2^{(1)}\right)^2\right]+(1-\alpha)^2\left[\left(x_1^{(2)}\right)^2+\left(x_2^{(2)}\right)^2\right]+2\alpha(1-\alpha)\left[x_1^{(1)}x_1^{(2)}+x_2^{(1)}x_2^{(2)}\right].$$

Используя неравенство $\left(x_1^{(i)}\right)^2+\left(x_2^{(i)}\right)^2\le 1,\ \ i=1,2$ (так как $x^{(i)}\in U$) и $2x_i^{(1)}x_i^{(2)}\le\left(x_i^{(1)}\right)^2+\left(x_i^{(2)}\right)^2$, получим

$x_1^2+x_2^2\le\alpha^2+(1-\alpha)^2+2\alpha(1-\alpha)=1$, т.е. $x\in U$.

Выпуклость множества U ясна и из рис. 8. Так как U – круг, то отрезок, соединяющий любые две точки $x^{(1)}$, $x^{(2)}\in U$, целиком лежит в U.

Проверка условия (2.1) в большинстве случаев требует громоздких выкладок, поэтому на практике при исследовании выпуклости множеств в пространствах $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}_3$ часто используют геометрические иллюстрации, подобные рис.8.

Определение 7. Функция *f(x),* заданная на выпуклом множестве $U \subset \mathcal{E}_n$, называется *выпуклой* на этом множестве, если для любых точек $x^{(1)}$, $x^{(2)} \in U$ и произвольного числа $\alpha \in [0;1]$ справедливо неравенство

$$f\left[\alpha x^{(1)} + (1-\alpha) x^{(2)}\right] \le \alpha f\left(x^{(1)}\right) + (1-\alpha) f\left(x^{(2)}\right) . \qquad (2.2)$$

На практике обычно используют следующий критерий выпуклости функции:

Если f(x) – *дважды дифференцируемая на выпуклом множестве* $U \subset \mathcal{E}_n$ *функция и матрица ее вторых производных* $f''(x) = \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ (*гессиан*) *положительно определена при всех* $x \in U$ *, то функция f(x) является выпуклой на множестве* U .

Применяя критерий Сильвестра к матрице вторых производных, можно сформулировать это утверждение в более удобном для проверки виде:

Если все угловые миноры матрицы $f''(x)$ *положительны при* $x \in U$ *, то функция f(x) выпукла на множестве* U .

Пример 11. Выяснить, является ли функция $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + \sin(x_1 + x_2)$ выпуклой в пространстве $\mathcal{E}_2$.

Решение. Запишем матрицу вторых производных

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \sin(x_1 + x_2) & -\sin(x_1 + x_2) \\ -\sin(x_1 + x_2) & 2 - \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}.$$

Найдя угловые миноры этой матрицы

$$\Delta_1 = 4 - \sin(x_1 + x_2)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 - \sin(x_1 + x_2) & -\sin(x_1 + x_2) \\ -\sin(x_1 + x_2) & 2 - \sin(x_1 + x_2) \end{vmatrix} = 8 - 6\sin(x_1 + x_2) .$$

Убеждаемся, что $\Delta_i > 0$, $i = 1, 2$, при всех $x \in \mathcal{E}_2$, т.е. функция *f(x)* выпукла.

Замечание. Выпуклые функции играют большую роль во многих вопросах оптимизации в связи с тем, что всякий локальный минимум выпуклой функции является одновременно и глобальным.

Задачи для самостоятельного решения:

Выяснить, является ли функция $f(x)$ выпуклой (вогнутой) в пространстве $\mathcal{E}_n$.

1. $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + \sin(x_1 + x_2)$
2. $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$
3. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - \cos\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)$
4. $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$
5. $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
6. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^6 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 10x_1 + 5x_2 - 3x_4 - 20$
7. $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^3 - x_2^3 - x_3^3 + 10x_1 - x_2 + 15x_3 + 6$
8. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + \dfrac{1}{2}x_3^2 + x_1x_2 - x_3 + 10$
9. $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^4 + x_2^6 + x_3^2 - 13x_1 + 7x_3 - 8$

Во многих задачах оптимизации рассматриваются *квадратичные функции*, т. е. функции вида $f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j + \sum_{j=1}^{n} r_jx_j$. Если положить $q_{ij} = c_{ij} + c_{ji}$, то получим симметрическую матрицу $Q = (q_{ij})$, с помощью которой можно представить квадратичную функцию в виде

$$f(x) = \frac{1}{2}(Qx, x) + (r, x), \tag{2.3}$$

где $x=\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)^T$, $r=\left(r_1,r_2,\dots,r_n\right)^T$ – векторы–столбцы, $\left(x,y\right)$ – скалярное произведение векторов $x,y\in\mathcal{E}_n$.

Градиент и матрица вторых производных функции (2.3) равны $grad\ f\left(x\right)=f'\left(x\right)=Qx+r$, $f''\left(x\right)=Q=\left(q_{ij}\right)$.

Таким образом, для того чтобы функция (2.3) была выпуклой в $\mathcal{E}_n$, достаточно чтобы матрицы Q была положительно определена.

Пример 12. Пусть

$f\left(x\right)=2x_1^2-2x_1x_2+3x_1x_3+x_2^2-2x_2x_3+4x_3^2+x_1+2x_2+3x_3$.

а) Найти матрицу Q и вектор r в представлении (2.3) функции *f(x).*

б) Найти градиент $f'\left(x\right)$.

в) Выяснить, является ли функция *f(x)* выпуклой.

Решение. а) В данном случае $c_{11}=2$, $c_{12}=-2$, $c_{13}=3$, $c_{22}=1$, $c_{23}=-2$, $c_{33}=4$, $r_1=1$, $r_2=2$, $r_3=3$ поэтому

$$Q=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ -2 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 8\end{pmatrix},\quad r=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

б) Используя матрицу Q и вектор r, запишем

$$f'\left(x\right)=Qx+r=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ -2 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x_1-2x_2+3x_3+1\\ -2x_1+2x_2-2x_3+2\\ 3x_1-2x_2+8x_3+3\end{pmatrix}$$

.

в) Найдем угловые миноры Δ_i матрицы $f''\left(x\right)=Q$:

$$\Delta_1=4,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}=4,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}4 & -2 & 3\\ -2 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 8\end{vmatrix}=22.$$

Так как Δ_i, $i=1,2,3$, то функция *f(x)* выпукла в $\mathcal{E}_3$.

2. Методы основанные на вычислении первых производных функции

Постановка задачи минимизации функции n переменных $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ на множестве $U\subset\mathcal{E}_n$ не отличается от постановки в одномерном случае. Если $U=\mathcal{E}_n$, то говорят о *безусловной минимизации функции f(x).*

Для решения задачи безусловной минимизации функции *f(x)* наиболее часто применяют приближенные методы, в основе которых лежит вычисление производных *f(x)* первого порядка. Такие методы обычно называют *градиентными.* В ряде других методов требуется вычисления не только первых, но и вторых производных функции *f(x).*

Метод градиентного спуска. Пусть f(x) – выпуклая дифференцируемая во всем пространстве $\mathcal{E}_n$ функция и требуется найти ее точку минимума x^*. Выбрав произвольное начальное приближение $x^{(0)}\in\mathcal{E}_n$, построим последовательность

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\alpha_k f'\left(x^{(k)}\right),\ k=0,1,\ldots, \tag{2.4}$$

где величины α_k (параметрические шаги) выбираются достаточно малыми для того, что бы выполнялось условие

$$f\left(x^{(k+1)}\right)<f\left(x^{(k)}\right),\ k=0,1,\ldots. \tag{2.5}$$

В качестве условия окончания вычислений обычно используется близость к нулю градиента $f'\left(x^{(k)}\right)$, т.е. выполнение неравенств $\left|\dfrac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right|\le\varepsilon$, $i=1,2,\ldots,n$, или

$$\left\|f'\left(x^{(k)}\right)\right\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right|^2}\le\varepsilon \tag{2.6}$$

(ε - заданное достаточно малое число), после чего полагают $x^*\approx x^{(k)}$, $f^*\approx f\left(x^{(k)}\right)$.

Если при некотором k условие (2.5) нарушается, то шаг α_k в (2.4) уменьшают (дробят) в данное число раз до выполнения неравенства (2.5) и продолжают вычисления.

Пример 13. Минимизировать в $\mathcal{E}_2$ функцию $f\left(x\right)= f\left(x_1,x_2\right)= x_1^2+2x_2^2+e^{x_1+x_2}$ методом градиентного спуска, завершив вычисления при $\left|\dfrac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right|\le 0,05$, $i=1,2$

Решение. Выбрав начальное приближение $x^{(0)}=\left(0,0\right)$ и на $\alpha_0=1$, построим последовательность (2.4), записывая результаты вычислений в таблице 7

Таблица 7.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f\left(x^{(k)}\right)$	$\dfrac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_1}$	$\dfrac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_2}$	α_k	Примечание
0	0 -1	0 -1	1 3,145	1 -	1 -	1	Условие (5) нарушено. Уменьшаем a_0 в два раза
	0 -0,5	0 -0,5	1 1,118	1 -	1 -	0,5	Условие (5) нарушено. Уменьшаем a_0 в два раза
1	0 -0,25	0 -0,25	1 0,794	1 0,106	1 -0,393	0,25 0,25	Условие (5) выполнено
2	-0,2766326	-0,1516326	0,774	0,0983	0,0451	0,25	Условие (5) выполнено
3	-0,3012259	-0,1629096	0,772	0,0262	-0,023	-	Точность достигнута

Итак, $x^*\approx\left(-0,301;-0,163\right)$, $f^*\approx 0,772$.

Для квадратичной функции (2.3) формула (2.4) принимает вид

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \left(Qx^{(k)} + r \right), \quad k = 0,1,\ldots \qquad (2.7)$$

Метод наискорейшего спуска отличается от метода градиентного спуска способом определения величины α_k, которая находится из условия

$$\Phi_k\left(\alpha_k\right) = \min_{\alpha>0} \Phi_k\left(\alpha\right), \text{ где } \Phi_k\left(\alpha\right) = f\left[x^{(k)} - \alpha f'\left(x^{(k)}\right)\right] \quad (2.8)$$

Такой выбор a_k обеспечивает максимально возможное уменьшение функции *f(x)* вдоль направления ее антиградиента $-f'\left(x^{(k)}\right)$ в точке $x^{(k)}$.

Таким образом, для определения a_k на каждом шаге метода наискорейшего спуска решается одномерная задача минимизации (2.8), для чего можно использовать методы, рассмотренные в §1.

Пример 14. Решить пример методом наискорейшего спуска.

Решение. Шаг 1. Положим $x^{(0)} = (0,0)$, тогда $f'\left(x^{(0)}\right) = (1;1)$, $\Phi_0(\alpha) = f\left[0 - \alpha \times 1, \quad 0 - \alpha \times 1\right] = 3\alpha^2 + e^{-2\alpha}$. Для нахождения точки минимума функции $\Phi_0(\alpha)$ используем метод перебора:

α	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26
$\Phi_0(\alpha)$	0,7949	0,7903	0,7892	0,7916	0,7973

т.е. $\alpha = \alpha_0 = 0,22$, откуда

$$x^{(1)} = (0,0) - 0,22 \times (1;1) = (-0,22, -0,22).$$

Шаг 2. $f'\left(x^{(1)}\right) = (0,204; -0,236)$,

$$\Phi_1(\alpha) = (-0,22 - 0,204\alpha)^2 + (-0,22 + 0,236\alpha)^2 + e^{0,44+0,032\alpha}.$$

Минимизируем $\Phi_1(\alpha)$:

α	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36
$\Phi_1(\alpha)$	0,77401	0,77384	0,77380	0,77387	0,77408

т.е. $\alpha = \alpha_1 = 0,32$, откуда

$$x^{(2)} = (-0,22, -0,22) - 0,32 \times (0,204; -0,236) = (-0,2853, -0,1445)$$
.

Шаг 3. $f'\left(x^{(2)}\right) = (8,007; 7,268) \times 10^{-2}$,

$$\Phi_2(\alpha) = \left(-0,2853 - 8,007 \times 10^{-2}\right)^2 +$$
$$\left(-0,1445 - 7,268 \times 10^{-2}\alpha\right)^2 + e^{-0,429 - 15,275 \times 10^{-2}}.$$

Минимизируем $\Phi_2(\alpha)$:

α	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28
$\Phi_2(\alpha)$	0,77273	0,77241	0,77240	0,77241	0,77244

т. е. $\alpha = \alpha_2 = 0,24$, $x^{(3)} = (-0,3045, -0,1619)$, $f'\left(x^{(3)}\right) = (1,821; -2,051) \times 10^{-2}$, поэтому требуемая точность достигнута и $x^* \approx x^{(3)} = (-0,3045, -0,1619)$, $f^* \approx f\left(x^{(3)}\right) = 0,772$.

Если *f(x)* – квадратичная функция (16), то величина α_k может быть найдена в явном виде

$$\alpha_k = \frac{\left(f'\left(x^{(k)}\right), f'\left(x^{(k)}\right)\right)}{\left(Qf'\left(x^{(k)}\right), f'\left(x^{(k)}\right)\right)},$$

где $f'\left(x^{(k)}\right) = Qx^{(k)} + r$. (2.9)

Таким образом, для квадратичной функции метод наискорейшего спуска состоит в построении последовательности $\left\{x^{(k)}\right\}$ по формулам (2.7), (2.9).

Метод сопряженных направлений состоит в построении последовательных приближений $x^{(k)}$ к точке минимума функции *f(x)* следующим образом:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k p^{(k)},\ k = 0,1,\ldots,\ x^{(0)} \subset \mathcal{E}_n \qquad (2.10)$$

где $x^{(0)}$ – заранее выбранное начальное приближение, шаг α_k выбирается аналогично (8):

$$\Phi_k\left(\alpha_k\right)=\min_{\alpha>0}\Phi_k\left(\alpha\right),$$

где $\Phi_k\left(\alpha\right)=f\left[x^{(k)}-\alpha_k p^{(k)}\right],$ (2.11)

а направление спуска $-p^{(k)}$ определяется по формуле $p^{(k)}=f'\left(x^{(k)}\right)+\beta_k p^{(k-1)},\ k=0,1,\ldots,\quad p^{(0)}=f'\left(x^{(0)}\right)$, где

$$\beta_k=\frac{\left\|f'\left(x^{(k)}\right)\right\|^2}{\left\|f'\left(x^{(k-1)}\right)\right\|^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f\left(x^{(k-1)}\right)}{\partial x_i}\right)^2}\ . \tag{2.12}$$

Таким образом, метод сопряженных направлений отличается от метода наискорейшего спуска только выбором направления уменьшения функции на каждом шаге ($-p^{(k)}$ вместо $-f'\left(x^{(k)}\right)$). Отметим что $p^{(k)}$ из (2.12) определяется не только антиградиентом $-f'\left(x^{(k)}\right)$, но и направлением спуска $-p^{(k-1)}$ на предыдущем шаге. Это позволяет более полно, чем в градиентных методах, рассмотренных выше, учитывать особенности функции *f(x)* при построении последовательных приближений (2.10) к ее точке минимума.

Критерием достижения заданной точности вычислений метода сопряженных направлений обычно служат неравенства (2.6). Часто для уменьшения влияния накаливающихся погрешностей вычислений через каждые N итераций (10) полагают $\beta_{mN}=0$, $m=1,2,\ldots,$ т.е. производят обновления метода (N – параметр алгоритма).

Для минимизации выпуклой квадратичной функции в ε_n требуется не более n итераций метода сопряженных направлений.

Пример 15. Методом сопряженных направлений найти точку минимума x^* функции $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2$.

Решение. *f(x)* – квадратичная функция, заданная в $\mathcal{E}_2$. Поэтому точка x^* будет найдена после двух шагов метода сопряженных градиентов,

Шаг 1. Выбрав начальное приближение $x^{(0)} = (0,0)$, по формулам (2.9) – (2.11) находим

$p^{(0)} = f'\left(x^{(0)}\right) = \left(2x_1 + x_2 - 7, \quad x_1 + 4x_2 - 7\right)\Big|_{x^{(0)}} = (-7, -7)$,

$\Phi_0(\alpha) = 98\left(2\alpha^2 - \alpha\right)$. Из условия $\Phi_0'(\alpha_0) = 0$ минимума $\Phi_0(\alpha)$ получим $\alpha_0 = \frac{1}{4}$. Отсюда $x^{(1)} = (0,0) - \frac{1}{4}(-7,-7) = \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right)$.

Шаг 2. $f'\left(x^{(1)}\right) = \left(-\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right)$, откуда имеем $\beta_1 = \frac{1}{16}$,

$p^{(1)} = \left(-\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right) + \frac{1}{16}(-7,-7) = \left(-\frac{35}{16}, \frac{21}{16}\right)$.

Поэтому $\Phi_1(\alpha) = \frac{49}{32}\left(\frac{7}{2}\alpha^2 - 4\alpha - 392\right)$ и $\alpha_1 = \frac{4}{7}$. Окончательно

$x^{(2)} = \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right) - \frac{4}{7}\left(-\frac{35}{16}, \frac{21}{16}\right) = (3,1) = x^*$.

Задачи для самостоятельного решения:

Совершить один шаг градиентного спуска из точки $x^{(0)}$ с шагом α_0 и сравнить значения $f\left(x^{(0)}\right)$ и $f\left(x^{(1)}\right)$:

1. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1 + x_2}$, $x^{(0)} = (1,1)$,

1.1. $\alpha_0 = 0,1$

1.2. $\alpha_0 = 0,265$

1.3. $\alpha_0 = 0,5$

2. $f(x) = x_1^4 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3$, $x^{(0)} = (0,1,0)$,

2.1. $\alpha_0 = 0{,}1$

2.2. $\alpha_0 = 0{,}638$

2.3. $\alpha_0 = 10$

Для функции $f\left(x\right)$ найти величину шага α_0 метода наискорейшего спуска из точки $x^{(0)}$

3. $f\left(x\right) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2,\ x^{(0)} = \left(1,1\right),$
4. $f\left(x\right) = e^{x_1^2} + \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2,\ x^{(0)} = \left(1,1,1\right).$

Минимизировать квадратичные функции, методом наискорейшего спуска, заканчивая вычисления при

$$\left|\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right| \le 0,01, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

5. $f\left(x\right) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2$
6. $f\left(x\right) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2$
7. $f\left(x\right) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 17x_2^2 + 5x_2$
8. $f\left(x\right) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2$
9. $f\left(x\right) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 17x_1$

10.. $f\left(x\right) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - 3x_2$

11.. $f\left(x\right) = 10x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + 10x_2$

12. $f\left(x\right) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2 + x_1 - x_2$
13. $f\left(x\right) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 7x_3^3 + x_1 - 3x_2$
14. $f\left(x\right) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 + 5x_1 + x_2$

Минимизировать функции f(x), методом сопряженных направлений, заканчивая вычисления при

$$\left|\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right| \le 0,01, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

15. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1^2 + x_2^2} - x_1 + x_2$

16. $f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$

17. $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2)$

18. $f(x) = x_1^4 + x_2^4 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2} - 2x_1 + 3x_2$

19. $f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + x_1$

20. $f(x) = \ln\left[1 + 3x_1^2 + 5x_2^2 + \cos(x_1 - x_2)\right]$

21. $f(x) = x_1^2 + e^{x_1^2 + x_2^2} + 4x_1 + 3x_2$

22. $f(x) = 4\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + x_1 + 2x_2$

3. Методы, использующие вторые производные функции

Если при построении последовательности приближений к точке минимума функции *f(x)* использовать информацию, содержащуюся в значениях на только первых, но и вторых производных *f(x),* то при определенных условиях можно обеспечить более быструю, чем в градиентных методах, сходимость этой последовательности.

Метод Ньютона применяется для безусловной минимизации выпуклых дважды дифференцируемых функций. В этом методе последовательные приближения $x^{(k)}$ к точке минимума функции *f(x)* строятся с использованием первых и вторых производных следующим образом:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[f''\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1} f'\left(x^{(k)}\right),\ k = 0,1,\ldots, \tag{2.13}$$

где $x^{(0)} \in \mathcal{E}_n$ – начальное приближение, $\left[f''\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1}$ – матрица, обратная матрице вторых производных функции *f(x)* в точке $x^{(k)}$. Критерием достижения требуемой точности вычислений обычно служат неравенства (2.6).

Если начальное приближение $x^{(0)}$ достаточно близко к точке минимума x^*, то метод Ньютона сходится, как правило, гораздо быстрее методов минимизации, использующих первые производные $f(x)$, поэтому часто используют на завершающем этапе минимизации при уточнении приближения к точке x^*, найденного другим, более простым методом.

Пример 16. Используя решение примера 14 в качестве начального приближения метода Ньютона, найти точку минимума функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + e^{x_1+x_2}$ с точностью $\left|\dfrac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right| \le 10^{-5}$, $i = 1,2$.

Решение. Используя результаты решения примера 13, запишем

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} -0,3012259 \\ -0,1629096 \end{pmatrix},\ f'\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 2,622655 \\ -2,296005 \end{pmatrix} \times 10^{-2}.$$

$$f''\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 0,39319151 & 0,62867835 \\ 0,62867835 & 0,22329787 \end{pmatrix}.$$

Найдем

$$\left[f''\left(x^{(0)}\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} -0,39319151 & -5,3404226 \times 10^{-2} \\ -5,3404226 \times 10^{-2} & 0,22329787 \end{pmatrix},$$ откуда

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -0,3012259 \\ -0,1629096 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,39319151 & -5,3404226\times10^{-2} \\ -5,3404226\times10^{-2} & 0,22329787 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 2,622655 \\ -2,296005 \end{pmatrix} \times 10^{-2} = \begin{pmatrix} -0,3127641 \\ -0,1563821 \end{pmatrix}$$

Вычислив $f'\left(x^{(1)}\right) = \left(7,9\times10^{-6}, 7,9\times10^{-6}\right)$, убеждаемся, что условие точности выполнено, т. е.

$x^* \approx x^{(1)} = (-0,3127641, -0,1563821)$.

Модифицированный метод Ньютона обеспечивает более устойчивую сходимость последовательности приближений к точке минимума, чем метод Ньютона.

Если начальное приближение $x^{(0)}$ выбрано недостаточно близким к точке минимума x^*, то даже для выпуклой функции *f(x)* последовательность (2.13) может не сходиться к x^*. Этот недостаток метода Ньютона будет устранен, если последовательность приближений $\left\{x^{(k)}\right\}$ строить по модифицированной формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \left[f''\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1} f'\left(x^{(k)}\right), \quad k = 0,1,\ldots, \qquad (2.14)$$

где α_k находиться подобно (2.8) и (2.11): $\Phi_k(\alpha_k) = \min\limits_{\alpha>0} \Phi_k(\alpha)$, $\Phi_k(\alpha) = f\left\{x^{(k)} - \alpha\left[f''\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1} f'\left(x^{(k)}\right)\right\}$.

Кроме того, для последовательности (2.14) всегда выполняется неравенство $f\left(x^{(k+1)}\right) \le f\left(x^{(k)}\right)$, $k = 0,1,\ldots$, которое может нарушаться в случае (2.10).

Задачи для самостоятельного решения:

Минимизировать квадратичные функции, методом Ньютона с помощью одной итерации. Сравните с результатом полученный методом наискорейшего спуска:

1. $f(x) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2$

2. $f\left(x\right)=3x_1^2-3x_1x_2+4x_2^2-2x_1+x_2$

3. $f\left(x\right)=x_1^2+4x_1x_2+17x_2^2+5x_2$

4. $f\left(x\right)=5x_1^2-4x_1x_2+5x_2^2-x_1-x_2$

5. $f\left(x\right)=4x_1^2+4x_1x_2+6x_2^2-17x_1$

6. . $f\left(x\right)=2x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2+x_1-3x_2$

7. . $f\left(x\right)=10x_1^2+3x_1x_2+x_2^2+x_1+10x_2$

8. $f\left(x\right)=x_1^2-2x_1x_2+6x_2^2+x_1-x_2$

9. $f\left(x\right)=4x_1^2+2x_1x_2-x_1x_3+5x_2^2-2x_2x_3+7x_3^3+x_1-3x_2$

10. $f\left(x\right)=5x_1^2+3x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+x_1x_3+2x_2x_3+5x_1+x_2$

11. Составить блок-схему алгоритма метода Ньютона

12. Составить блок-схему алгоритма модифицированного метода Ньютона.

Решить задачи градиентным методом и методом Ньютона. Выбрать следующие значения для точности $\varepsilon: 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-8}$. Для каждого из методов подсчитайте количества итераций, потребовавшееся для достижения требуемой точности. Для метода Ньютона выяснить, как меняется длина шага вдоль направления спуска от итерации к итерации:

13. $f\left(x\right)=\left(x_1^2+x_2-11\right)^2+\left(x_1+x_2^2-7\right)^2\to\min$

14. $$f\left(x\right)=\left(x_1^2+12x_2-1\right)^2+$$
$$+\left(49x_1^2+49x_2^2+84x_1+2324x_2-681\right)^2\to\min$$

15. $f\left(x\right)=e^{x_1^2-x_2^2}\left(2x_1^2+3x_2^2\right)\to\min$

16. $f\left(x\right)=100\left[x_2-\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2\right]^2+\left(1-x_1\right)^2+\left(1-x_2\right)^2\to\min$

17. $f\left(x\right)=100\left(x_2-x_1^2\right)^2+\left(1-x_1\right)^2\to\min$

§3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

1. Задачи с ограничениями в виде равенств.

Рассмотрим задачу минимизации:

$$f\left(X\right) = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \to \min, x \in \mathbb{R}^n$$

при ограничениях $g_i\left(X\right) = 0, i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}$. Точка в n-мерном евклидовом пространстве с координатами x_1, $x_2, \ldots x_n$ обозначается вектором столбцом $\boldsymbol{X}$.

Ограничения можно использовать для того, чтобы выразить m переменных через остальные $(n\text{-}m)$ переменных, которые можно рассматривать как независимые переменные. В точке минимума при ограничений $f\left(X + h\right) - f\left(X\right) \geq 0$ для всех h, удовлетворяющих условию $f\left(X + h\right) = g_i\left(X\right) = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}$.

Тогда с точностью до первого порядка h_j будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0,$$

где

$$\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = 0 \text{ при } i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}$$

Это условие можно записать иначе:

$$\sum_{j=1}^{n} h_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_j}{\partial x_j} \right) = 0, \qquad (3.1)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$-множители Лагранжа.

Поскольку $h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots, h_n$ являются независимыми приращениями, коэффициенты при них должны быть равны нулю, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = 0 \text{ при } j = m+1, \ldots, n.$$

Приращения $h_1, h_2, \ldots, h_m$ не являются независимыми, и их можно положить равными нулю выбором множителей Лагранжа в уравнении (3.1). Таким образом, мы выбираем множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ такими, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = 0 \text{ при } j = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}.$$

Тогда окончательно будем иметь

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = 0 \text{ при } j = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}.$$

Следовательно, если определить функцию Лагранжа в виде

$F(\mathrm{X};\lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda g_1(X)$, то необходимые условия минимума функции *f(X)* при наличии можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad \text{при } j = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = g_i(X) = 0 \text{ при } i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}. \tag{3.3}$$

Отметим, что для допустимых значений X (таких, которые удовлетворяют ограничениям) справедливо соотношение

$$F(\mathrm{X},\lambda)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X)=f(\mathrm{X}).$$

В точке минимума при наличии ограничений на значение X^* можно записать, что $f\left(X^*+h\right)-f\left(X^*\right)\geq 0$, где h удовлетворяет уравнению $g_i\left(X^*+h\right)=0$ для всех *i*.

Таким образом,

$$F\left(X^*+h\right)-F\left(X^*\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}h_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_i\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}h_j+\ldots\geq 0,$$

где производные вычислены в точке X^* при $\lambda=\lambda^*$.

С учетом уравнения (3.2) получим для всех h, удовлетворяющих ограничениям, что

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_i\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}h_j\geq 0.$$

Достаточными условиями минимума при наличии ограничений являются уравнения (3.2) и (3.3), а также положительно определенность квадратичной формы $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_i\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}h_j$ для значений *h*, удовлетворяющих ограничениям.

Замечание. Не всегда просто привести квадратичную форму к виду, пригодному для использования.

Пример 17. Проверьте, что точка (2; 2) является минимумом функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ при ограничении $x_1 + x_2 = 4$.

Решение: Для $F(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(4 - x_1 - x_2)$ были получены результаты $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ при $x_1 = x_2 = 2$ и $\lambda = 4$.

Матрица Гессе функции F имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и, следовательно, положительно определена, а это доказывает, что точка (2; 2) является точкой минимума.

2. Задачи с ограничениями в виде неравенств

В этом разделе метод множителей Лагранжа будет распространен на ограничения в виде неравенств. Рассмотрим общую задачу математического программирования :

минимизировать функцию $f(x)$

при наличии m ограничений $g_i(X) \le b_i \ (i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m})$.

В настоящее время нет метода, гарантирующего существование решения любой подобной задачи. Ограничения в виде неравенств могут быть преобразованы в ограничения в виде равенств добавления к каждому из них неотрицательной ослабляющей переменной u_i^2 (отметим, что переменная u_i^2 всегда положительна): $g_i(X) + u_i^2 = b_i$ или $g_i(X) + u_i^2 - b_i = 0$.

Таким образом, задача сводится к минимизации функции $f(x)$ при наличии m ограничений в виде равенства $g_i(X) + u_i^2 - b_i = 0$. Сформулируем функцию Лагранжа

$$F(\mathrm{X}, \lambda, u) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[g_i(X) + u_i^2 - b_i \right]. \tag{3.4}$$

Необходимыми условиями, которые должны выполняться в стационарной точке, являются следующие:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \text{ при } j = 1, 2, \ldots, \mathrm{n} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = g_i(X) + u_i^2 - b = 0 \text{ при } i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = 2\lambda_i u_i = 0 \text{ при } i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m} \tag{3.7}$$

Умножив последнее уравнение на $u_i/2$, получим $\lambda_i u_i^2 = 0$, т.е.

$$\lambda_i \left[b_i - g_i(X) \right] = 0 \text{ при } i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}. \tag{3.8}$$

Уравнения (3.5), (3.6) и (3.8) являются необходимыми условиями минимума в точке X^* при наличии ограничений. Уравнение (3.6) является повторной записью ограничений $g_i(X) \le b_i$. Уравнение (3.8) означает, что либо $\lambda_i = 0$, либо $b_i - g_i(X^*) = 0$. Если $\lambda_i \ne 0$, то $b_i = g_i(X^*)$ и ограничения являются *активными* и представляют собой ограничения в виде равенства. С другой стороны, если ограничение является ограничением в виде строгого неравенства $g_i(X^*) < b_i$, то соответствующий множитель Лагранжа $\lambda_i = 0$. В самом деле, если $g_i(X^*) < b_i$, то рассматривается минимум, удовлетворяющий ограничению, которое является неактивным, и которым можно пренебречь, а соответствующие множители $\lambda_i = 0$.

Есть также дополнительное условие, которое должно быть выполнено в точке минимума при наличии ограничений, а именно $\lambda_i \geq 0$.

Предположим, что уравнения (3.5), (3.6) и (3.8) справедливы в точке $\left(X^*, \lambda^*, u^*\right)$. Если фактический минимум функции при наличии ограничений $z = f\left(X^*\right)$, то можно рассматривать **z** как функцию от b_i и изменения b_i будут изменять ограничения и таким образом изменять саму функцию **z.** Покажем, что

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} = -\lambda_i^*$$

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial b_i},$$

где частные производные вычисляются в точке X^*.

Поскольку $g_k\left(X\right) + u_k^2 = b_k$, то

$$\frac{\partial g_k}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial b_i} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases}.$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial b_i} = \frac{\partial z}{\partial b_i} + \lambda_i^* = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial b_i}.$$

Но это выражение равно нулю в соответствии с уравнением (3.5). Таким образом, $\frac{\partial z}{\partial b_i} = -\lambda_i^*$.

С возрастанием b_i область ограничений расширяется, что не может привести к увеличению значения **z**-минимума функции *f(x),* находящегося внутри области ограничений, а может лишь уменьшить его. Таким образом

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} \le 0, \text{ т.е. } \lambda_i^* \ge 0.$$

Необходимые условия минимума функции *f(x)* при наличии ограничений $g_i\left(X\right) \le b_i \quad \left(i = 1, 2, \dots, m\right)$ имеют такой вид, что можно найти X и λ, для которых

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad \text{при} \quad j = 1, \dots, n \\ g_i\left(X\right) \le b_i \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, \mathrm{m} \\ \lambda_i\left[g_i\left(X\right) - b_i\right] \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, \mathrm{m} \\ \lambda_i^* \ge 0 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, \mathrm{m} \end{cases}$$

Знак λ_i меняется на противоположный, если рассматривается максимум. Эти условия известны как *условия Куна-Такера*.

Пример 18. Написать условия Куна-Такера для минимума функции $f\left(x\right) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ при ограничениях $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ и $x_1 + x_2 \ge 4$.

Решение. Эту задачу можно представить следующим образом: минимизировать функцию $f\left(x\right) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ при ограничениях $-x_1 \le 0$, $-x_2 \le 0$ и $-x_1 - x_2 \le 4$. Функция Лагранжа *F(X, u, λ)* будет иметь вид

$$F = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + \lambda_1\left(u_1^2 - x_1\right) + \lambda_2\left(u_2^2 - x_2\right) + \\ + \lambda_3\left(u_3^2 - x_1 - x_2 + 4\right).$$

Необходимым условием минимума является:

$$6x_1 + 4x_2 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0$$

$$4x_1 + 10x_2 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 x_1 = 0,\ \lambda_2 x_2 = 0,\ \lambda_3\left(4 - x_1 - x_2\right) = 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0.$$

Нетрудно проверить, что эти условия выполняются при $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 22$ и функция имеет минимум, равный 44 в точке *A* с координатами (3; 1).

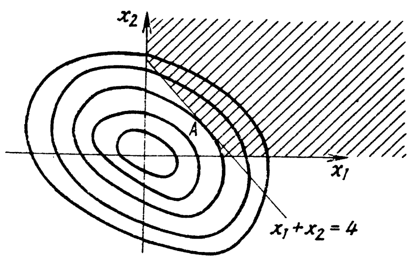


Рисунок 9

Линиями постоянного уровня функции *f(x)* являются эллипсы $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = c$.

Минимум функции *f(x)* при отсутствии ограничений равен нулю и находится в начале координат. Область ограничений показана теневым контуром на рис. 9, иллюстрирующем настоящую задачу.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Минимизировать функцию $f(x)=x_1^2+x_2^2$ при ограничениях $2x_1+x_2-2=0$.

2. Минимизировать функцию $f(x)=x_1+x_2$ при ограничениях $x_1^2+x_2^2=1$.

3. С помощью метода множителей Лагранжа решите следующую задачу: минимизировать $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$, при ограничениях $x_1+2x_2+3x_3=7$, $2x_1+2x_2+x_3=9/2$.

4. Примените метод множителей Лагранжа для нахождения точек глобального максимума функции $f(x)=x_2-x_1^2$ при ограничениях $x_1^2+x_2^2=1$. На знаки x_1 и x_2 ограничения не наложено.

5. Найти кратчайшее расстояние от точки (1, 0) до параболы $y^2=4x$:

a. путем исключения переменной y;

b. с помощью метода множителей Лагранжа.

Объясните, почему процедура (b) в отличие от процедуры (a) приводит к получению решения задачи.

6. Найдите условия Куна-Таккера и таким образом решите задачу

a. минимизировать функцию $f(x)=x_1^2+x_2$ при ограничениях $x_1-1\geq 0$, $x_1+x_2=5$, $x_1^2+x_2^2\leq 26$;

b. минимизировать функцию $f(x)=x_1^2+6x_1x_2-4x_1-2x_2$, при ограничениях $x_1^2-2x_2\le 1,\ 2x_1-2x_2\le 1$;

7. Дана следующая задача:

минимизировать $f(x)=(x_1-3)^2+(x_2+4)^2+e^{5x_3}$

при ограничениях $x_1+x_2+x_3\le 1,\ x_1,x_2,x_3\ge 0$.

a. запишите условия Куна-Таккера для этой задачи;

b. покажите, что выполнение условий Куна-Таккера оказывается достаточным условием для существования оптимального решения данной задачи;

c. используя результаты (a) и (b), докажите, что x=(1, 0, 0) есть точка оптимума.

§4. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. Постановки задач линейного программирования.

Определение 8. Задача минимизации функции n переменных $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ на некотором множестве $U\in\mathcal{E}_n$, не совпадающем со всем пространством $\mathcal{E}_n$ и заданном с помощью ограничений (равенств и (или) неравенств) на координаты x_j точки $x\in\mathcal{E}_n$, называется задачей *математического программирования.* При этом функцию $f(x)$ называют *целевой функцией*, а множество U – *доступным множеством.*

Частным случаем задачи математического программирования является *задача линейного программирования,* состоящая в минимизации линейной целевой функции $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$ на множестве

$U \in \mathcal{E}_n$, заданной системой линейных ограничений (равенств и (или) неравенств) на координаты x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Задача линейного программирования формулируется следующим образом:

Среди точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{E}_n$, *удовлетворяющих ограничениям*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \ell; \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \ell + 1, \ldots, \mathrm{m}; \tag{4.2}$$

$$x_j \ge 0,$$

найти те, в которых функция $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ *принимает минимальное значение, и определить это значение.*

Отметим, что в условии задачи линейного программирования могут содержаться неравенства и противоположного, чем в (4.2), знака, однако такие неравенства легко сводятся к виду (4.2) умножением на -1.

Определение 9. Если в условии задачи линейного программирования не содержится ограничения-неравенства (4.2), т.е. в (4.1) *l* = *m*, то она называется *задачей линейного программирования в каноническом виде.*

Вводя дополнительные переменные $x_{n+i} \ge 0$, $i = \ell + 1, \ldots, \mathrm{m}$, ограничения-неравенства (4.2) можно записать в виде равенств $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$, $i = \ell + 1, \ldots, \mathrm{m}$.

Таким образом, любая задача линейного программирования может быть записана в каноническом виде

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{4.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}, \tag{4.4}$$

$$x_j \geq 0. \tag{4.5}$$

Часто используется *векторная запись* задачи (4.3) – (4.5):

$$f(x) = (c, x) \to \min,$$

$$Ax = b \tag{4.6}$$

$$x \geq 0,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор неизвестных, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – вектор коэффициентов целевой функции из (4.3), $A = (a_{ij})$ – прямоугольная матрица размера $m \times n$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ – вектор правых частей системы (4.4) а $x \geq 0$ – краткая запись условия не отрицательности (4.5).

Математические модели многих важных для практики задач оптимизации представляют собой задачи линейного программирования.

Пример 19. Составить математическое описание следующей задачи об оптимальном составе сплава и представить полученную задачу линейного программирования в каноническом виде.

Для приготовления b_0 кг сплава с заданными свойствами используют вещества A_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. В x кг вещества. A_j содержится $a_{ij}x$ кг химического элемента B_i, $i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}$. Содержание элемента B_i в сплаве должно заключаться в пределах от β_i до b_i кг. Стоимость 1 кг вещества A_j составляет c_j руб. Требуется определить такой состав для приготовления сплава, при котором общая стоимость израсходованных веществ минимальна.

Решение. Обозначим x_j количество кг вещества A_j, используемое для приготовления сплава (очевидно $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$). Тогда содержание элемента B_i в сплаве составит

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ кг, а стоимость израсходованных веществ будет равна $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ руб.

Символ $f(x) \to \min$ в записи условия задачи математического программирования используется вместо слов «*минимизировать функцию f(x)*». Далее указываются ограничения, определяющие допустимое множество.

Поэтому, с учетом ограничений на содержание элементов B_i в сплаве, для величин x_j получим неравенства: $\beta_i \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, $i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}$. Кроме того, количество сплава должно составлять b_0 кг, поэтому $\sum_{j=1}^{n} x_j = b_0$.

Таким образом, математическое описание задачи об оптимальном составе сплава принимает вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \tag{4.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge \beta_i, \; i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m} \tag{4.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = b_0, \tag{4.9}$$

$$x_j \ge 0, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Запишем эту задачу линейного программирования в каноническом виде.

Среди ограничений (4.7) – (4.9) на переменных x_j содержится *2m* неравенств (4.7), (4.8). Для преобразования их в ограничения-равенства введем *2m* дополнительных неотрицательных переменных x_{n+i} и x_{n+m+i}, $i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}$.

Прибавив переменные x_{n+i} к левым частям соответствующих неравенств (4.7) и вычтя переменные x_{n+m+i} из левых частей неравенства (4.8), получим задачу линейного программирования в каноническом виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+m+i} = \beta_i , \ i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_j = b_0$$

$$x_j \geq 0 , \ j = 1, 2, \ldots, n .$$

Определение 10. Общей задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции.

$$f\left(x\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4.10}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i , \quad i = 1, \ldots, \mathrm{k} \tag{4.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i , \ i = k+1, \ldots, \mathrm{m} \tag{4.12}$$

$$x_j \geq 0 , \ j = 1, \ldots \ell, \ell + 1, \ldots, n \tag{4.13}$$

где a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины и $k \leq m$.

Определение 11. Функция (4.10) называется *целевой функцией* (или *линейной формой)* задачи (4.10)–(4.13), а условия (4.11)–(4.13) – *ограничениями* данной задачи.

*Определение 12***.** *Стандартной* (или *симметричной) задачей* линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (4.10) при выполнении условий (4.11) и (4.13), где $k = m$ и $l = n$.

*Определение 13***.** *Канонической* (или *основной) задачей* линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (4.10) при выполнении условий (4.12) и (4.13), где $k = 0$ и $l = n$.

*Определение 14***.** Совокупность чисел $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{E}_n$, удовлетворяющих ограничениям задачи (4.11)–(4.13), называется *допустимым решением* (или *планом*).

Определение 15. План $X^* = \left(x_1^*, x_n^*, \ldots, x_n^*\right)$, при котором целевая функция задачи (4.10) принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется *оптимальным.*

Значение целевой функции (4.10) при плане X будем обозначать через $F(X)$. Следовательно, X^* – оптимальный план задачи, если для любого X выполняется неравенство $F(X) \le F\left(X^*\right)$ [соответственно $F(X) \ge F\left(X^*\right)$].

Указанные выше три формы задачи линейного программирования эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть переписана в форме другой задачи. Это означает, что если имеется способ нахождения решения одной из указанных задач, то тем самым может быть определен оптимальный план любой из трех задач.

Чтобы перейти от одной формы записи задачи линейного программирования к другой, нужно уметь:

во-первых, сводить задачу минимизации функции к задаче максимизации:

Решение В том случае, когда требуется найти минимум функции $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, можно перейти к нахождению максимума функции $F_1 = -F = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n$, поскольку $\min F = -\max(-F)$;

во-вторых, переходить от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам и наоборот:

Решение. Ограничение-неравенство исходной задачи линейного программирования, имеющее вид "$\le$", можно преобразовать в ограничение-равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а ограничение-неравенство вида "$\ge$" – в ограничение-равенство вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной. Таким образом, ограничение-неравенство

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$$

преобразуется в ограничение-равенство

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \quad x_{n+1} \ge 0, \qquad (4.14)$$

а ограничение-неравенство

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1$$

– в ограничение-равенство

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \quad x_{n+1} \ge 0. \qquad (4.15)$$

Число вводимых дополнительных неотрицательных переменных при преобразовании ограничений-неравенств в ограничения-равенства равно числу преобразуемых неравенств;

в-третьих, заменять переменные, которые не подчинены условию неотрицательности.

Решение. Если переменная x_k не подчинена условию неотрицательности, то ее следует заменить двумя неотрицательными переменными u_k и v_k, приняв $x_k = u_k - v_k$

*Пример 20***.** Записать в форме основной задачи линейного программирования следующую задачу: найти максимум функции

$$F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \quad (*)$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 6 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$

*Решение***.** В данной задаче требуется найти максимум функции, а система ограничений содержит четыре неравенства. Следовательно, чтобы записать ее в форме основной задачи, нужно перейти от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Так как число неравенств, входящих в систему ограничений задачи, равно четырем, то этот переход может быть осуществлен введением четырех дополнительных неотрицательных переменных. При этом к левым частям каждого из неравенств вида "$\le$" соответствующая дополнительная переменная прибавляется, а из левых частей каждого из неравенств вида "$\ge$" вычитается. В результате ограничения принимают вид уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8 \end{cases} \qquad (**)$$

$x_1, \ldots, x_9 \ge 0$

Следовательно, данная задача может быть записана в форме основной задачи таким образом: максимизировать функцию (*) при условиях (**)

*Пример 21***.** Записать в форме стандартной задачи линейного программирования следующую задачу: найти максимум функции $F = 6{,}5x_1 - 7{,}5x_3 + 23{,}5x_4 - 5x_5$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12 \\ 2x_1 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 6 \end{cases}$$

$x_1, \ldots, x_5 \ge 0$.

Решение. Методом последовательного исключения неизвестных сведем данную задачу к следующей: найти максимум функции $F = 6,5x_1 - 7,5x_3 + 23,5x_4 - 5x_5$ при условиях

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 26 \\ x_1 + x_3 + 11x_4 = 20 \end{cases}$$

$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$.

Последняя задача записана в форме основной для задачи, состоящей в нахождении максимального значения функции $F = x_3 + 2x_4$ при условиях

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \leq 6 \\ 3x_3 + 10x_4 \leq 26 \\ x_3 + 11x_4 \leq 20 \end{cases}$$

$x_3, x_4 \geq 0$.

Целевая функция задачи преобразована с помощью подстановки вместо x_1 и x_5 их значений в соответствии с уравнениями системы ограничений задачи.

Задачи для самостоятельного решения

Преобразовать следующие задачи линейного программирования в каноническую форму

$z = 4x_1 + 2x_2 \to \min$

1. $$\begin{cases} 3x_1 = 0 \\ x_1 + 4x_2 \geq 7 \\ 3x_1 - 3x_2 \geq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 5 \end{cases}$$

$x_1 \leq 0, \quad x_2 \leq 0$

$z = 2x_1 - 2x_2 \to \min$

2. $\begin{cases} -4x_1 = 5 \\ -2x_1 + x_2 \ge 8 \\ 2x_1 - 4x_2 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

$F = x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 \to \min$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \ge 2 \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_4 \ge 0.$

Преобразовать следующие задачи линейного программирования в стандартную форму

$F = -x_1 - 3x_4 + 4x_5 \to \max$

4. $\begin{cases} 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 8 \\ x_1 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0$

$F = -4x_1 - 4x_2 - 4x_4 \to \max$

5. $\begin{cases} 4x_2 - 2x_3 = 5 \\ -2x_2 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0$

$F = x_1 + 4x_2 + 4x_4 \to \min$

6. . $\begin{cases} -2x_1 + x_3 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_2 + x_4 - 3x_5 = 5 \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0$

$$F = 4x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 \to \min$$

7. $$\begin{cases} -x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

2. Свойства основной задачи линейного программирования. Геометрическое истолкование задачи линейного программирования

Рассмотрим основную задачу линейного программирования. Она состоит в определении максимального значения функции

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \ldots, \mathrm{m}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n$$

Перепишем эту задачу в векторной форме: найти максимум функции

$$F = CX \tag{4.16}$$

при условиях

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n = P_0 \tag{4.17}$$

$$X \geq 0, \tag{4.18}$$

где $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, CX – скалярное произведение; $P_1, \ldots, P_n$ и P_0 – m-мерные вектор-столбцы, составленные из коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы уравнений задачи:

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \ldots; P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение 16. План $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *опорным планом* основной задачи линейного программирования, если система векторов P_j, входящих в разложение (4.19) с положительными коэффициентами x_j, линейно независима.

Так как векторы P_j являются m-мерными, то из определения опорного плана следует, что число его положительных компонент не может быть больше, чем *m.*

Определение 17. Опорный план называется *невырожденным,* если он содержит ровно *m* положительных компонент, в противном случае он называется *вырожденным.*

Свойства основной задачи линейного программирования (4.16) – (4.18) тесным образом связаны со свойствами выпуклых множеств.

Определение 18. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – произвольные точки евклидова пространства ε_n. *Выпуклой линейной комбинацией* этих точек называется сумма $a_1\bar{X}_1 + a_2\bar{X}_2 + \ldots a_n\bar{X}_n$, где a_i – произвольные неотрицательные числа, сумма которых равна 1: $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1,\, a_i \geq 0, \left(i = \overline{1,n}\right)$.

Определение 19. Множество называется *выпуклым,* если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

Определение 20. Точка *X* выпуклого множества называется *угловой,* если она не может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации каких-нибудь двух других различных точек данного множества.

Теорема 1. Множество планов основной задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто).

Определение 21. Непустое множество планов основной задачи линейного программирования называется *многогранником решений,* а всякая угловая точка многогранника решений – *вершиной.*

Теорема 2. Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция задачи принимает в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Теорема 3. Если система векторов $P_1, P_2, \ldots, P_k \ (k \le n)$ в разложении (4.17) линейно независима и такова, что $x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_nP_n = P_0$ где все $x_j \ge 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ является вершиной многогранника решений.

Теорема 4. Если $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$– вершина многогранника решений, то векторы P_j, соответствующие положительным x_j в разложении (4.17), линейно независимы.

Сформулированные теоремы позволяют сделать следующие выводы.

Непустое множество планов основной задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник. Каждая вершина этого многогранника определяет опорный план. В одной из вершин многогранника решений (т. е. для одного из опорных планов) значение целевой функции является максимальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов). Если максимальное значение функция принимает более чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин.

3. Графический метод решения

Вершину многогранника решений, в которой целевая функция принимает максимальное значение, найти сравнительно просто, если задача, записанная в стандартной форме, содержит не более двух переменных или задача, записанная в форме основной, содержит не более двух свободных переменных, т. е. $n - r \le 2$, где n – число переменных, r – ранг матрицы, составленной из коэффициентов в системе ограничений задачи.

Найдем решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (4.19)$$

при условиях

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \quad \left(i = \overline{1, k}\right) \qquad (4.20)$$

$$x_j \ge 0,\ j=1,\ 2 \qquad (4.21)$$

Каждое из неравенств (4.20), (4.21) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $\left(i = \overline{1, k}\right)$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. В том случае, если система неравенств (4.20), (4.21) совместна, область ее решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям. Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей – выпуклое, то областью допустимых решений задачи (4.19) – (4.21) является выпуклое множество, которое называется *многоугольником решений* (введенный ранее термин "многогранник решений" обычно употребляется, если $n \ge 3$). Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки точных равенств.

Таким образом, исходная задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция F принимает максимальное значение. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение. Для определения данной вершины построим линию уровня $a_1x_1 + a_2x_2 = h$ (где h – некоторая постоянная), проходящую через многоугольник решений, и будем передвигать ее в направлении вектора $\vec{C} = (c_1; c_2)$ до тех пор, пока она не пройдет через ее последнюю общую точку с многоугольником решений. Координаты указанной точки и определяют оптимальный план данной задачи.

Заканчивая рассмотрение геометрической интерпретации задачи (4.19) – (4.21), отметим, что при нахождении ее решения могут встретиться случаи, изображенные на рис. 10–13. Рис. 10 характеризует такой случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке *A.* Из рис. 11 видно, что максимальное значение целевая функция принимает в любой точке отрезка *AB.* На рис. 12 изображен случай, когда целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых решений, а на рис. 13 – случай, когда система ограничений задачи несовместна.

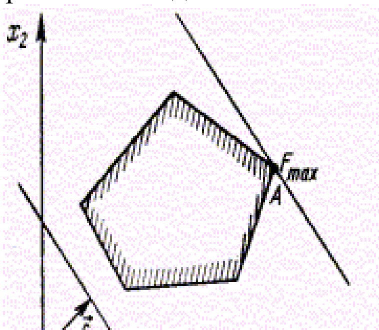


Рисунок 10

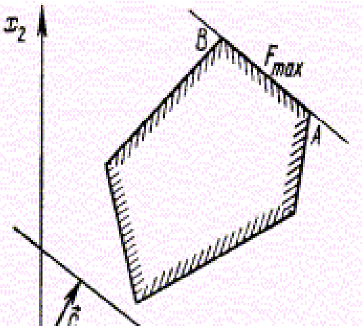


Рисунок 11

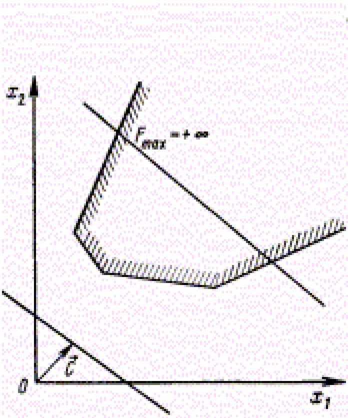


Рисунок 12

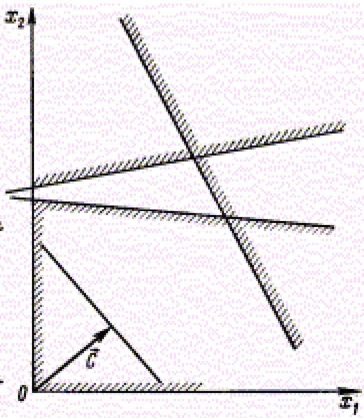


Рисунок 13

Отметим, что нахождение минимального значения линейной функции при данной системе ограничений отличается от нахождения ее максимального значения при тех же ограничениях лишь тем, что линия уровня $a_1x_1 + a_2x_2 = h$ передвигается не в направлении вектора $\vec{C} = (c_1; c_2)$, а в противоположном направлении. Таким образом, отмеченные выше случаи, встречающиеся при нахождении максимального значения целевой функции, имеют место и при определении ее минимального значения.

Итак, нахождение решения задачи линейного программирования (4.19) – (4.21) на основе ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. Строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (4.20) и (4.21) знаков неравенств на знаки точных равенств.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

3. Находят многоугольник решений.

4. Строят вектор $\vec{C} = (c_1; c_2)$.

5. Строят прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, проходящую через многоугольник решений.

6. Передвигают прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ в направлении вектора $\vec{C}$, в результате чего-либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.

7. Определяют координаты точки максимума функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Пример 22. Для производства двух видов изделий *A* и *B* предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в табл. 8. В ней же указаны прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Таблица 8

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие		Общее количество сырья (кг)
	A	B	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	30	40	

Учитывая, что изделия *A* и *B* могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной.

*Решение***.** Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида *A* и x_2 изделий вида *B*. Поскольку производство продукции ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120 \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

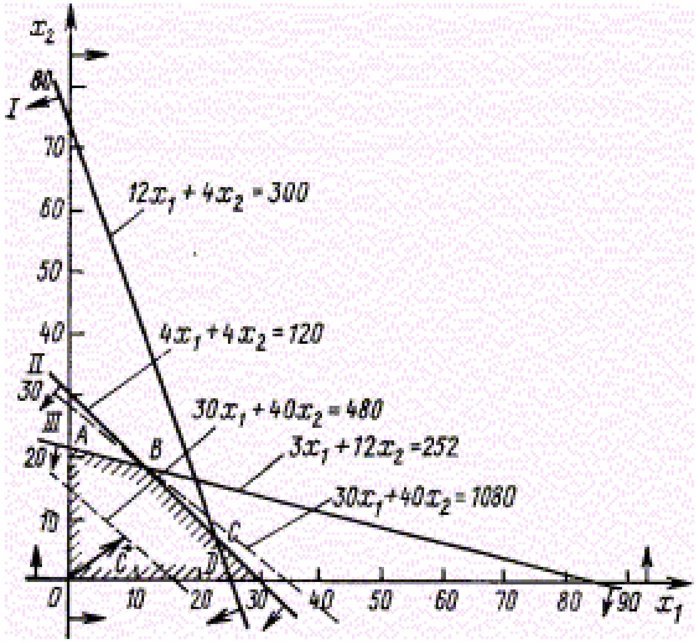
Общая прибыль от реализации x_1 изделий вида A и x_2 изделий вида B составит $F = 30x_1 + 40x_2$

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение.

Найдем решение сформулированной задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Сначала определим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств и найдем соответствующие прямые:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300 & \text{(I)} \\ 4x_1 + 4x_2 = 120 & \text{(II)} \\ 3x_1 + 12x_2 = 252 & \text{(III)} \\ x_1 = 0, & \text{(IV)} \\ x_2 = 0 & \text{(V)} \end{cases}$$

Эти прямые изображены на рис. 14. Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют исходному неравенству, а другой – нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае – другая полуплоскость.



Рисуно 14

Найдем, например, полуплоскость, определяемую неравенством $12x_1 + 4x_2 \le 300$. Для этого, построив прямую $12x_1 + 4x_2 = 300$ (на рис. 14 это прямая I), возьмем какую-нибудь точку, принадлежащую одной из двух полученных полуплоскостей, например точку *O* (0; 0). Координаты этой точки удовлетворяют неравенству $12 \times 0 + 4 \times 0 < 300$, значит полуплоскость, которой принадлежит точка *O* (0; 0), определяется неравенством $12x_1 + 4x_2 \le 300$. Это и показано стрелками на рис. 14.

Пересечение полученных полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи.

Как видно из рис. 14, многоугольником решений является пятиугольник *OABCD*. Координаты любой точки, принадлежащей этому пятиугольнику, удовлетворяют данной системе неравенств и условию неотрицательности переменных.

Поэтому сформулированная задача будет решена, если мы сможем найти точку, принадлежащую пятиугольнику *OABCD*, в которой функция *F* принимает максимальное значение. Чтобы найти указанную точку, построим вектор $\vec{C} = (30;40)$ и прямую $30x_1 + 40x_2 = h$, где h – некоторая постоянная, такая, что прямая $30x_1 + 40x_2 = h$ имеет общие точки с многоугольником решений. Положим, например, h = 480 и построим прямую $30x_1 + 40x_2 = 480$ (рис. 14).

Если теперь взять какую-нибудь точку, принадлежащую построенной прямой и многоугольнику решений, то ее координаты определяют такой план производства изделий *А* и *В*, при котором прибыль от их реализации равна 480 руб. Далее, полагая h равным некоторому числу, большему чем 480, мы будем получать различные параллельные прямые. Если они имеют общие точки с многоугольником решений, то эти точки определяют планы производства изделий *А* и *В*, при которых прибыль от их реализации превзойдет 480 руб.

Перемещая построенную прямую $30x_1 + 40x_2 = 480$ в направлении вектора $\vec{C}$, видим, что последней общей точкой ее с многоугольником решений задачи служит точка *В*. Координаты этой точки и определяют план выпуска изделий *А* и *В*, при котором прибыль от их реализации является максимальной.

Найдем координаты точки *В* как точки пересечения прямых II и III. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120 \\ 3x_1 + 12x_2 = 252 \end{cases}.$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_1^* = 12$, $x_2^* = 18$. Следовательно, если предприятие изготовит 12 изделий вида *А* и 18 изделий вида *В*, то оно получит максимальную прибыль, равную $F_{\max} = 30 \times 12 + 40 \times 18 = 1080$ *руб.*

Задачи для самостоятельного решения:

Решить графическим методом

1. $F = 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$

2. $F = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 2 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

Решить графическим методом, предварительно приведя к стандартному виду:

3. $F = -4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$

4. $F = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0, x_5 \ge 0$

5. $F = -40x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 3x_5$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 55 \\ -17x_1 + 16x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 46 \\ -33x_1 + 26x_2 - 7x_3 + 4x_4 + 8x_5 = 66 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$

4. Симплекс–метод

Решение любой задачи линейного программирования можно найти *симплексным методом*. Прежде чем применять симплекс-метод, следует записать исходную задачу в форме основной задачи линейного программирования, если она не имеет такой формы записи.

Симплексный метод решения задачи линейного программирования основан на переходе от одного опорного плана к другому, при котором значение целевой функции *возрастает* (при условии, что данная задача имеет оптимальный план и каждый ее опорный план является невырожденным). Указанный переход возможен, если известен какой-нибудь исходный опорный план. Рассмотрим задачу, для которой этот план можно непосредственно записать.

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, $\left(j = \overline{1, n}\right)$.

Здесь $a_{ij}, b_j, c_j \left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right)$ – заданные постоянные числа $\left(m < n, b_i > 0\right)$.

Векторная форма данной задачи имеет следующий вид: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (4.1)$$

при условиях

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_mP_m + \ldots + x_nP_n = P_0 \qquad (4.2)$$

$$x_j \geq 0, \ \left(j = \overline{1, n}\right) \qquad (4.3)$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \ldots; P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}; \ldots; P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Так как $b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots + b_mP_m = P_0$, то, по определению опорного плана, $X = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$ является опорным планом данной задачи (последние $n-m$ компоненты вектора X равны нулю). Этот план определяется системой единичных векторов $P_1, P_2, \ldots, P_m$, которые образуют базис m-мерного пространства. Поэтому каждый из векторов $P_1, P_2, \ldots, P_m$, а также вектор P_0, могут быть представлены в виде линейной комбинации векторов данного базиса. Пусть

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i \quad \left(j = \overline{0, n}\right).$$

Положим

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} \quad \left(j = \overline{0, n}\right); \quad \Delta_j = z_j - c_j \quad \left(j = \overline{0, n}\right).$$

Так как векторы $P_1, P_2, \ldots, P_m$ – единичные, то $x_{ij} = a_{ij}$ и

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \text{ а } \Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j.$$

Теорема 5 (признак оптимальности опорного плана). Опорный план $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*, 0, \ldots, 0\right)$ задачи (4.1)–(4.3) является оптимальным, если $\Delta_j \geq 0$ для любого $j \; (j = \overline{1, n})$.

Теорема 6. Если $\Delta_k < 0$ для некоторого j=k и среди чисел a_{ik} $\left(i = \overline{1, m}\right)$ нет положительных $\left(a_{ik} \leq 0\right)$, то целевая функция (4.1) задачи (4.1) – (4.3) не ограничена на множестве ее планов.

Теорема 7. Если опорный план X задачи (4.1)–(4.3) невырожден и $\Delta_k < 0$, но среди чисел a_{ik} есть положительные (не все $a_{ik} \leq 0$), то существует опорный план X' такой, что $F\left(X'\right) > F\left(X\right)$.

Сформулированные теоремы позволяют проверить, является ли найденный опорный план оптимальным, и выявить целесообразность перехода к новому опорному плану.

Исследование опорного плана на оптимальность, а также дальнейший вычислительный процесс удобнее вести, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения исходного опорного плана, записать так, как показано в таблице 9.

В столбце C_b этой таблицы записывают коэффициенты при неизвестных целевой функции, имеющие те же индексы, что и векторы данного базиса.

В столбце P_0 записывают положительные компоненты исходного опорного плана, в нем же в результате вычислений получают положительные компоненты оптимального плана. Столбцы векторов P_j представляют собой коэффициенты разложения этих векторов по векторам данного базиса.

В таблице 9 первые *m* строк определяются исходными данными задачи, а показатели (m+1)-й строки вычисляют. В этой строке в столбце вектора P_0 записывают значение целевой функции, которое она принимает при данном опорном плане, а в столбце вектора P_j – значение $\Delta_j = z_j - c_j$

Значение z_j находится как скалярное произведение вектора P_j $\left(j = \overline{1, m}\right)$ на вектор $C_b = \left(c_1, c_2, \ldots, c_m\right)$: $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$ $\left(j = \overline{1, n}\right)$

Значение F_0 равно скалярному произведению вектора P_0 на вектор C_b: $F_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$.

После заполнения табл. 9 исходный опорный план проверяют на оптимальность. Для этого просматривают элементы (m+1)-й строки таблицы. В результате может иметь место один из следующих трех случаев:

1) $\Delta_j \geq 0$ для $j = m+1, m+2, \ldots, n$ (при $j = \overline{1, m}, z_j = c_j$). Поэтому в данном случае числа $\Delta_j \geq 0$ для всех *j* от 1 до *n*;

2) $\Delta_j < 0$ для некоторого *j*, и все соответствующие этому индексу величины a_{ij} $\left(i = \overline{1, m}\right)$;

3) $\Delta_j < 0$ для некоторых индексов *j*, и для каждого такого *j* , по крайней мере, одно из чисел a_{ik} положительно.

В первом случае на основании признака оптимальности исходный опорный план является оптимальным. Во втором случае целевая функция не ограничена сверху на множестве планов, а в третьем случае можно перейти от исходного плана к новому опорному плану, при котором значение целевой функции увеличится. Этот переход от одного опорного плана к другому осуществляется исключением из исходного базиса какого-нибудь из векторов и введением в него нового вектора. В качестве вектора, вводимого в базис, можно взять любой из векторов P_j , имеющий индекс *j*, для которого $\Delta_j < 0$. Пусть, например, $\Delta_k < 0$ и решено ввести в базис вектор P_k . Для определения вектора, подлежащего исключению из базиса, находят $\min \frac{b_i}{a_{ik}}$ для всех $a_{ik} > 0$. Пусть этот минимум достигается при *i*=*r*. Тогда из базиса исключают вектор P_r , а число a_{rk} называют *разрешающим элементом.*

Столбец и строку, на пересечении которых находится разрешающий элемент, называют *направляющими.*

После выделения направляющей строки и направляющего столбца находят новый опорный план и коэффициенты разложения векторов P_j через векторы нового базиса, соответствующего новому опорному плану. Это легко реализовать, если воспользоваться методом Жордана–Гаусса. При этом можно показать, что положительные компоненты нового опорного плана вычисляются по формулам

$$b_i' = \begin{cases} b_i - \left(\dfrac{b_r}{a_{rk}}\right) a_{ik} \ \textit{при}\ i \neq r \\ \dfrac{b_r}{a_{rk}} \qquad \textit{при}\ i = r \end{cases}, \tag{4.4}$$

а коэффициенты разложения векторов P_j через векторы нового базиса, соответствующего новому опорному плану, по формулам

$$a_{ij}' = \begin{cases} a_{ij} - \left(\dfrac{a_{rj}}{a_{rk}}\right) a_{ik} \ \textit{при}\ i \neq r \\ \dfrac{a_{rj}}{a_{rk}} \qquad \textit{при}\ i = r \end{cases} \tag{4.5}$$

После вычисления b_i' и a_{ij}', согласно формулам (4.4) и (4.5), их значения заносят в табл. 9. Элементы (m+1)-й строки этой таблицы могут быть вычислены либо по формулам

$$F_0' = F_0 - \left(\frac{b_r}{a_{rk}}\right)\Delta_k, \tag{4.6}$$

$$\Delta_j' = \Delta_j - \left(\frac{a_{rj}}{a_{rk}}\right)\Delta_k \tag{4.7}$$

либо на основании их определения.

Таблица 9

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	…	c_r	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	P_r	c_r	b_r	0	0	…	1	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rk}	…	a_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
$m+1$			F_m	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

Таблица 10

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	…	c_r	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b'_1	1	0	…	a'_{1r}	…	0	a'_{1m+1}	…	0	…	a'_{1n}
2	P_2	c_2	b'_2	0	1	…	a'_{2r}	…	0	a'_{2m+1}	…	0	…	a'_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	P_r	c_r	b'_r	0	0	…	a'_{rr}	…	0	a'_{rm+1}	…	1	…	a'_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	c_m	b'_m	0	0	…	a'_{mr}	…	1	a'_{mm+1}	…	0	…	a'_{mn}
$m+1$			F_m	0	0	…	$z'_r - c_r$	…	0	$z'_{m+1} - c_{m+1}$	…	0	…	$z'_n - c_n$

Наличие двух способов нахождения элементов (m+1)-й строки позволяет осуществлять контроль правильности проводимых вычислений.

Из формулы (4.6) следует, что при переходе от одного опорного плана к другому наиболее целесообразно ввести в базис вектор P_j, имеющий индекс *j*, при котором максимальным по абсолютной величине является число $\left(\dfrac{b_r}{a_{rj}}\right)\Delta_j, \left(\Delta_j < 0, a_{rj} > 0\right)$. Однако с целью упрощения вычислительного процесса в дальнейшем будем вектор, вводимый в базис, определять, исходя из максимальной абсолютной величины отрицательных чисел Δ_j. Если же таких чисел несколько, то в базис будем вводить вектор, имеющий такой же индекс, как и максимальное из чисел c_j, определяемых данными числами $\Delta_j \left(\Delta_j < 0\right)$.

Итак, переход от одного опорного плана к другому сводится к переходу от одной симплекс-таблицы к другой. Элементы новой симплекс-таблицы можно вычислить как с помощью рекуррентных формул (4.4)–(4.7), так и по правилам, непосредственно вытекающим из них. Эти правила состоят в следующем.

В столбцах векторов, входящих в базис, на пересечении строк и столбцов одноименных векторов проставляются единицы, а все остальные элементы данных столбцов полагают равными нулю.

Элементы векторов P_0 и P_j в строке новой симплекс-таблицы, в которой записан вектор, вводимый в базис, получают из элементов этой же строки исходной таблицы делением их на величину разрешающего элемента. В столбце C_b в строке вводимого вектора проставляют величину a_k, где k – индекс вводимого вектора.

Остальные элементы столбцов вектора P_0 и P_j новой симплекс-таблицы вычисляют по правилу треугольника. Для вычисления какого-нибудь из этих элементов находят три числа:

1) число, стоящее в исходной симплекс-таблице на месте искомого элемента новой симплекс-таблицы;

2) число, стоящее в исходной симплекс-таблице на пересечении строки, в которой находится искомый элемент новой симплекс-таблицы, и столбца, соответствующего вектору, вводимому в базис;

3) число, стоящее в новой симплекс-таблице на пересечении столбца, в котором стоит искомый элемент, и строки вновь вводимого в базис вектора (как отмечено выше, эта строка получается из строки исходной симплекс-таблицы делением ее элементов на разрешающий элемент).

Эти три числа образуют своеобразный треугольник, две вершины которого соответствуют числам, находящимся в исходной симплекс-таблице, а третья – числу, находящемуся в новой симплекс-таблице. Для определения искомого элемента новой симплекс-таблицы из первого числа вычитают произведение второго и третьего.

После заполнения новой симплекс-таблицы просматривают элементы (m+1)-й строки. Если все $z'_j - c_j \geq 0$, то новый опорный план является оптимальным. Если же среди указанных чисел имеются отрицательные то, используя описанную выше последовательность действий, находят новый опорный план. Этот процесс продолжают до тех пор, пока либо не получают оптимальный план задачи, либо не устанавливают ее неразрешимость.

При нахождении решения задачи линейного программирования мы предполагали, что эта задача имеет опорные планы и каждый такой план является невырожденным. Если же задача имеет вырожденные опорные планы, то на одной из итераций одна или несколько переменных опорного плана могут оказаться равными нулю. Таким образом, при переходе от одного опорного плана к другому значение функции может остаться прежним. Более того, возможен случай, когда функция сохраняет свое значение в течение нескольких итераций, а также возможен возврат к первоначальному базису. В последнем случае обычно говорят, что произошло *зацикливание.* Однако при решении практических задач этот случай встречается очень редко, поэтому мы на нем останавливаться не будем.

Итак, нахождение оптимального плана симплексным методом включает следующие этапы:

1. Находят опорный план.
2. Составляют симплекс-таблицу.
3. Выясняют, имеется ли хотя бы одно отрицательное число Δ_j. Если нет, то найденный опорный план оптимален. Если же среди чисел Δ_j имеются отрицательные, то либо устанавливают

неразрешимость задачи, либо переходят к новому опорному плану.

4. Находят направляющие столбец и строку. Направляющий столбец определяется наибольшим по абсолютной величине отрицательным числом Δ_j, а направляющая строка – минимальным из отношений компонент столбца вектора P_0 к положительным компонентам направляющего столбца.

5. По формулам (4.4) – (4.7) определяют положительные компоненты нового опорного плана, коэффициенты разложения векторов P_j по векторам нового базиса и числа F_0', Δ_j'. Все эти числа записываются в новой симплекс-таблице.

6. Проверяют найденный опорный план на оптимальность. Если план не оптимален и необходимо перейти к новому опорному плану, то возвращаются к этапу 4, а в случае получения оптимального плана или установления неразрешимости процесс решения задачи заканчивают.

Пример 23. Для изготовления различных изделий *A*, *B* и С предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия *A*, *B* и *C*, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в таблице 11.

Таблица 11

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	*B*	*C*	
I II III	18 6 5	15 4 3	12 8 3	360 192 180
Цена одного изделия (руб.)	9	10	16	

Изделия A, B и C могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида.

Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи. Искомый выпуск изделий A обозначим через x_1, изделий B – через x_2, изделий C – через x_3. Поскольку имеются ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида, переменные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180 \end{cases} \tag{4.8}$$

Общая стоимость произведенной предприятием продукции при условии выпуска x_1 изделий A, x_2 изделий B и x_3 изделий C составляет

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \tag{4.9}$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1, x_2, x_3 могут принимать только лишь неотрицательные значения:

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0 \tag{4.10}$$

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений системы неравенств (4.8) требуется найти такое, при котором функция (4.9) принимает максимальное значение.

Запишем эту задачу в форме основной задачи линейного программирования. Для этого перейдем от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Введем три дополнительные переменные, в результате чего ограничения запишутся в виде системы уравнений

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180. \end{cases}$$

Эти дополнительные переменные по экономическому смыслу означают не используемое при данном плане производства количество сырья того или иного вида. Например, x_4 – это неиспользуемое количество сырья I вида.

Преобразованную систему уравнений запишем в векторной форме:

$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0$, где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}; P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; P_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Поскольку среди векторов $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ имеются три единичных вектора, для данной задачи можно непосредственно записать опорный план. Таковым является план X=(0; 0; 0; 360; 192; 180), определяемый системой трехмерных единичных векторов P_4, P_5, P_6, которые образуют базис трехмерного векторного пространства.

Составляем симплексную таблицу для I итерации (табл. 12), подсчитываем значения F_0, $z_j - c_j$ и проверяем исходный опорный план на оптимальность:

$F_0 = (C, P_0) = 0;$ $z_1 = (C, P_1) = 0;$ $z_2 = (C, P_2) = 0;$ $z_3 = (C, P_3) = 0;$

$z_1 - c_1 = 0 - 9 = -9;$ $z_2 - c_2 = 0 - 10 = -10;$ $z_3 - c_3 = -16.$

Для векторов базиса $z_j - c_j = 0$

Таблица 12

				9	10	16	0	0	0
i	Базис	C_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

Как видно из таблицы 12, значения всех основных переменных x_1, x_2, x_3 равны нулю, а дополнительные переменные принимают свои значения в соответствии с ограничениями задачи. Эти значения переменных отвечают такому “плану”, при котором ничего не производится, сырье не используется и значение целевой функции равно нулю (т. е. стоимость произведенной продукции отсутствует). Этот план, конечно, не является оптимальным.

Это видно и из 4-й строки таблицы 12, так как в ней имеется три отрицательных числа: $z_1 - c_1 = -9; z_2 - c_2 = -10; z_3 - c_3 = -16$. Отрицательные числа не только свидетельствуют о возможности увеличения общей стоимости производимой продукции, но и показывают, на сколько увеличится эта сумма при введении в план единицы того или другого вида продукции.

Так, число - 9 означает, что при включении в план производства одного изделия *A* обеспечивается увеличение выпуска продукции на 9 руб. Если включить в план производства по одному изделию *B* и С, то общая стоимость изготовляемой продукции возрастет соответственно на 10 и 16 руб. Поэтому с экономической точки зрения наиболее целесообразным является включение в план производства изделий *C*. Это же необходимо сделать и на основании формального признака симплексного метода, поскольку максимальное по абсолютной величине отрицательное число Δ_j стоит в 4-й строке столбца вектора P_3. Следовательно, в базис введем вектор P_3. определяем вектор, подлежащий исключению из базиса. Для этого находим

$$\Theta_0 = \min\left(\frac{b_i}{a_{i3}}\right) \text{ для } a_{i3} > 0 \text{, т.е.}$$

$$\Theta_0 = \min\left(\frac{360}{12};\quad \frac{192}{8};\quad \frac{180}{3}\right) = \frac{192}{8}.$$

Найдя число $\frac{192}{8} = 24$, мы тем самым с экономической точки зрения определили, какое количество изделий *C* предприятие может изготовлять с учетом норм расхода и имеющихся объемов сырья каждого вида. Так как сырья данного вида соответственно имеется 360, 192 и 180 кг, а на одно изделие *C* требуется затратить сырья каждого вида соответственно 12, 8 и 3 кг, то максимальное число изделий *C*, которое может быть изготовлено предприятием, равно $\min\left(\frac{360}{12};\quad \frac{192}{8};\quad \frac{180}{3}\right)=\frac{192}{8}=24$, т. е. ограничивающим фактором для производства изделий *C* является имеющийся объем сырья II вида. С учетом его наличия предприятие может изготовить 24 изделия *C*. При этом сырье II вида будет полностью использовано.

Следовательно, вектор P_5 подлежит исключению из базиса. Столбец вектора P_3 к 2-я строка являются направляющими. Составляем таблицу для II итерации (таблица 13).

Таблица 13

				9	10	16	0	0	0
i	Базис	C_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1 2 3 4	P_4 P_3 P_6	0 16 0	72 24 108 384	9 3/4 11/4 3	9 1/2 3/2 -2	0 1 0 0	1 0 0 0	-3/2 1/8 -3/8 2	0 0 1 0

Сначала заполняем строку вектора, вновь введенного в базис, т. е. строку, номер которой совпадает с номером направляющей строки. Здесь направляющей является 2-я строка. Элементы этой строки таблицы 7 получаются из соответствующих элементов таблицы 6 делением их на разрешающий элемент (т. е. на 8). При этом в столбце C_b записываем коэффициент $C_3=16$, стоящий в столбце вводимого в базис вектора P_3. Затем заполняем элементы столбцов для векторов, входящих в новый базис. В этих столбцах на пересечении строк и столбцов одноименных векторов проставляем единицы, а все остальные элементы полагаем равными нулю.

Для определения остальных элементов таблицы 13 применяем правило треугольника. Эти элементы могут быть вычислены и непосредственно по рекуррентным формулам.

Вычислим элементы таблицы 13, стоящие в столбце вектора P_0. Первый из них находится в 1-й строке этого столбца. Для его вычисления находим три числа:

1) число, стоящее в таблице 12 на пересечении столбца вектора P_0 и 1-й строки (360);

2) число, стоящее в таблице 12 на пересечении столбца вектора P_3 и 1-й строки (12);

3) число, стоящее в таблице 13 на пересечении столбца вектора P_0 и 2-й строки (24).

Вычитая из первого числа произведение двух других, находим искомый элемент: 360 – 12 x 24 = 72; записываем его в 1-й строке столбца вектора P_0 таблицы 13.

Второй элемент столбца вектора P_0 таблицы 13 был уже вычислен ранее. Для вычисления третьего элемента столбца вектора P_0 также находим три числа. Первое из них (180) находится на пересечении 3-й строки и столбца вектора P_0 таблицы 6, второе (3) – на пересечении 3-й строки и столбца вектора P_3 таблицы 6, третье (24) – на пересечении 2-й строки и столбца вектора P_0 таблицы 13. Итак, указанный элемент есть 180 – 24 x 3=108. Число 108 записываем в 3-й строке столбца вектора P_0 таблицы 13.

Значение F_0 в 4-й строке столбца этого же вектора можно найти двумя способами:

1) по формуле $F_0 = (C, P_0)$, т.е. $F_0 = 0 \times 72 + 16 \times 24 + 0 \times 108 = 384$;

2) по правилу треугольника; в данном случае треугольник образован числами 0, -16, 24. Этот способ приводит к тому же результату: 0 - (-16) x 24=384.

При определении по правилу треугольника элементов столбца вектора P_0 третье число, стоящее в нижней вершине треугольника, все время оставалось неизменным, менялись лишь первые два числа. Учтем это при нахождении элементов столбца вектора *P₁* таблицы 13. Для вычисления указанных элементов первые два числа берем из столбцов векторов P_1 и P_3 таблицы 6, а третье число – из таблицы 13. Это число стоит на пересечении 2-й строки и столбца вектора P_1 последней таблицы. В результате получаем значения искомых элементов: $18-12\times\frac{3}{4}=9$; $5-3\times\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$.

Число z_1-c_1 в 4-й строке столбца вектора P_1 таблицы 13 можно найти двумя способами:

1) по формуле $z_1-c_1=(C,P_1)-c_1$ имеем $0\times9+16\times\frac{3}{4}+0\times\frac{11}{4}-9=3$,

2) по правилу треугольника получим $-9-(-16)\times\frac{3}{4}=3$.

Аналогично находим элементы столбца вектора P_2.

Элементы столбца вектора P_5 вычисляем по правилу треугольника. Однако построенные для определения этих элементов треугольники выглядят иначе.

При вычислении элемента 1-й строки указанного столбца получается треугольник, образованный числами 0,12 и $\frac{1}{8}$. Следовательно, искомый элемент равен $0-12\times\frac{3}{4}=-\frac{3}{2}$. Элемент, стоящий в 3-й строке данного столбца, равен $0-3\times\frac{1}{8}=-\frac{3}{8}$.

По окончании расчета всех элементов таблицы 13 в ней получены новый опорный план и коэффициенты разложения векторов P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6 через базисные векторы P_3,P_4,P_6 и значения Δ'_j и F'_0. Как видно из этой таблицы, новым опорным планом задачи является план X = (0; 0; 24; 72; 0; 108). При данном плане производства изготовляется 24 изделия C и остается неиспользованным 72 кг сырья 1 вида и 108 кг сырья III вида. Стоимость всей производимой при этом плане продукции равна 384 руб. Указанные числа записаны в столбце вектора P_0 таблицы 13. Как видно, данные этого столбца по-прежнему представляют собой параметры рассматриваемой задачи, хотя они претерпели значительные изменения. Изменились данные и других столбцов, а их экономическое содержание стало более сложным. Так, например, возьмем данные столбца вектора P_2. Число 1/2 во 2-й строке этого столбца показывает, на сколько следует уменьшить изготовление изделий C, если запланировать выпуск одного изделия B. Числа 9 и 3/2 в 1-й и 3-й строках вектора P_2 показывают соответственно, сколько потребуется сырья I и II вида при включении в план производства одного изделия B, а число 2 в 4-й строке показывает, что если будет запланирован выпуск одного изделия B, то это обеспечит увеличение выпуска продукции в стоимостном выражении на 2 руб. Иными словами, если включить в план производства продукции одно изделие B, то это потребует уменьшения выпуска изделия C на 1/2 ед. и потребует дополнительных затрат 9 кг сырья I вида и 3/2 кг сырья III вида, а общая стоимость изготовляемой продукции в соответствии с новым оптимальным планом возрастет на 2 руб. Таким образом, числа 9 и 3/2 выступают как бы новыми “нормами” затрат сырья I и III вида на изготовление одного изделия B (как видно из таблицы 12, ранее они были равны 15 и 3), что объясняется уменьшением выпуска изделий C.

Такой же экономический смысл имеют и данные столбца вектора P_1 таблицы13. Несколько иное экономическое содержание имеют числа, записанные в столбце вектора P_5. Число 1/8 во 2-й строке этого столбца, показывает, что увеличение объемов сырья II вида на 1 кг позволило бы увеличить выпуск изделий C на 1/8 ед. Одновременно потребовалось бы дополнительно 3/2 кг сырья I вида и 3/8 кг сырья III вида. Увеличение выпуска изделий C на 1/8 ед. приведет к росту выпуска продукции на 2 руб.

Из изложенного выше экономического содержания данных таблицы 13 следует, что найденный на II итерации план задачи не является оптимальным. Это видно и из 4-й строки таблицы 13, поскольку в столбце вектора P_2 этой строки стоит отрицательное число – 2. Значит, в базис следует ввести вектор P_2, т. е. в новом плане следует предусмотреть выпуск изделий *B*. При определении возможного числа изготовления изделий *B* следует учитывать имеющееся количество сырья каждого вида, а именно: возможный выпуск изделий *B* определяется $\min\left(\frac{b_i'}{a_{i2}'}\right)$ для $\left(a_{i2}' > 0\right)$, т. е. находим $\Theta_0 = \min\left(\frac{72}{9};\quad \frac{24\times2}{1};\quad \frac{108\times2}{3}\right) = 8$.

Следовательно, исключению из базиса подлежит вектор P_4, иными словами, выпуск изделий *B* ограничен имеющимся в распоряжении предприятия сырьем I вида. С учетом имеющихся объемов этого сырья предприятию следует изготовить 8 изделий *B*. Число 9 является разрешающим элементом, а столбец вектора P_2 и 1-я строка таблицы 13 являются направляющими. Составляем таблицу для III итерации (таблица 14).

Таблица 14

				9	10	16	0	0	0
i	Базис	C_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

В таблице 14 сначала заполняем элементы 1-й строки, которая представляет собой строку вновь вводимого в базис вектора P_2. Элементы этой строки получаем из элементов 1-й строки таблицы 13 делением последних на разрешающий элемент (т.е. на 9). При этом в столбце C_b данной строки записываем $C_2 = 10$.

Затем заполняем элементы столбцов векторов базиса и по правилу треугольника вычисляем элементы остальных столбцов. В результате в таблицы 14 получаем новый опорный план X=(0; 8; 20; 0; 0; 96) и коэффициенты разложения векторов $P_j\left(j=\overline{1,6}\right)$ через базисные векторы $\left(j=\overline{1,n}\right)$ и соответствующие значения Δ_j'' и F_0''.

Проверяем, является ли данный опорный план оптимальным или нет. Для этого рассмотрим 4-ю строку таблицы 14. В этой строке среди чисел Δ_j'' нет отрицательных. Это означает, что найденный опорный план является оптимальным и $F_{\max}=400$.

Следовательно, план выпуска продукции, включающий изготовление 8 изделий *B* и 20 изделий *C*, является оптимальным. При данном плане выпуска изделий полностью используется сырье I и II видов и остается неиспользованным 96 кг сырья III вида, а стоимость производимой продукции равна 400 руб.

Оптимальным планом производства продукции не предусматривается изготовление изделий *A*. Введение в план выпуска продукции изделий вида *A* привело бы к уменьшению указанной общей стоимости. Это видно из 4-й строки столбца вектора P_1, где число 5 показывает, что при данном плане включение в него выпуска единицы изделия *A* приводит лишь к уменьшению общей величины стоимости на 5 руб.

Решение данного примера симплексным методом можно было бы проводить, используя лишь одну таблицу (таблицу 15). В этой таблице последовательно записаны одна за другой все три итерации вычислительного процесса.

Таблица 15

				9	10	16	0	0	0
i	Базис	C_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0
1	P_2	0	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

Пример 24. Найти максимум функции $F = 2x_1 - 6x_2 + 5x_5$ при условиях

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \left(j = \overline{1, 6} \right)$$

Решение. Систему уравнений задачи запишем в векторной форме:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}; P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; P_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Так как среди векторов $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ имеется три единичных вектора, то для данной задачи можно непосредственно найти опорный план. Таковым является план X=(0, 0, 20, 24; 0; 18). Составляем симплексную таблицу (таблица 16) и проверяем, является ли данный опорный план оптимальным.

Таблица 16

				2	-6	0	0	5	0
i	Базис	C_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	20	-2	1	1	0	1	0
2	P_4	0	24	-1	-2	0	1	3	0
3	P_6	0	18	3	-1	0	0	-12	1
4			0	-2	6	0	0	-5	0

Как видно из таблицы 16, исходный опорный план не является оптимальным. Поэтому переходим к новому опорному плану. Это можно сделать, так как в столбцах векторов P_1 и P_5, 4-я строка которых содержит отрицательные числа, имеются положительные элементы. Для перехода к новому опорному плану введем в базис вектор P_5 и исключим из базиса вектор P_4. Составляем таблицу II итерации.

Таблица 17

				2	-6	0	0	5	0
i	Базис	C_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	12	-5/3	5/3	1	-1/3	0	0
2	P_5	5	8	-1/3	-2/3	0	1/3	1	0
3	P_6	0	114	-1	-9	0	4	0	1
			40	-11/3	8/3	0	5/3	0	0

Как видно из таблицы 17, новый опорный план задачи не является оптимальным, так как в 4-й строке столбца вектора P_1 стоит отрицательное число -11/3. Поскольку в столбце этого вектора нет положительных элементов, данная задача не имеет оптимального плана.

Задачи для самостоятельного решения:

Решить симплекс-методом сравнивая с решением, полученным графическим способом:

1. $F = 2x_1 - 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases}.$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2. $F = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \le 0 \\ 3x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 - 4 \ge 0 \end{cases}.$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

3. $F = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le -8 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}.$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

4. $F = 2x_1 - x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Решить симплекс-методом

5. $F = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$

$F = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$

6. $\begin{cases} x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1 + 2x_3 \ge 1 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

$F = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

7. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \le 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 1 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

$F = 2x_1 - 13x_2 - 6x_3 \to \max$

8. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le -1 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

$F = -6x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 8x_4 \to \min$

9. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1 - x_2 - x_4 \le -1 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$

$F = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$

10. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 10 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 2 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

11. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \ge 6 \\ -x_1 + x_3 \le 2 \\ -2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \le 8 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$

$$F = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 14x_4 \to \min$$

12. $$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 35 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 30 \\ 3x_2 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 40 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах: учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 319с.

2. *Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Сборник задач по оптимизации (Теория. Примеры. Задачи). – М.: Наука, 1984. – 288с.

3. *Банди Б.* Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Мир, 1988. – 128 с.

4. *Банди Б.* Основы линейного программирования: пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1989. –176 с.

5. *Васильев Ф.П.* Лекции по методам решения экстремальных задач. – М.: изд-во МГУ, 1974. – 374 с.

6. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. - 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

7. *Габасов Р., Кириллова Ф.М*. Методы оптимизации. - 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: изд-во БГУ, 1981. – 350 с.

8. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Методы оптимизации. – Минск: изд-во БГУ, 1975. – 280 с.

9. *Ишмухаметов А.З.* Методы решения задач оптимизации. – М.: МГТУ «МАМИ», 2002. – 80с.

10. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. – М.: Наука, 1975. – 272 с.

11. *Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М.* Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

12. Сборник задач по математике / под ред. А.В. Ефимова. Изд-е второе, переработанное. – М.: Наука, 1990. – 304 с.

13. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частотных производных. Интегральные уравнения: учеб. пособ. / Э.А., Вуколов А.В. Ефимов, В.Н. Земсков и др.; под ред. А.В. Ефимова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 607 с.

14. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 328 с.

15. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.

Керимбеков А., Красниченко Л.С.

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебно-методическое пособие.

Компьютерная верстка *А. С. Шабалиной*

Подписано в печать 30.04.2016
Формат 60×84 1/16. Печать офсетная.
Объем 6,25 п. л. Тираж 100 экз. Заказ 140

Издательство КРСУ
720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44

Отпечатано в типографии КРСУ
720048, г. Бишкек, ул. Горького, 2