МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б.С. Ордобаев, Б.М. Сеитов,
К.О. Кадыралиева, Дж.А. Рыспаев

НАДЕЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ТЕХНОГЕННЫЙ РИСК

Учебное пособие

Допущено Министерством образования и науки
Кыргызской Республики в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений

Бишкек • 2016

УДК 624.046:5
ББК 30.14
Н 17

Рецензенты:
Т.Б. Дуйшеналиев, д-р физ.-мат. наук, профессор,
У.Т. Бегалиев, канд. техн. наук, доцент,
А.М. Токтосопиев, д-р физ.-мат. наук, профессор

Рекомендовано НТС и Ученым советом КРСУ

Ордобаев Б.С. и др.
Н 17 НАДЕЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ТЕХНОГЕННЫЙ РИСК: учебное пособие / Б.С. Ордобаев, Б.М. Сеитов, К.О. Кадыралиева, Дж. А. Рыспаев. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2016. 103 с.

ISBN 978-9967-19-357-4

Рассмотрены основные положения теории надежности технических систем и техногенного риска, элементы физики отказов, структурные схемы надежности технических систем и их расчет. Приведены методологии анализа и оценки техногенного риска.

Предназначено для студентов по направлению «Техносферная безопасность», профиль «Защита в чрезвычайных ситуациях».

Н 2004050000-16 УДК 624.046:5
ББК 30.14

ISBN 978-9967-19-357-4

ВВЕДЕНИЕ

Представленный материал рассчитан на студентов, знакомящихся с вероятностными методами описания и анализа случайных явлений, которые составляют основу математических моделей общетехнического курса «Надежность технических систем».

Применение теории вероятностей в технике. Теория вероятностей необходима при решении многих технических задач. Особенность теории вероятностей состоит в том, что она рассматривает явления, где в той или иной форме присутствует неопределенность. Поэтому существует представление, что вероятностные методы решения практических задач считаются менее предпочтительными, чем «точный» анализ, так как обращаться к этим методам вынуждает якобы отсутствие достаточно полной информации. Кроме того, многие считают теорию вероятностей загадочной областью математической науки. Представленные мнения неверны. Во-первых, вряд ли есть еще хотя бы одна область математики, которая с такой полнотой базируется на столь ограниченном наборе исходных представлений (всего три аксиомы, которые почти очевидны). Во-вторых, догматическое стремление представить физические законы детерминистическими и справедливыми при любых обстоятельствах.

Безусловно, нельзя отрицать закон Ома, однако на микроуровне происходящих процессов он не выполняется – факт, который очевиден любому, кто когда-нибудь подключал резистор большого номинала к входу усилителя с высоким коэффициентом усиления и слышал шумы, появляющиеся в результате этого на выходе. Итак, в лучшем случае, непреложные законы отражают «поведение» природы, так сказать, «в среднем». Во многих ситуациях такое «среднее поведение» достаточно близко к тому, что наблюдается на практике, и имеющимися отклонениями можно пренебречь. В других, не менее важных ситуациях, случайные отклонения могут оказаться значительными, что требует использования аналитических методов, построенных на вероятностных концепциях. Поэтому становится ясным, что так называемое «точное решение» вовсе не всегда является точным и, более того, представляет собой идеализированный частный случай, который на практике почти не встречается. С другой стороны, вероятностный подход – далеко не худшая замена точным методам решения и наиболее полно отражает физическую реальность. Кроме того, он включает в себя результат детерминистического подхода в качестве частного случая. Теперь имеет смысл описать, в общем, типы ситуаций, в которых применение вероятностных методов расчета при решении практических задач скорее является правилом, чем исключением.

Случайные параметры систем. В ряде случаев те или иные параметры системы могут быть неизвестны или изменяться случайным образом. Типичными примерами таких систем являются электроэнергетические сети, нагрузки которых непредсказуемы и варьируются в широких пределах; телефонные системы, число пользователей которых случайным образом меняется во времени; электронные системы, параметры которых носят случайный характер из-за того, что характеристики полупроводниковых приборов устанавливаются диапазоном возможных значений.

Надежность систем. В состав любой технической системы входит большое количество различных элементов, отказ одного или нескольких из них может вызвать выход из строя всей системы. По мере усложнения и повышения стоимости систем на стадии конструирования возникает задача синтеза логических структурных схем надежности и оптимизации безотказности.

Контроль качества и диагностика. Повышение потребительских свойств и конкурентоспособности продукции может быть достигнуто выходным контролем и диагностикой в процессе эксплуатации. Для этого требуются правила проверки отдельных, случайно выбранных элементов, вероятностные методы распознавания дефектов и прогнозирования работоспособности.

Теория информации. Количественная мера информационного содержания различных сообщений: численные и графические данные, технические измерения носят вероятностный характер. Кроме того, пропускная способность каналов связи зависит от случайных шумовых воздействий.

Статистическая динамика. Во многих ситуациях сложные электронные и электромеханические системы помимо полезных и, во многом, случайных входных сигналов (управление, наведение, измерение и т. п.) испытывают случайные нежелательные возмущения. Возникает задача оценки реакции системы как на случайные входные параметры, так и на паразитные возмущения.

Из краткого перечисления ясно, что при решении большого числа технических задач приходится встречаться с неопределенностью, а это делает теорию вероятностей необходимым инструментом.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ НАДЕЖНОСТИ. СОСТАВЛЯЮЩИЕ НАДЕЖНОСТИ

1.1. Количественные показатели безотказности

Наиболее важные показатели надежности невосстанавливаемых объектов – *показатели безотказности*, к которым относятся:

- вероятность безотказной работы;
- плотность распределения отказов;
- интенсивность отказов;
- средняя наработка до отказа.

Показатели надежности представляются в двух формах (определениях):

- статистическая (выборочные оценки);
- вероятностная.

Статистические определения (выборочные оценки) показателей получаются по результатам испытаний на надежность.

Допустим, что в ходе испытаний какого-то числа однотипных объектов получено конечное число интересующего нас параметра – наработки до отказа. Полученные числа представляют собой выборку некоего объема из общей «генеральной совокупности», имеющей неограниченный объем данных о наработке до отказа объекта.

Количественные показатели, определенные для «генеральной совокупности», являются *истинными (вероятностными) показателями,* поскольку объективно характеризуют случайную величину – наработку до отказа.

Показатели, определенные для выборки и позволяющие сделать какие-то выводы о случайной величине, являются *выборочными (статистическими) оценками.* Очевидно, что при достаточно большом числе испытаний (большой выборке) оценки *приближаются* к вероятностным показателям.

Вероятностная форма представления показателей удобна при аналитических расчетах, а статистическая – при экспериментальном исследовании надежности.

Для обозначения статистических оценок будем использовать знак « ˜ » сверху.

Примем следующую *схему испытаний* для оценки надежности. Пусть на испытания поставлено N одинаковых серийных объектов. Условия испытаний идентичны, а испытания каждого из объектов проводятся до его отказа.

Введем следующие обозначения:

$T = \{0, t_1, \dots t_N\} = \{t\}$ – случайная величина наработки объекта до отказа; $N(t)$ – число объектов, работоспособных к моменту наработки t; $n(t)$ – число объектов, отказавших к моменту наработки t; $\Delta n(t, t + \Delta t)$ – число объектов, отказавших в интервале наработки $\Delta[t, t + \Delta t]$; Δt – длительность интервала наработки.

Поскольку в дальнейшем определение выборочных оценок базируется на математических моделях теории вероятностей и математической статистики, то ниже представлены основные (минимально необходимые) сведения из теории вероятностей, так как теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

1.2. Основные понятия теории множеств

Одним из основных понятий является случайное событие. ***Событием*** называется всякий факт (исход), который в результате опыта (испытания) может произойти или не произойти.

Каждому из таких событий можно поставить в соответствие определенное число, называемое его ***вероятностью*** и являющееся мерой возможного совершения этого события.

Теория вероятностей основывается на аксиоматическом подходе и опирается на понятия теории множеств.

Множество – это любая совокупность объектов произвольной природы, каждый из которых называется элементом множества.

Предположим, что производится некоторый опыт (испытание), результат которого заранее неизвестен. Тогда *множество* Ω всех возможных исходов опыта представляет пространство элементарных событий, а каждый его элемент $\alpha \in \Omega$ (отдельный исход опыта) является *элементарным событием.* Любой набор элементарных событий (любое их сочетание) считается *подмножеством* (частью) множества Ω и является *случайным* *событием,* т. е. любое событие *А* – это подмножество множества Ω**:** $\boldsymbol{A \subset \Omega}$**.**

В общем случае, если множество Ω содержит ***n*** элементов, то в нем можно выделить 2^n подмножеств (событий).

Введем ряд определений.

Совместные (несовместные) события – такие события, появление одного из которых не исключает (исключает) возможности появления другого.

Зависимые (независимые) события – такие события, появление одного из которых влияет (не влияет) на появление другого события.

Противоположное событие относительно некоторого выбранного события *А* – событие, состоящее в непоявлении этого выбранного события (обозначается $\bar{A}$).

Полная группа событий – такая совокупность событий, при которой в результате опыта должно произойти хотя бы одно из событий этой совокупности.

1.3. Аксиомы теории вероятностей

Вероятность события *А* обозначается P(A) или P{A}. Вероятность выбирают так, чтобы она удовлетворяла следующим условиям или аксиомам:

$$P(\Omega) = 1;\ P(\varnothing) = 0. \qquad (1.3.1)$$

$$P(\varnothing) \le P(A) \le P(\Omega) \qquad (1.3.2)$$

Если Ai и Aj несовместные события, т. е. Ai $\wedge$ Aj = $\varnothing$, то

$$P(A_i \vee A_j) = P(A_j) + P(A_j) \qquad (1.3.3)$$

где $\vee$ – знак логического сложения событий, $\varnothing$ – пустое множество (отсутствие событий).

Аксиома (1.3.3) обобщается на любое число несовместных событий $\boldsymbol{\{Ai\}^n{}_i=1}$ **:**

$$P\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\} = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (1.3.4)$$

Частотное определение вероятности любого события А:

$$P(A) = \frac{m_A}{n} \quad (1.3.5)$$

представляет отношение числа случаев (m_A), благоприятных появлению события ^ *A*, к общему числу случаев (возможному числу исходов опыта) ***n***. При неограниченном возрастании числа ***n*** наблюдается статистическое упорядочение, когда *частота события А (выборочная оценка)* все меньше изменяется и приближается к постоянному значению – *вероятности события А*.

1.4. Теорема сложения вероятностей

Если A_1, A_2, …, A_n – несовместные события и *A* – сумма этих событий, то вероятность события *A* равна сумме вероятностей событий A_1, A_2, …, A_n:

$$P(A) = P\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\} = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \quad (1.4.1)$$

Поскольку противоположные события *A* и $\bar{A}$ несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad (1.4.2)$$

1.5. Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий A_1 и A_2 равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого, в предположении, что первое событие произошло:

$$P(A_1 \wedge A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1 \mid A_2), \quad (1.5.1)$$

где условная вероятность события A_1 при наступлении события A_2 – вероятность события A_1, вычисленная в предположении, что событие A_2 произошло:

$$P(A_1 \mid A_2) = P(A_1 \cdot A_2) / P(A_2). \quad (1.5.2)$$

Для любого конечного числа событий теорема умножения имеет вид

$$P\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i\} = P(A_1 \mid A_2 \ldots A_n) \cdot P(A_2 \mid A_3 \ldots A_n) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-1} \mid A_n) \cdot P(A_n).. \quad (1.5.3)$$

Если события A_1 и A_2 независимы, то соответствующие условные вероятности

$$P(A_1 \mid A_2) = P(A_1); \quad P(A_2 \mid A_1) = P(A_2),$$

поэтому теорема умножения вероятностей (1.5.8) принимает вид

$$P(A_1 \wedge A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2), \tag{1.5.4}$$

а для конечного числа n независимых событий

$$P\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i\} = \prod_{i=1}^{n} P\{A_i\}. \tag{1.5.5}$$

1.6. Общие понятия надежности технических систем

Объект – техническое изделие определенного целевого назначения, рассматриваемое в периоды проектирования, производства, испытаний и эксплуатации.

Объектами могут быть различные системы и их элементы, в частности: сооружения, установки, технические изделия, устройства, машины, аппараты, приборы и их части, агрегаты и отдельные детали.

Надежность – свойство объекта сохранять способность выполнять заданные функции в течение определенного времени.

Надежность – сложное свойство, включающее, в свою очередь, в зависимости от назначения объекта и условий его эксплуатации такие свойства, как безотказность, долговечность, ремонтопригодность и сохраняемость или сочетание этих свойств объекта. Для конкретных объектов и условий их эксплуатации эти свойства могут иметь различную относительную значимость.

Система – объект, представляющий собой совокупность элементов, взаимодействующих в процессе выполнения определенного круга задач и взаимосвязанных функционально.

Элемент системы – объект, представляющий собой простейшую часть системы, отдельные части которого не представляют самостоятельного интереса в рамках конкретного рассмотрения.

Понятия «система» и «элемент» выражены друг через друга, поскольку одно из них следовало бы принять в качестве исходного, постулировать. Понятия эти относительны: объект, считавшийся системой в одном исследовании, может рассматриваться как элемент, если изучается объект большего масштаба. Кроме того, само деление системы на элементы зависит от характера рассмотрения (функциональные, конструктивные, схемные или оперативные элементы), требуемой точности проводимого исследования, уровня наших представлений, объекта в целом и, наконец, даже от технических и научных наклонностей исследователя.

Безотказность – свойство объекта непрерывно сохранять работоспособность в течение некоторой наработки или в течение некоторого времени.

Ремонтопригодность – свойство объекта, заключающееся в его приспособленности к предупреждению и обнаружению отказов и повреждений, восстановлению работоспособности и исправности в процессе технического обслуживания и ремонта.

Сохраняемость – свойство объекта непрерывно сохранять исправное и работоспособное состояние в течение (и после) хранения и/или транспортирования.

Исправность – состояние объекта, при котором он соответствует всем требованиям, установленным нормативно-технической документацией.

Неисправность – состояние объекта, при котором он не соответствует хотя бы одному из требований, установленных нормативно-технической документацией.

Работоспособность – состояние объекта, при котором он способен выполнять заданные функции, сохраняя значения основных параметров, часть системы, отдельные части которой не представляют самостоятельного интереса в рамках конкретного рассмотрения.

Основные параметры характеризуют функционирование объекта при выполнении поставленных задач и устанавливаются в нормативно-технической документации.

Неработоспособность – состояние объекта, при котором значение хотя бы одного заданного параметра, характеризующего способность выполнять заданные функции, не соответствует требованиям, установленным нормативно-технической документацией. Понятие «исправность» шире, чем понятие «работоспособность». Работоспособный объект, в отличие от исправного, удовлетворяет лишь тем требованиям нормативно-технической документации, которые обеспечивают его нормальное функционирование при выполнении поставленных задач.

Работоспособность и неработоспособность в общем случае могут быть полными или частичными. Полностью работоспособный объект обеспечивает в определенных условиях максимальную эффективность его применения. Эффективность применения в тех же условиях частично работоспособного объекта меньше максимально возможной, но значения ее показателей при этом еще находятся в пределах, установленных для такого функционирования, которое считается нормальным. Частично неработоспособный объект может функционировать, но уровень эффективности при этом ниже допускаемого.

Полностью неработоспособный объект применять по назначению невозможно. Понятия частичной работоспособности и частичной неработоспособности применяют главным образом к «сложным» («большим») системам, для которых характерна возможность нахождения в нескольких состояниях. Эти состояния различаются уровнями эффективности функционирования системы. Работоспособность и неработоспособность некоторых объектов могут быть только полными, т. е. они могут иметь только два состояния.

Работоспособный объект в отличие от исправного обязан удовлетворять лишь тем требованиям нормативной документации, выполнение которых обеспечивает нормальное применение объекта по назначению. При этом он может не удовлетворять, например, эстетическим требованиям, если ухудшение внешнего вида объекта не препятствует его нормальному (эффективному) функционированию.

Очевидно, что работоспособный объект может быть неисправным, однако отклонения от требований нормативной документации при этом не настолько существенны, чтобы нарушалось нормальное функционирование.

Предельное состояние – состояние объекта, при котором его дальнейшее применение по назначению должно быть прекращено из-за неустранимого нарушения требований безопасности или неустранимого отклонения заданных параметров за установленные пределы, недопустимого увеличения эксплуатационных расходов или необходимости проведения капитального ремонта.

Признаки (критерии) предельного состояния устанавливаются нормативно-технической документацией на данный объект.

Невосстанавливаемый объект достигает предельного состояния при возникновении отказа или при достижении заранее установленного предельно допустимого значения срока службы или суммарной наработки. Предельно допустимые значения срока службы и наработки устанавливаются из соображений безопасности эксплуатации в связи с необратимым снижением эффективности использования ниже допустимой или в связи с увеличением интенсивности отказов, закономерным для объектов данного типа после установленного периода эксплуатации.

Для восстанавливаемых объектов переход в предельное состояние определяется наступлением момента, когда дальнейшая эксплуатация невозможна или нецелесообразна вследствие следующих причин:

- становится невозможным поддержание его безопасности, безотказности или эффективности на минимально допустимом уровне;
- в результате изнашивания и/или старения объект пришел в такое состояние, при котором ремонт требует недопустимо больших затрат или не обеспечивает необходимой степени восстановления исправности или ресурса.

Для некоторых восстанавливаемых объектов предельным состоянием считается такое, когда необходимое восстановление исправности может быть осуществлено только с помощью капитального ремонта.

Повреждение – событие, заключающееся в нарушении исправности объекта при сохранении его работоспособности.

Отказ – событие, заключающееся в нарушении работоспособности объекта.

Критерий отказа – отличительный признак или совокупность признаков, согласно которым устанавливается факт возникновения отказа. Признаки (критерии) отказов устанавливаются нормативно-технической документацией на данный объект.

Восстановление – процесс обнаружения и устранения отказа (повреждения) с целью восстановления его работоспособности (исправности).

Восстанавливаемый объект – объект, работоспособность которого в случае возникновения отказа подлежит восстановлению в рассматриваемых условиях.

Невосстанавливаемый объект – объект, работоспособность которого в случае возникновения отказа не подлежит восстановлению в рассматриваемых условиях.

При анализе надежности, особенно при выборе показателей надежности объекта, существенное значение имеет решение, которое должно быть принято в случае отказа объекта

Показатель надежности – техническая характеристика, количественным образом определяющая одно или несколько свойств, составляющих надежность объекта.

Показатель надежности количественно характеризует, в какой степени данному объекту или данной группе объектов присущи определенные свойства, обусловливающие надежность. Показатель надежности может иметь размерность (например, среднее время восстановления) или не иметь ее (например, вероятность безотказной работы).

Наработка – продолжительность или объем работы объекта. Объект может работать непрерывно или с перерывами. Во втором случае учитывается суммарная наработка. Наработка может измеряться в единицах времени, циклах, единицах выработки (гектарах, кубометрах) и других единицах. В процессе эксплуатации или испытаний различают суточную наработку, месячную наработку, наработку до первого отказа, наработку между отказами, заданную наработку и т. д.

Если объект эксплуатируется в различных режимах нагрузки, то, например, наработка в облегченном режиме может быть выделена и учитываться отдельно от наработки при номинальной нагрузке.

Технический ресурс – наработка объекта от начала его эксплуатации до достижения предельного состояния или капитального (среднего) ремонта или от начала эксплуатации после ремонта (среднего или капитального) до следующего ремонта или достижения предельного состояния. (Обычно указывается, какой именно технический ресурс имеется в виду: до среднего, капитального, от капитального до ближайшего среднего ремонта и т. п. Если конкретного указания не содержится, то имеется в виду ресурс от начала эксплуатации до достижения предельного состояния после всех (средних и капитальных) ремонтов, т. е. до списания по техническому состоянию.)

Срок службы – календарная продолжительность эксплуатации объекта от ее начала или возобновления после капитального или среднего ремонта до наступления предельного состояния.

Под эксплуатацией объекта понимается стадия его существования в распоряжении потребителя при условии применения объекта по назначению, что может чередоваться с хранением, транспортированием, техническим обслуживанием и ремонтом, если это осуществляется потребителем.

Срок сохраняемости – календарная продолжительность хранения и/или транспортирования объекта в заданных условиях, в течение и после которой сохраняются значения установленных показателей (в том числе показателей надежности) в заданных пределах. Различают сохранность до применения (в упаковке изготовителя) и в процессе применения.

1.7. Характеристика отказов

Внезапный отказ – отказ, характеризующийся скачкообразным действием, например, наработка в облегченном режиме может быть выделена и учитываться отдельно от наработки при номинальной нагрузке.

Технический ресурс – наработка объекта от начала его эксплуатации до достижения предельного состояния или капитального (среднего) ремонта или от начала эксплуатации после ремонта (среднего или капитального) до следующего ремонта или достижения предельного состояния. (Обычно указывается, какой именно технический ресурс имеется в виду: до среднего, капитального, от капитального до ближайшего среднего ремонта и т. п. Если конкретного указания не содержится, то имеется в виду ресурс от начала эксплуатации до достижения предельного состояния после всех (средних и капитальных) ремонтов, т. е. до списания по техническому состоянию.)

Срок службы – календарная продолжительность эксплуатации объекта от ее начала или возобновления после капитального или среднего ремонта до наступления предельного состояния.

Под эксплуатацией объекта понимается стадия его существования в распоряжении потребителя при условии применения объекта по назначению, что может чередоваться с хранением, транспортированием, техническим обслуживанием и ремонтом, если это осуществляется потребителем.

Срок сохраняемости – календарная продолжительность хранения и/или транспортирования объекта в заданных условиях, в течение и после которой сохраняются значения установленных показателей (в том числе показателей надежности) в заданных пределах. Различают сохранность до применения (в упаковке изготовителя) и в процессе применения.

Постепенный отказ – отказ, характеризующийся постепенным изменением значений одного или нескольких основных параметров объекта.

Независимый отказ элемента – отказ элемента объекта, не обусловленный повреждениями и отказами других элементов объекта.

Зависимый отказ элемента – отказ элемента объекта, обусловленный повреждениями или отказами других элементов объекта.

Полный отказ – отказ, после возникновения которого использование объекта по назначению возможно, но при этом значения одного или нескольких основных параметров находятся вне допустимых пределов, т. е. работоспособность объекта понижена.

Перемежающийся отказ – многократно возникающий и самоустраняющийся отказ одного и того же характера.

Конструкционный отказ – отказ, возникающий вследствие ошибок конструктора (или несовершенства существующих у разработчика методов конструирования).

Производственный отказ – отказ, возникающий вследствие нарушения или несовершенства технологического процесса изготовления объекта или комплектующего изделия.

Эксплуатационный отказ – отказ, возникающий вследствие нарушения установленных правил эксплуатации или вследствие влияния непредусмотренных внешних воздействий.

1.8. Резервирование

Резервирование – метод повышения надежности объекта введением дополнительных элементов и функциональных возможностей сверх минимально необходимых для нормального выполнения объектом заданных функций.

Структурное резервирование – метод повышения надежности объекта, предусматривающий использование избыточных элементов, входящих в физическую структуру объекта.

Временное резервирование – метод повышения надежности объекта, предусматривающий использование избыточного времени, выделенного для выполнения задач.

Информационное резервирование – метод повышения надежности объекта, предусматривающий использование избыточной информации сверх минимально необходимой для выполнения задач.

1.9. Отказности и ремонтопригодности

Отказ – вероятность того, что в пределах заданной наработки отказ объекта не возникнет (при условии работоспособности в начальный момент времени). Для режимов хранения и транспортирования может применяться аналогично определяемый термин «вероятность невозникновения отказа».

Средняя наработка до отказа – математическое ожидание случайной наработки объекта до первого отказа.

Средняя наработка между отказами – математическое ожидание случайной наработки объекта между отказами.

Обычно этот показатель относится к установившемуся процессу эксплуатации. В принципе средняя наработка между отказами объектов, состоящих из стареющих во времени элементов, зависит от номера предыдущего отказа. Однако с ростом номера отказа (т. е. с увеличением длительности эксплуатации) эта величина стремится к некоторой постоянной, или, как говорят, к своему стационарному значению.

Средняя наработка на отказ – отношение наработки восстанавливаемого объекта за некоторый период времени к математическому ожиданию числа отказов в течение этой наработки. Этим термином можно назвать кратко среднюю наработку до отказа и среднюю наработку между отказами, когда оба показателя совпадают. Для совпадения последних необходимо, чтобы после каждого отказа объект восстанавливался до первоначального состояния.

Заданная наработка – наработка, в течение которой объект должен безотказно работать для выполнения своих функций.

Среднее время простоя – математическое ожидание случайного времени вынужденного нерегламентированного пребывания объекта в состоянии неработоспособности.

Среднее время восстановления – математическое ожидание случайной продолжительности восстановления работоспособности (собственно ремонта).

Вероятность восстановления – вероятность того, что фактическая продолжительность восстановления работоспособности объекта не превысит заданной.

Показатель технической эффективности функционирования – мера качества собственно функционирования объекта или целесообразности использования объекта для выполнения заданных функций. Показатель технической эффективности функционирования объекта важен для эксплуатации. В принципе средняя наработка между отказами объектов, состоящих из стареющих во времени элементов, зависит от номера предыдущего отказа. Однако с ростом номера отказа (т. е. с увеличением длительности эксплуатации) эта величина стремится к некоторой постоянной, или, как говорят, к своему стационарному значению.

Показатель технической эффективности функционирования объекта определяется количественно, как математическое ожидание выходного эффекта объекта, т. е. в зависимости от назначения системы принимает конкретное выражение. Часто показатель эффективности функционирования определяется как полная вероятность выполнения объектом задачи с учетом возможного снижения качества его работы из-за возникновения частичных отказов.

Коэффициент сохранения эффективности – показатель, характеризующий влияние степени надежности элементов объекта на техническую эффективность, представляемый в виде отношения показателя технической эффективности функционирования при реальной надежности к максимальному возможному значению этого показателя (т. е. соответствующему состоянию полной работоспособности всех элементов объекта).

Средний коэффициент готовности – усредненное на заданном интервале времени значение нестационарного коэффициента готовности.

Стационарный коэффициент готовности (для краткости просто коэффициент готовности) – вероятность того, что восстанавливаемый объект окажется работоспособным в произвольно выбранный момент объекта определяется количественно, как математическое ожидание выходного эффекта объекта, т. е. в зависимости от назначения системы принимает конкретное выражение. Часто показатель эффективности функционирования определяется как полная вероятность выполнения объектом задачи с учетом возможного снижения качества его работы из-за возникновения частичных отказов.

Коэффициент сохранения эффективности – показатель, характеризующий влияние степени надежности элементов объекта на техническую эффективность, представляемый в виде отношения показателя технической эффективности функционирования при реальной надежности к максимальному возможному значению этого показателя (т. е. соответствующему состоянию полной работоспособности всех элементов объекта).

Авария – событие, заключающееся в переходе объекта с одного уровня работоспособности или относительного уровня функционирования на другой, существенно более низкий, с крупным нарушением режима работы объекта. Авария может привести к частичному или полному разрушению объекта, массовому нарушению питания потребителей, созданию опасных условий для человека и окружающей среды. В условиях оперативного управления или при краткосрочном планировании резерв мощности обеспечивает покрытие небаланса между производством и потреблением, который возникает либо в результате вывода оборудования в ремонт, либо в результате его отказа, либо при случайных и непредвиденных увеличениях потребления.

Ремонтный резерв – часть резерва мощности (производительности) объекта, предназначенная для компенсации потери его мощности производительности), вызванной предупредительным ремонтом.

Оперативный резерв – часть резерва мощности (производительности) объекта, предназначенная для компенсации небаланса между производством и потреблением продукции, вызванного отказами элементов объекта, случайным и непредвиденным увеличением потребления продукции.

Аварийный резерв – часть оперативного резерва объекта, предназначенная для компенсации потери его мощности (производительности), вызванной отказами элементов объекта.

Резерв продукции (запас продукции) – количество накопленной продукции сверх необходимой для компенсации дефицита мощности в течение определенного интервала времени.

Технологический резерв – резерв мощности и/или резерв продукции потребителя, который может быть использован для предотвращения остановки технологического процесса потребителя при нарушении его снабжения.

По своему характеру в первом приближении отказы могут быть разделены на внезапные и постепенные.

Постепенные отказы возникают при постепенном изменении параметров, определяющих качество изделия (в основном в результате при краткосрочном планировании резерв мощности обеспечивает покрытие небаланса между производством и потреблением, который возникает либо в результате вывода оборудования в ремонт, либо в результате его отказа, либо при случайных и непредвиденных увеличениях потребления.

Ремонтный резерв – часть резерва мощности (производительности) объекта, предназначенная для компенсации потери его мощности (производительности), вызванной предупредительным ремонтом.

Оперативный резерв – часть резерва мощности (производительности) объекта, предназначенная для компенсации небаланса между производством и потреблением продукции, вызванного отказами элементов объекта, случайным и непредвиденным увеличением потребления продукции.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

2.1. Вероятностная сущность надежности

Современные инженерные сооружения представляют собой сложные системы, предназначенные для выполнения разнообразных функций. Совокупность свойств, характеризующих полезные функции системы, будем называть качеством [1]. Разработка и создание систем, обладающих все более высокими качествами, составляют основное содержание технического прогресса.

Качество, естественно, должно сохраняться в течение всего времени, установленного для эксплуатации системы. В понятие эксплуатации должно быть включено не только полезное функционирование системы, но и вся совокупность операций над нею, от изготовления до сноса. Качество утрачивается как в процессе функционирования, так и при возведении и транспортировании. Значительную роль играет сохранение качества. Реальная система в той или иной мере отличается от идеализированной, принятой на стадии проектирования. Указанное отличие обусловлено многочисленными технологическими несовершенствами, дефектами материала, некондиционностью комплектующих элементов. Условия эксплуатации реальной системы также могут не соответствовать рассмотренным на стадии проектирования. Поэтому параметры функционирования реальной системы могут оказаться весьма далекими от расчетных значений. Иными словами, уровень качества не будет обеспечен и система окажется недостаточно эффективной.

Понятие утраты качества включает в себя широкий круг явлений, начиная от умеренных отклонений параметров от их расчетных значений до катастрофических разрушений, связанных с потерей несущей способности, сопряженных с материальным ущербом и человеческими жертвами.

Высказанные соображения приводят к введению понятия надежности. Надежностью следует называть способность системы выполнять определенные задачи в определенных условиях эксплуатации. Иначе, надежность – это устойчивость качества системы по отношению ко всем возможным флуктуациям, которые могут появляться в процессе изготовления, возведения, функционирования, транспортировки, хранения и т. п. В зависимости от назначения системы и условий эксплуатации надежность включает такие характеристики, как безотказность, долговечность, ремонтопригодность, сохраняемость или любое сочетание этих свойств.

Обеспечение надежности систем является одной из важнейших проблем современного строительства. Многие сооружения несут весьма ответственные функции в рамках государственных и даже общечеловеческих масштабов. Примером могут служить уникальные сооружения, крупнейшие тепловые, атомные и гидроэнергетические станции, сети крупнейших энергосистем, ракетно-космические и оборонные комплексы.

Содержание теории надежности составляет разработка методов оценки надежности сооружений и создание объектов, обладающих заданными показателями надежности и долговечности.

Одним из основных в теории надежности является понятие отказа. Отказом называют событие, которое состоит в нарушении работоспособности системы. Можно утверждать, что отказ – это частичная или полная утрата качества системы. К понятиям отказа относятся недопустимые отклонения параметров системы от расчетных значений, временные нарушения условий нормальной эксплуатации, полный выход из строя. Понятие отказа по существу адекватно наступлению предельного состояния в механике строительных конструкций и сооружений.

Значительная часть отказов имеет механическую историю. Отказы сооружений и конструкций достаточно разнообразны – обрушение, потеря устойчивости сжатых элементов, хрупкое разрушение и т. п. Многие отказы носят постепенный характер – параметры системы по мере эксплуатации постепенно ухудшаются и, в конце концов, достигают значений, при которых дальнейшая эксплуатация становится невозможной и нецелесообразной. К ним принадлежит накопление остаточных деформаций, механический коррозионный износ, растрескивание и т. п.

Почти все отказы вызваны влиянием случайных факторов, которые заложены в систему при ее возведении и действуют при эксплуатации. Трактовка отказов как случайных событий является исходным пунктом построения теории надежности.

Хорошо известно, что надежность строительных конструкций гарантируется прочностными расчетами, которые определяются соотношениями между внешними воздействиями с одной стороны, а с другой – геометрией элементов конструкций. Эти соотношения представляются неравенствами, ограничивающими область безопасных состояний конструкций. Вместе с тем решается и традиционная задача – преодоление противоречий между прочностью и экономичностью. В детерминистической постановке эта задача не вызывает принципиальных затруднений и обычно определение безопасных и наиболее выгодных соотношений между несущей способностью и стоимостью сооружения представляет собой одну и ту же задачу двойственного математического моделирования.

Проблема резко усложняется, если учитывать случайный характер факторов эксплуатации. Статистической изменчивостью обладают свойства конструкционных материалов, а действующие нагрузки на сооружения представляют собой случайные процессы, развертывающиеся во времени.

Действующие нормы проектирования строительных конструкций учитывают вероятностный характер нагрузок и несущей способности только в части обработки исходных данных. Поэтому метод предельных состояний считается полувероятностным [2], а надежность конструкций при проектировании обеспечивается введением частных коэффициентов запаса – коэффициентов надежности по нагрузкам, материалам, назначению, величины которых, по понятным причинам, не имеют достаточного теоретического и экспериментального обоснования.

На самом деле расчет строительных конструкций, достаточно полно отражающий режим эксплуатации, должен базироваться на теории надежности, вероятностные методы которой позволяют дать объективную оценку пригодности конструкции к нормальной эксплуатации.

Методы теории надежности составляют теоретическую основу для правильной организации сбора и обработки статистических данных, относящихся к воздействиям на сооружения, характеристикам материалов и конструкций, а также других расчетных параметров. Эти методы наиболее правильно отражают случайную природу основных расчетных величин и взаимосвязь между внешними воздействиями и прочностью конструкций.

За меру надежности следует принимать вероятность безотказной работы за заданный срок службы.

Вероятностный подход оправдан тем, что все прочностные, геометрические и деформационные характеристики конструкций, а также воздействия на них представляют собой случайные величины или случайные процессы.

Упоминающиеся выше противоречия между надежностью и экономичностью разрешаются выработкой «целесообразного уровня надежности» [2], по возможности близкому к практически трудноопределимому «оптимальному» уровню. Теперь целью проектирования становится создание строительной конструкции с необходимым целесообразным уровнем надежности, т. е. с определенным заданным риском отказа. Такой уровень надежности должен быть, естественно заложен в нормы проектирования.

Основная область практического применения теории надежности строительных конструкций – методы нормирования правил расчета при проектировании и контроле при изготовлении конструкций.

Современные персональные компьютеры представляют возможность методами вычислительного эксперимента получать значения вероятности отказа с использованием реальных данных – замеры нагрузок, экспериментально полученные значения физических и геометрических параметров конструкций и т. п.

Теория надежности строительных конструкций развивалась достаточно независимо от общей теории надежности. Специфика состоит в том, что при обеспечении надежности строительных конструкций необходимо учитывать совместное действие случайных нагрузок на систему со случайными прочностными характеристиками.

Впервые о статистической природе коэффициента запаса прочности упоминается в [3, 4]. В [4] было принято, что прочность бетона, укладываемая в плотину, подчиняется нормальному закону распределения при детерминированной гидростатической нагрузке. На основании таких предположений была получена формула для обеспечения необходимого запаса прочности, гарантировавшего неразрушаемость с заданной заранее обеспеченностью, достаточно близкой к единице. Работы [3, 4] значительно опередили представления того времени о коэффициенте запаса, как о «коэффициенте незнания».

До появления работ [3, 4] в инженерной практике считалось, что коэффициент запаса является особенным числом. В соответствие этому предполагалось, что точное его соблюдение гарантирует надежность конструкции, а даже незначительное его уменьшение представляет опасность для сооружения. В действительности нормативное значение коэффициента запаса являлось отражением мер предосторожности, обеспечивающих в целом удовлетворительный уровень надежности.

Разработка и внедрение в практику проектирования метода предельных состояний явилось достижением отечественной строительной науки. В основе Еврокодов [5] лежат идеи указанного метода. Процедуры нормирования, основанные на методе предельных состояний, привели к системе коэффициентов надежности, когда в той или иной мере используются статистические данные, а расчет ведется в детерминированной форме.

Укажем, что общие принципиальные вопросы применения вероятностных методов к анализу надежности сооружений получили развитие в цитированных уже работах [1, 2].

Научные разработки определяли уровень нормирования расчетов. Заложенные в системе СНиПов принципы нормирования, регламентирующие правила расчета строительных конструкций на основе метода предельных состояний, развивались в большей степени стихийно. Поэтому отсутствие общей теоретической базы привело к проектированию конструкций с уровнем надежности, который колеблется в широких пределах.

Совершенствование норм на основе теории надежности должно привести к выключению в них указаний по выбору необходимого уровня надежности с учетом оптимизации затрат. Кроме этого должны быть разработаны способы определения проектных параметров конструкций с заданным уровнем надежности.

Ниже предлагается формулировка вероятностной методики нормирования правил расчета, содержащих общие алгоритмы определения расчетных параметров, железобетонных конструкций и правильному пониманию случайной природы основных расчетных величин и взаимосвязи внешних воздействий с прочностью конструкций.

Привлечение вероятностных процедур обосновано принципами моделирования, в рамках которых все прочностные, геометрические и деформационные характеристики конструкций, а также внешние воздействия представляют собой случайные величины или случайные функции.

Естественно предположить наличие причинной связи между уровнем надежности и количеством затрат на создание сооружений. Разумным удовлетворением возникающих противоречий является «целесообразный» уровень надежности, отвечающий весьма расплывчатому «оптимальному» уровню. В соответствии с этим целью проектирования становится создание конструкций с определенным заданным риском отказа. Последнее в нормах проектирования отсутствует. Главная же область практического применения теории надежности строительных объектов – разработка методов нормирования правил расчета при проектировании и контроля при изготовлении конструкций.

Формы несущих конструкций и способы их взаимодействия с окружающей средой весьма разнообразны. Как правило, не удается расчленить конструкцию на элементы, взаимодействующие между собой простым способом. Более того, конструкции следует рассматривать как распределенные системы, а параметры, описывающие их состояние, как функции координат и времени. Наконец, массовые натурные испытания крупных конструкций на надежность трудоемки и не всегда осуществимы. Поэтому развитие теории надежности в строительстве заключается в учете взаимодействия конструкции с окружающей средой, расчете ее стохастического поведения и в получении вероятностных выводов [1].

Впервые о статистической природе коэффициента запаса прочности упоминалось в [2]. Здесь было предложено, вместо расчета по допускаемым напряжениям для выбора значений параметров, вводимых в расчет, использовать методы теории вероятностей. В [3] принималась во внимание изменчивость основных параметров и формировалась идея вероятностной оптимизации.

Общие принципиальные положения применения вероятностных методов к анализу надежности сооружений получили развитие, кроме цитированной работы [1], в исследованиях [4–9].

Сформулируем общую схему оценки надежности с учетом физических, технических и эксплуатационных аспектов. Для этого проанализируем поведение некоторой системы при внешних воздействиях, описываемой уравнением

$$\boldsymbol{L_1 u = q}. \tag{2.1.1}$$

В связи со сказанным представляется важным получить в рамках вероятностного подхода определяющие уравнения для базового материала железобетонных конструкций – бетона.

Современные методы механики в соединении с мощными вычислительными средствами позволяют рассчитывать сложные конструкции, находящиеся в непростых взаимодействиях с окружающей средой. При этом устанавливаются распределение напряжений, деформаций и перемещений в конструкциях, значения предельных нагрузок и другие механические параметры. Указанные характеристики интересны не сами по себе, а лишь с точки зрения суждений о надежности и долговечности сооружений. Конечным результатом инженерного расчета должна быть гарантия надежной эксплуатации конструкции в течение установленного срока. Иными словами, цель расчета конструкции можно определить как выбор параметров, при которых вероятность наступления предельных состояний будет меньше некоторого заданного значения. Последнее соответствует определенным оптимальным решениям, найденным с учетом назначения сооружения, его ответственности и капитальности, долговечности, возможного материального и морального ущерба, связанного с нарушением нормальной эксплуатации, перспективы роста нагрузок со временем и т. д.

Из сказанного можно заключить, что поведение строительных конструкций в эксплуатации связано с факторами случайной природы. Статистической изменчивостью обладают свойства конструкционных материалов, а нагрузки на сооружения представляют собой случайные процессы, развертывающиеся во времени.

Следует отметить, что современные нормы проектирования строительных конструкций учитывают вероятностный характер нагрузок и несущей способности только в части обработки исходной информации. Метод предельных состояний можно трактовать как полувероятностный, а надежность конструкций в процессе проектирования обеспечивает введение частных коэффициентов надежности – по нагрузкам, материалам, коэффициентов условий работы, надежности по назначению. Значения этих коэффициентов в принципе не могут иметь достаточного теоретического и экспериментального обоснования.

Расчет строительных конструкций, отражающий реальный поведенческий характер в эксплуатации, должен, конечно, в полной мере базироваться на теории надежности, имеющей вероятностную природу. Такой подход можно рассматривать как более объективный для оценки пригодности конструкции к нормальной эксплуатации. Это связано с тем, что аппарат теории надежности включает теоретическую основу организации сбора и обработки статистических данных, относящихся к воздействиям на сооружения, характеристикам материалов, конструкций и другим расчетным параметрам. Это связано с тем, что аппарат теории надежности включает теоретическую основу организации сбора и обработки статистических данных, относящихся к воздействиям на сооружения, характеристикам материалов, конструкций и другим расчетным параметрам.

$$\boldsymbol{L_1 u = q.}$$

Здесь $\boldsymbol{q}$ – элемент из пространства входных параметров $\boldsymbol{q \in Q;}$ $\boldsymbol{u}$ – элемент из пространства выходных параметров $\boldsymbol{u \in U}$, $\boldsymbol{L_1}$ – оператор системы.

Элементы пространства $\boldsymbol{U}$ полностью характеризуют состояние системы, каждому из которых отвечает элемент $\boldsymbol{u \in U.}$ При изменении времени $\boldsymbol{t}$ одно состояние переходит в другое. Эволюция состояний описывается функцией $\boldsymbol{u = u(t)}$.

Введем пространство $\boldsymbol{V}$ для описания качества системы, причем каждому качеству соответствует элемент $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$.

Каждой траектории $\boldsymbol{u(t)}$ в пространстве $\boldsymbol{U}$ соответствует траектория $\boldsymbol{v(t)}$ в пространстве $\boldsymbol{V}$. Связь между ними определяется операторным соотношением

$$\boldsymbol{v = L_2 u}. \tag{2.1.2}$$

Оговоримся, что переход от пространства состояний к пространству качества – нетривиальная операция. Укажем лишь, что множество состояний системы, допустимых с точки зрения качества, образует в пространстве качества $\boldsymbol{V}$ область допустимых значений $\boldsymbol{\omega_0}$. Граница области $\boldsymbol{\omega_0 = \Gamma}$ соответствует предельным состояниям.

Пусть внешнее воздействие $\boldsymbol{q(t)}$ и оператор системы $\boldsymbol{L_1}$ являются стохастическими. Тогда траектории $\boldsymbol{v = v(t)}$ в пространстве качества $\boldsymbol{V}$ будут стохастическими, а отказ – случайным событием. Функции надежности определяются как вероятность пребывания элемента $\boldsymbol{v(\tau)}$ в допустимой области $\boldsymbol{\omega_0 \leq \Gamma}$ в течение интервала $\boldsymbol{0 < \tau < t}$.

$$\boldsymbol{P(t) = P[v(\tau) \in \omega_0;\ 0 \leq \tau \leq t]}, \tag{2.1.3}$$

где $\boldsymbol{P = P(A)}$ – вероятность наступления случайного события $\boldsymbol{A}$.

Определение функции надежности в форме (2.1.1) распространяются на случай повторных отказов, ремонта, восстановления и т. п. Роль параметра $\boldsymbol{t}$ может играть не только физическое время, но и любые другие монотонно растущие параметры.

Резюмирую сказанное, можно утверждать, что сформулирована общая схема вычисления надежности с учетом физических, технических и эксплуатационных аспектов. Указанная схема укладывается в четыре этапа:

1. Схематизация системы и внешних воздействий, т. е. выбор пространства $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{U}$,а также оператора $\boldsymbol{L_1}$.
2. Определение стохастического поведения системы путем решения стохастического уравнения (2.1.1).
3. Выбор пространства качества $\boldsymbol{V}$ и области допустимых значений $\boldsymbol{\omega_0}$ путем решения операторного уравнения (2.1.2).
4. Определение функции надежности $\boldsymbol{P(t)}$ как дополнения до единицы вероятности случайного выброса за пределы допустимой области $\boldsymbol{\omega_0}$.

Таким образом, функция надежности распределяется как результат взаимодействия внешней среды, свойств системы, технологических, эксплуатационных и тому подобных требований.

2.2. Постановка задачи расчета на надежность в рамках метода предельных состояний

Рассмотрим задачу применения теории надежности к обоснованию и совершенствованию форм расчета строительных конструкций. Одной из главных целей этого расчета является получение гарантии, что ни одно из предельных состояний за время эксплуатации конструкции не наступит, а интенсивность отказов, требующих ремонта или временного прекращения эксплуатации, не будет слишком велика.

При построении теории надежности строительных конструкций принято целесообразным все расчетные величины разделить на две основные группы. Первая группа включает в себя характеристики, относящиеся к свойствам самой конструкции, а другая – параметры внешних воздействий. Тогда условие непревышения границы области допустимых состояний может определяться как выполнение предельного неравенства

$$\check{S}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \check{R}\,(x_1, x_2, \dots, x_m) - Q(x_{n+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) > 0, \quad (2.2.1)$$

или в более компактной форме

$$S = \check{R} - Q > 0. \quad (2.2.2)$$

Здесь Q – наибольшее значение нагрузочного эффекта (усилие или напряжение в конструкции, выраженное через внешние нагрузки, т. е. задача определения напряженно-деформированного состояния, предполагается решенной); R – несущая способность, выраженная в тех же единицах, что и Q, и отвечающая предельному состоянию по прочности (предел текучести, предел прочности, пластический момент); S – характеристика, названная в [2] резервом прочности.

Очевидно, что уравнение границы области допустимых состояний конструкции представляется в виде

$$S\,(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (2.2.3)$$

В общем случае усилия и несущая способность являются случайными функциями времени, но в рассматриваемой постановке $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$ считаются случайными величинами (знаком ~ обозначается случайная величина) с заданным законом распределения. Более наглядные результаты можно получить, если в условии (2.2.1) положить $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$ скалярными функциями, хотя во многих случаях необходимо рассматривать соответствующие вектор-функции.

Вероятность неравенства (2.2.2) представляет собой вероятность неразрушения конструкции

$$\boldsymbol{P = 1 - P_f}, \tag{2.2.4}$$

где $\boldsymbol{P_f}$ – вероятность разрушения или отказа, определяемая интегралом

$$\boldsymbol{P_f = \int_{-\infty}^{0} P_S(S)dS = P_S(0)}, \tag{2.2.5}$$

причем $\boldsymbol{P_s(S)}$ – распределение плотности резерва прочности.

Плотность распределения резерва прочности можно определить, используя формулу, определяющую плотность распределения суммы случайных величин. При взаимонезависимости $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$ будем иметь

$$\boldsymbol{P_S(S) = \int_{-\infty}^{\infty} P_S\ (S)dS = P_S(0.)}. \tag{2.2.6}$$

Здесь $\boldsymbol{P_s(S)}$ – плотность распределения резерва прочности, $\boldsymbol{P_R(S + Q)}$ – та же функция, но с аргументом $\boldsymbol{(S,Q)}$; $\boldsymbol{P_Q(Q)}$ – плотность распределения нагрузочного эффекта.

Подставив (2.2.6) в (2.2.5), можно записать формулу для определения вероятности безотказной работы – вероятности неразрушения:

$$\boldsymbol{P_f = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} P_Q(R)P_R(Q)dQ}, \tag{2.2.7}$$

или

$$\boldsymbol{P_f = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} P_R(R)R_Q(R)dR}, \tag{2.2.8}$$

где $\boldsymbol{P_R(R), R_Q(R)}$ – функции распределения несущей способности и нагрузочного эффекта.

Введем представления о характеристике безопасности [2]. Иногда для указанной характеристики используется термин «индекс надежности», а в [71] – «дальность отказа».

При любых законах распределения $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$

$$S = \mathbf{R\text{-}Q};\ S = \sqrt{S_R^2 + S_Q^2}, \qquad (2.2.9)$$

где ***S*** – стандарт распределения резерва прочности, равный корню квадратному из дисперсии, а индекс (-) означает математическое ожидание.

Число стандартов ***S***, укладывающихся в интервале от ***S = 0*** до ***S = S*** и названо характеристикой безопасности [2]. Имеем

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{S}{S} = \frac{R-Q}{\sqrt{S_R^2+S_Q^2}}. \qquad (2.2.9а)$$

Плотность отказа представляет заштрихованную площадь на рисунке 2.2, где изображена плотность распределения резерва прочности.

Соотношение между вероятностью отказа $P_s(S)$ и характеристикой безопасности ***β*** можно проиллюстрировать, положив, что скалярные функции ***Q*** и ***R*** подчиняются [4] нормальным законам распределения.

Вероятность отказа можно представить в виде

$$P_S = P_S(S < 0) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-S}{S}\right)\right] dx. \qquad (2.2.10)$$

Тогда

$$P_S = \frac{1}{2} - \Phi(\beta),$$

где ***Φ(β)*** – интеграл вероятности Гаусса.

$$\Phi(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\beta} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx. \qquad (2.2.11)$$

Данные таблицы 2.1 дают представление об изменении вероятности отказа в зависимости от изменения характеристик безопасности.

Таблица 2.1 – График зависимости вероятности безотказной работы ***Ps*** от ***β***

β	2,25	3,25	3,75	4,25	4,75	5,25
P_S	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}

По сравнению с вероятностью разрушения P_s характеристика безопасности ***β*** имеет то преимущество, что выражается наибольшим числом, обычно большим единицы, в то время как P_s – маленькая дробь.

На рисунке 2.1 представлен график зависимости вероятности безотказной работы P_f от β.

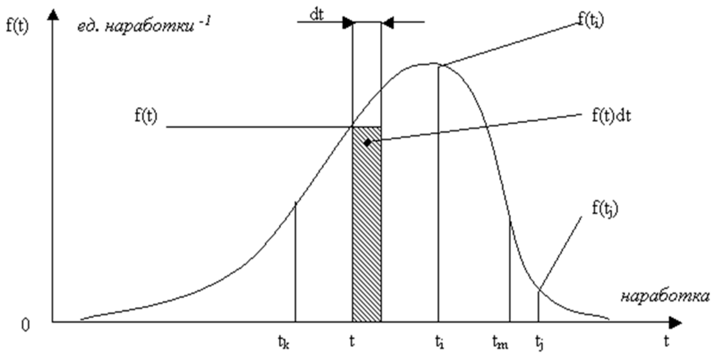

Рисунок 2.1 – Зависимость вероятности неразрушения от β

Вместо резерва прочности можно ввести следующую величину:

$$U = \frac{R}{Q}. \tag{2.2.12}$$

Вероятность отказа при этом определяется так:

$$P_S = P\left(\frac{R}{Q} < 1\right). \tag{2.2.13}$$

Выражение (2.2.13) оказывается удобным, когда нагрузочный эффект Q и несущая способность R подчиняются логонормальному распределению. Характеристика безопасности при этом определяется по формуле [5]

$$\beta = \frac{ln\left(\frac{R}{Q}\right) - ln\left[(1+\vartheta_R^2)^{\frac{1}{2}}/(1+\vartheta_Q^2)^{\frac{1}{2}}\right]}{\left\{ln\left[(1+\vartheta_R^2)(1+\vartheta_Q^2)\right]\right\}^{1/2}}, \tag{2.2.14}$$

где $\vartheta_R = S_R/R$; $\vartheta_Q = S_Q/Q$ – коэффициенты вариации несущей способности и нагрузочного эффекта.

Понятно, что если усилие и несущая способность подчинены нормальному закону распределения, то изображенные $P(R,Q)$ = $const$ представляют собой эллипсы.

В координатах $q_0 = Q/S_Q$, $r_0 = R/S_R$ эллипсы переходят в окружности и, соответственно, изменяется наклон прямой, ограничивающей область допустимых состояний.

Ведем нормированные случайные величины:

$$r = (R-R)/S_R;\ Q = (Q-Q)/S_Q. \tag{2.2.15}$$

Из (2.2.15) имеем

$$R = rS_R + R;\ Q = qS_Q+Q. \tag{2.2.16}$$

Подставив (2.2.16), получим

$$S = R-Q = rS_R + R-qS_Q-Q. \tag{2.2.17}$$

Полагая здесь $S = 0$, запишем уравнение для границы области допустимых значений:

$$rS_R-qS_Q + (R-Q)= 0. \tag{2.2.18}$$

Очевидно, что чем меньше расстояние от прямой, описываемой уравнением (2.2.18), до начала координат $r = q = 0$, тем больше вероятность отказа P_f . Из простых геометрических соображений следует, что кратчайшее расстояние, равное вектору $\vec{OA}$, между началом координат и линией (2.2.18) есть характеристика безопасности β. Направляющие косинусы этой нормали равны

$$\cos\theta_Q = -\alpha_Q = \frac{S_Q}{(S_R^2+S_Q^2)^{1/2}}.$$

$$\cos\theta_R = -\alpha_R = \frac{S_R}{(S_R^2+S_Q^2)^{1/2}}. \tag{2.2.19}$$

Точка A иногда называется «расчетной». Координаты этой точки в осях r, q есть расчетные значения

$$q_p = -\alpha_Q\beta;\ r_p = -\alpha_R\beta. \tag{2.2.20}$$

В координатах R, Q положение расчетной точки определяется так:

$$Q_p = Q - \alpha_Q\beta S_Q;\ \ R_p = R - \alpha_R\beta S_R. \tag{2.2.21}$$

Формулы (2.2.21) служат для нахождения расчетных усилий и несущей способности. Подставив (2.2.21) в (2.2.20), получим

$$Q_P = Q[1+\beta S_Q\vartheta_Q/(S_R^2 + S_Q^2)^{1/2}];\ R_P = R[1+\beta S_R\vartheta_R/(S_R^2 + S_Q^2)^{1/2}]; \tag{2.2.22}$$

В соответствие методу предельных состояний можно записать

$$Q_P = \gamma_f Q(1+\mu_Q\vartheta_Q); \quad R_P = \frac{1}{\gamma_m} R(1+\mu_R\vartheta_R). \qquad (2.2.23)$$

Здесь, как и выше, ϑ_Q, ϑ_R – коэффициенты вариации несущей способности и нагрузочного эффекта, γ_f, γ_m – коэффициенты надежности по нагрузкам и материалу, соответственно, μ_R μ_Q – число стандартов по нагрузке и несущей способности.

В действующих нормах и нормативные значения не совпадают с математическим ожиданием и сдвинуты по отношению к среднему значению на число стандартов. Сопоставляя (2.2.22) и (2.2.23), будем иметь

$$\gamma_f = [1+\beta S_Q\vartheta_Q/(S_R^2 + S_Q^2)^{1/2}]/(1+\mu_Q\vartheta_Q);$$

$$(2.2.24)$$

$$\frac{1}{\gamma_m} = [1+\beta S_R\vartheta_R/(S_R^2 + S_Q^2)^{1/2}]/ (1+\mu_R\vartheta_R).$$

На основании зависимостей (2.2.24) устанавливается связь коэффициентов надежности между собой и с характеристикой безопасности. Очевидно, что кинетика указанных коэффициентов связана с изменчивостью во времени характеристики безопасности, т. е.

$$\frac{d\gamma_f}{dt} \sim \frac{d\beta}{dt}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\gamma_m}\right) \sim \frac{d\beta}{dt}. \qquad (2.2.25)$$

2.3. О связи норм расчета с надежностью конструкций

Метод предельных состояний можно рассматривать как полувероятностный, поскольку существующие надежностные требования указаны, но не сформулированы.

Поэтому надежность сооружений одного и того же назначения, выполненных из различных материалов по действующим нормам, оказывается неодинаковой.

Более того, не существует нормативов в проектировании надежности, нет ясности в понимании причин неодинаковости требований надежности для всех сооружений или пределов различий.

Существующими методами проектирования невозможно оценить надежность конструкций, а тем более проектировать с заданным уровнем надежности. Основные требования заключаются, как обсуждалось выше, в сравнении расчетных значений нагрузочного эффекта и несущей способности. Но в действительности предельное состояние может наступить при нагрузках, меньших расчетных и, следовательно, реализуется меньшее значение несущей способности. Поэтому при нормировании надежностных требований можно считать некорректным применение методов теории вероятности для рассмотрения каждой исходной случайной величины в отдельности и не решать задачу надежности конструкций.

Проанализируем действующие нормы расчета с точки зрения надежности проектируемых конструкций [5]. При этом полагаем, что уровень надежности конструкций определяется только выбором расчетных нагрузок и сопротивлений. Все возможные предельные состояния определяются равенством.

$$\boldsymbol{S_Q(a_1Q_1,\ a_2Q_2,\ \ldots,\ a_nQ_n) = S_R(bR).} \tag{2.3.1}$$

Здесь $\boldsymbol{Q_i}$ – случайные значения величины нагрузки, $\boldsymbol{R}$ – случайные значение величины сопротивления, $\boldsymbol{a_iQ_i, bR}$ – случайные значения нагрузочного эффекта и несущей способности.

Из всех состояний (2.3.1) выберем одно, соответствующее расчетным значениям исходных величин, а параметры конструкции считаем удовлетворяющим условию

$$\boldsymbol{S_Q(a_1Q_{1p},\ a_2Q_{2p},\ldots a_nQ_{np}) \le S(bR_p),} \tag{2.3.2}$$

где $\boldsymbol{Q_{ip}}$ и $\boldsymbol{R_p}$ – расчетные значения нагрузки и несущей способности.

Пусть действует только одна нагрузка. Тогда вместо (2.3.1) имеем

$$\boldsymbol{aQ = bR.} \tag{2.3.3}$$

Расчетное неравенство (2.3.2) в этом случае примет вид

$$\boldsymbol{aQ \le bR.} \tag{2.3.4}$$

Уровень надежности характеризуется вероятностью отказа работы

$$P_f = P(aQ \leq bR). \qquad (2.3.5)$$

Расчетные значения Q_p и R_p определяются их обеспеченностями

$$P_Q = P(Q<Q_p) = \Phi(\beta q); \;\; P_R = P(R>R_p) = \Phi(\beta R), \qquad (2.3.6)$$

где $\Phi(\beta q), \Phi(\beta R)$ – дальность расчетного значения нагрузки и сопротивление – аналог характеристики безопасности; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ – интеграл вероятности.

Пусть в (2.3.4) выполняется строгое равенство, т. е. имеет место идеально запроектированная конструкция. Введя безразмерные значения нагрузки $q = Q/Q_P$ и сопротивления $r = R/R_p$, получим

$$r = q. \qquad (2.3.7)$$

Расчетные значения в этом случае будут равны $q_R = r_p = 1$, а коэффициенты вариации и дальность расчетных значений $V_q = V_Q$; $V_r = V_R$; $\beta_q = \beta_Q$; $\beta_r = \beta_R$. При этом вероятности безотказной работы можем записать

$$P_f = P(q < r) = \int_0^{\infty} P_q(x) P_r(x) dx. \qquad (2.3.8)$$

Теперь можно обратиться к решению сформулированной задачи – анализу действующих норм с точки зрения надежности. Задачу удобно рассматривать при известном аналитическом решении. Это можно сделать, если ввести конкретный закон распределения, вид которого не имеет решающего значения.

Пусть обе случайные величины подчиняются логонормальному закону распределения. Приемлемость последнего обосновано тем обстоятельством, что величины по своей природе неотрицательны.

Интеграл (2.3.8) перепишем в виде

$$P_f = 1 - \Phi(\beta), \qquad (2.3.9)$$

где [73]

$$\beta = \frac{\rho - \omega}{(S_\rho^2 + S_\omega^2)^{1/2}} \qquad (2.3.10)$$

причем $\rho = ln\bar{r}$, $\omega = lnq$.

Параметры S_p и S_ω выражаются через числовые характеристики распределения так:

$$S_\omega^2 = ln(1 + \vartheta_q^2);\ S_\rho^2 = ln(1 + \vartheta_r^2). \qquad (2.3.11)$$

Будем считать, что коэффициенты вариации $\vartheta < 0,4$ и тогда можно положить, что

$$ln(1 + \vartheta^2) \approx \vartheta \rightarrow S_\omega = \vartheta_q;\ S_\rho = \vartheta_r .$$

С учетом последнего выражение для характеристики безопасности примет вид

$$\beta = \frac{\beta_r\vartheta_r + \beta_q\vartheta_q}{(\vartheta_r^2 + \vartheta_q^2)^{1/2}}. \qquad (2.3.12)$$

После простых преобразований получаем

$$B = \frac{\beta_r\chi + \beta_q}{(1+\chi^2)^{1/2}}, \qquad (2.3.13)$$

где $\chi = \vartheta_r = \vartheta_q$.

Теперь понятно, что характеристика безопасности зависит не только от обеспеченностей (дальностей) расчетных значений нагрузок и сопротивлений, но и от отношения их коэффициентов вариаций.

Заметим, что при детерминированной прочности $\beta = \beta_q$ $(\vartheta = \chi = 0)$, а при детерминированной нагрузке $\beta = \beta_r$ $(\vartheta = \chi = \infty)$.

Исследуем функцию (2.3.13). Продифференцируем ее выражение по χ и приравняем нулю. Имеем

$$\frac{d\beta}{d\chi} = \frac{\beta_r - \beta_q\chi}{(1+\chi^2)^{3/2}} = 0. \qquad (2.3.14)$$

Очевидно, что максимальная вероятность безотказной работы достигается при $\chi = \beta_r / \beta_q$, а максимальное значение характеристики безопасности составляет $\beta_{max} = \left(\beta_r^2 + \beta_q^2\right)^{1/2}$.

Теперь становится очевидным, что при одних и тех же обеспеченностях расчетных значений прочности и нагрузки надежность может меняться в больших пределах в зависимости от отношения коэффициентов вариации нагрузки и прочности, не связываясь при этом с конкретными значениями указанных коэффициентов. Например, пусть $\vartheta_r = 0,08;\ \vartheta_q = 0,4\ (\chi = 0,2)$, тогда $\beta = 2,12$, т. е. вероятность безотказной работы $P_f = 0,983$, а вероятность отказа $P = 1 - P_f = 0,017$; для $\vartheta_r = 0,2;\ \vartheta_q = 0,1\ (\chi = 2,0)$ соответственно $\beta = 3,02$, $P_f = 0,9987$, $P = 0,0013$. Итак, получено, что вероятность отказа для обоих рассмотренных случаев отличается в 13 раз, а это означает, что последствия отказов будут отличаться примерно также.

Вывод приведенных рассуждений однозначен – необходимая унификация обеспеченности расчетных значений различных нагрузок и сопротивлений различных материалов не может обеспечить единый уровень надежности конструкций. При этом, устанавливая обеспеченности расчетных значений, невозможно предсказать уровень надежности проектируемой конструкции.

Заметим, что если исходные величины распределены по нормальному закону, то зависимость (2.3.13) сохраняет свой вид с заменой в ней коэффициентов вариации на стандартное отклонение.

Соотношения (2.3.12) и (2.3.13) были введены без учета коэффициента относительности γ_n в расчетном неравенстве. С учетом указанного коэффициента получаем, что $\gamma_n a Q_p \leq R_p$ и $aQ = R$. В безразмерных обозначениях предельному соотношению отвечает равенство

$$\frac{1}{\gamma_n} q = r. \tag{2.3.15}$$

Вероятность безотказной работы определяется так:

$$P_f = P\ (m < r), \tag{2.3.16}$$

где $m = q/\gamma_n$.

Формула (2.3.9) преобразуется к виду

$$P = \Phi\left(\frac{r - q + ln\gamma_n}{(S_r^2 + S_q^2)^{1/2}}\right) = \Phi(\beta). \tag{2.3.17}$$

Отсюда для β получаем

$$\beta = \frac{\beta_r\, \chi + \beta_q}{(1 + \chi^2)^{1/2}} + \frac{ln\gamma_n}{(\vartheta_r^2 + \vartheta_q^2)^{1/2}}, \tag{2.3.18}$$

где, как и ранее, $\chi = \vartheta_r / \vartheta_q$.

При $\gamma_n = 1$ зависимости (2.3.18) и (2.3.13) совпадают, а надежность, как и установлено выше, колеблется в широких пределах. Введение $\gamma_n \neq 1$ добавляет второе слагаемое в выражение (2.3.18) и, следовательно, коэффициент безопасности зависит не только от отношения коэффициентов вариации исходных величин χ, но и от их абсолютных значений.

В таблице 2.2 приведены данные по областям возможных значений вероятностей отказа $\boldsymbol{P}$ и характеристик безопасности $\boldsymbol{\beta}$ в случае обеспеченностей расчетных нагрузок и сопротивлений $\boldsymbol{\beta_q = 1{,}65; \beta_r = 2{,}56}$ при разных $\boldsymbol{\gamma_n}$.

Таблица 2.2 – Данные значений вероятностей отказа $\boldsymbol{P}$ и характеристик безопасности $\boldsymbol{\beta}$

χ	ϑ_q	ϑ_r	$\left(\vartheta_r^2 + \vartheta_q^2\right)^{1/2}$	$\gamma_n = 1$		$\gamma_n = 0{,}95$		$\gamma_n = 0{,}9$	
				β	P	β	P	β	P
0,1	0,50	0,50	0,502	1,90	0,0287	1,80	0,0359	1,69	0,0455
0,2	0,1 0,05	0,50 0,25	0,510 0,255	2,12	0,0170	2,02 1,92	0,0217 0,0274	1,91 1,71	0,0281 0,0436
0,5	0,25 0,05	0,50 0,10	0,559 0,112	2,62	0,0044	2,53 2,16	0,0057 0,0154	2,43 1,68	0,0075 0,0465
1,0	0,30 0,05	0,30 0,05	0,424 0,071	2,98	0,0014	2,86 2,26	0,0021 0,0119	2,73 1,50	0,0032 0,0668
2,0	0,30 0,10	0,15 0,05	0,335 0,112	3,02	0,0013	2,87 2,56	0,0021 0,0052	2,71 2,08	0,0034 0,0188
3,0	0,30 0,15	0,10 0,05	0,316 0,158	2,95	0,0016	2,79 2,63	0,0024 0,0043	2,62 2,28	0,0044 0,0113

Из таблицы 2.2 видно, что метод предельных состояний может приводить к абсурдным результатам, когда вероятность отказа при $\boldsymbol{\gamma_n = 0{,}9}$ меньше, чем при $\boldsymbol{\gamma_n = 1}$.

Таким образом, приходим к выводу, что основное надежностное требование сопоставления расчетных значений следует заменить требованием сопоставления проектной вероятности отказа с нормируемым целесообразным значением этой вероятности.

2.4. Статистический метод контроля несущей способности

Рассмотрим задачу контроля несущей способности строительных конструкций методами математической статистики. Расчетом по предельным состояниям предусматриваются систематический контроль и уточнение исходных данных. К ним относятся прочностные характеристики материалов, их обеспеченность, параметры распределения механических свойств. Указанные сведения получаются на основе обработки предварительных по однородности механических характеристик.

Стандартами на материалы устанавливаются и определенные требования к характеристикам строительных конструкций. Конечно, эти характеристики отличаются от заложенных в нормах проектирования. Они могут быть выполнены лишь с определенной вероятностью, и поэтому имеет место лишь вероятностная оценка близости данных требованиям.

Как правило, на стадии заводского изготовления конструктивных элементов производится контроль вероятности отказа этой стадии проектной вероятности отказа. Отметим, что такой контроль отказа является выборочным и не может обеспечить надежности. Все же основная задача заводского контроля состоит в отбраковке партий, засоренность дефектной продукцией которой превышает уровень, установленный нормативно-технической документацией для нормального хода производства. По существу, речь идет об основных требованиях к технологии изготовления конструкций.

Суть приемочного статистического контроля такова. От партии изделий, соблюдая принцип случайности, производят выборку в несколько образцов, число которых намного меньше объема партии. Все изделия выборки подвергаются контролю с определением степени пригодности каждого изделия для дальнейшего использования. Затем рассчитываются обобщенные характеристики испытаний. В результате их сравнения с нормативными показателями выносят суждение о качестве всей партии и решение о дальнейшем ее использовании.

Так, для оценки надежности индустриальных строительных конструкций массового изготовления производят статические испытания нескольких экземпляров из партии изготовленных конструкций. Испытания заключаются, согласно расчетной схеме, в нагружении возрастающей нагрузкой до появления отказа – нарушения любого вида предельного состояния. Несущая способность конструкции $\boldsymbol{R}$ определяется величиной испытательной нагрузки $\boldsymbol{Q^*}$ при отказе [4]. Надежность конструкции при испытании характеризуется вероятностью безотказной работы при испытаниях $P_f(Q^*)$ для заданного значения расчетной нагрузки Q^*_p. Условие пригодности партии представимо в виде

$$P_f(Q^*_p) = P(R > Q^*_p) \geq P_T, \qquad (2.4.1)$$

где P_T – требуемый уровень надежности.

Величины Q^*_p и P_T обычно задаются в технической документации на данный тип конструкции.

В существующих стандартах на испытание несущих конструкций партия считается годной при превышении испытательной нагрузки Q^* в n опытах контрольной нагрузки Q^*_k, иными словами,

$$Q^*_k = cQ^*_p, \qquad (2.4.2)$$

где $c = \bar{R} / R_p > 1$ – контрольный коэффициент, определяемый как отношение средней прочности материала $\bar{R}$ к расчетному сопротивлению R_p.

Подобная методика оценки несущей способности дает нам связи между коэффициентом c, числом испытываемых конструкций n, риском заказчика α и требуемым уровнем надежности при испытаниях P_T.

Если несущую способность принять отвечающей нормальному закону распределения, то вероятность (2.4.1) запишется так:

$$P_f(Q^*_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Y} exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \Phi(Y), \qquad (2.4.3)$$

причем величина $Y = (Q^*_p - \bar{Q}^*_p)/S_{Q_p}$ считается известной.

При известном требуемом уровне надежности P_T для партии, поступающей на контроль, квантиль v^T_{POT} заданного уровня $P_{OT} = 1 - P_T$ будет равен

$$v^T_{POT} = \bar{Q}^*_p + \Phi^{-1}(P_{OT})S_{Q_p}. \qquad (2.4.4)$$

Вероятность безотказной работы при испытаниях конструкций на контрольную нагрузку Q^*_k определиться так:

$$P_f(Q^*_k, v^T_{POT}) = \Phi\left[\frac{v^T_{POT} - Q^*_k}{S_{Q_p}} - \Phi^{-1}(P_{OT})\right]. \qquad (2.4.5)$$

Пусть v^O_{POT} – некоторое фиксированное значение квантиля уровня P_{OT}, равное величине расчетной нагрузки Q^*_p. Для любого $v^T_{POT} < v^O_{POT} = Q^*_0$ справедливо неравенство

$$P(Q^*_K,\ v^O_{POT}) \le P(Q^*_K,\ v^T_{POT}). \qquad (2.4.6)$$

Считаем, что неравенство (2.4.6) удовлетворяется с вероятностью λ, где λ нижняя граница вероятности безотказной работы $P(Q^*_K,\ v^O_{POT})$ при испытании.

Введем случайную величину ρ, равную числу отказов при испытаниях на контрольную нагрузку Q^*_k. Для заданных значений $n,\ \rho,\ \lambda,\ v^O_{POT} = Q^*_p$ и S_{Q_p} выражение для контрольной нагрузки можем записать так:

$$Q^*_k > v^O_{POT} - \{\Phi^{-1}[P(n,\rho,\lambda)] + \Phi^{-1}(P_{OT})\}\, S_{Q_p}, \qquad (2.4.7)$$

причем

$$P(n,\rho,\lambda) \le \Phi\left[\frac{v^T_{POT} - Q^*_k}{S_{Q_p}} - \Phi^{-1}(P_{OT})\right].$$

При отсутствии отказов $(\rho = 0)$ из (2.4.7) следует, что

$$Q^*_k = v^O_{POT} - [\Phi^{-1}(\alpha^{1/2}) + \Phi^{-1}(P_{OT})]\, S_{Q_p}, \qquad (2.4.8)$$

где $\alpha \le 1 - \lambda$ – риск заказчика.

Значение контрольной нагрузки возрастает с увеличением P и λ и уменьшается с увеличением числа испытаний n при фиксированном значении $v^O_{POT} = Q^*_p$.

При $v^T_{POT} \le v^O_{POT}$, где v^T_{POT} определяется формулой (2.4.4), вероятность приемки партии конструкций равна

$$P_\rho\left\{Q^*_{\rho+2} > x \middle| Q^*_{\rho+1} = Y\right\| \left|v^T_{POT} < v^o_{POT}\right|\} =$$

$$= \left\{\frac{\Phi\left[\frac{v^0_{POT} - x}{S_{Q_p}} - \Phi^{-1}(P_{OT})\right]}{\Phi\left[\frac{v^0_{POT} - Y}{S_{Q_p}} - \Phi^{-1}(P_{OT})\right]}\right\}^{n-\rho-1} \le \alpha. \qquad (2.4.9)$$

Из (2.4.9) находим, что

$$x \ge v^T_{POT} - \left\{\Phi^{-1}(P_{OT}) + \Phi^{-1}\left[\alpha^{\frac{1}{n-\rho-1}}\Phi\left(\frac{v^0_{POT} - Y}{S_{Q_p}}\right) - \Phi^{-1}(P_{OT})\right]\right\} S_{Q_p}. \qquad (2.4.10)$$

В случае, если $Q^*_{\rho+1} = Y < Q^*_k$ и $Q^*_{\rho+2} < x$, то партия конструкций бракуется и для тех же значений $P_T,\ x,\ \lambda,\ Q^*_k$ может быть переаттестована на меньшую расчетную нагрузку Q^{*1}_p, для которой имеем

$$Q_p^{*1} = Q^*_p + \{\Phi^{-1}[P(n, \lambda, \rho_0)] + \Phi^{-1}(P_{OT})\}\, S_{Q_p}, \qquad (2.4.11)$$

где число отказов $\rho_0 < \rho$, полученное в результате испытаний n конструкций в интервале $|0, Q^*_p|$.

Дальнейшая проверка несущей способности на расчетную нагрузку Q^*_p возможна при дополнительном испытании конструкций на контрольную нагрузку Q_k^{*1} $(Q^*_p \le Q_k^{*1} \le Q^*_{p+1})$. Общее число испытаний $N_0 = n + n_0$ для тех же значений P_T, λ, ρ определяется из уравнения относительно N_0:

$$P_\rho(N_0, \rho, \lambda) = \Phi\left[\frac{v^0_{POT} - Q_k^{*1}}{S_{Q_p}} - \Phi^{-1}(P_{OT})\right]. \qquad (2.4.12)$$

Для случая ρ = 0 из уравнения (2.4.12) имеем

$$N_0 = \frac{ln(1-\lambda)}{ln\Phi\left[\frac{v^0_{POT} - Q_k^*}{S_{Q_K}} - \Phi^{-1}(P_{OT})\right]}. \qquad (2.4.13)$$

3. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ОТКАЗА

3.1. Постановка задачи

Одной из главных целей расчета строительных конструкций является получение гарантии того, что за время эксплуатации не наступит ни одно из недопустимых предельных состояний, а интенсивность отказов, требующих ремонта или временного прекращения эксплуатации, не будет слишком велика.

Все показатели надежности, необходимые для формулировки нормативных требований к строительным конструкциям, представляют собой достаточно простые функции вероятности отказа за какой-либо определенный промежуток времени. Поэтому в качестве основной выдвигается задача вычисления вероятности отказа.

Условие отказа представляется неравенством

$$\boldsymbol{R - Q < 0.} \tag{3.1.1}$$

В общем случае $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{Q}$ – случайные величины. При рассмотрении требований жесткости $\boldsymbol{R}$ может быть детерминированным ограничением.

Вероятность отказа есть вероятность реализации неравенства (3.1.1), т. е.

$$\boldsymbol{P_s = P_{rob}\{R - Q < 0\} = \int_0^\infty f_R(x) f_Q(x) dx.} \tag{3.1.2}$$

Здесь $\boldsymbol{P_s}$ – вероятность отказа; $\boldsymbol{P_{rob}(A)}$ – вероятность реализации события $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{f_R(x), f_Q(x)}$ – функции распределения вероятностей величин $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{Q}$.

Интеграл (3.1.2) представим в виде

$$\boldsymbol{P_s = P_{rob}\,\{g(R,Q) < Q\} = \iint_\omega f_R\,(x_1, x_2)\, f_R(x_1, x_2) dx_1 dx_2,} \tag{3.1.3}$$

где $\boldsymbol{g(R,Q) = R\text{-}Q}$ – функция работоспособности; $\boldsymbol{\omega}$ – область отказных состояний в пространстве $\boldsymbol{(R,Q)}$, граница которой определяется условием

$$\boldsymbol{g = 0}.$$

Величины $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{Q}$ могут быть функциями многих случайных переменных (нагрузок, характеристик прочностных и деформационных свойств материалов, геометрических параметров). Поэтому интеграл (3.1.3) может быть заменен на следующий:

$$\boldsymbol{P_{rob}\{g(x_1, x_2,...,x_n) < 0\} = \int\int_{\omega_n} f_R(x_1,x_2,...,x_n) -}$$
$$\boldsymbol{f_Q\{x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2,...,dx_n,} \qquad (3.1.4)$$

где $\boldsymbol{\omega_n}$ – область отказовых состояний в $\boldsymbol{n}$-мерном пространстве, граница которого определяется условием $\boldsymbol{g = 0}$.

В некоторых случаях интеграл (3.1.4) удобно представить в виде

$$\boldsymbol{P_s = P_{rob}}$$
$$\boldsymbol{\{g < 0\} = \int_{-\infty}^{0} f_g(\xi)d\xi,} \qquad (3.1.5)$$

причем $\boldsymbol{f_g}$ – плотность распределения вероятностей величины $\boldsymbol{g = R - Q}$, определяемая как композиция законов распределения $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{Q}$.

Конкретные методы вычисления интеграла (3.1.2) в различных видах его записи сформулированы в [6] и заимствованы из [2], которых будем придерживаться.

3.2. Метод двух моментов

При распределении по нормальному закону несущей способности $\boldsymbol{R}$ и загрузочного эффекта $\boldsymbol{Q}$ интеграл (3.1.2) выражается через интеграл вероятностей

$$\boldsymbol{P_s = 1-\Phi(\beta),} \qquad (3.2.1)$$

где $\beta = \frac{R-Q}{\left(S_R^2+S_Q^2\right)^{1/2}}$ – характеристика безопасности (индекс надежности); R и Q средние значения величин $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{S_R}$ и $\boldsymbol{S_Q}$ – стандартные отклонения $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{Q}$.

Метод может считаться достаточно простым. Недостаток метода состоит в ограниченности применимости логонормального закона и может быть использован при применении нормального закона. При этом следует учитывать, что если $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{Q}$ – функции нескольких случайных переменных, то они могут иметь нормальное распределение в случае, когда все исходные переменные распределены нормально.

Для нелинейной функции работоспособности $\boldsymbol{g = g(x_1,x_2,...,x_n)}$ в ряде задач применим метод статистической линеаризации. Указанный метод основан на разложении в ряд Тейлора нелинейной функции в окрестности приближенного положения центра распределения случайного вектора $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Выражение для приближенного вычисления числовых параметров нелинейной функции независимых случайных аргументов имеют вид

$$g = g(x_1, x_2, ..., x_n);$$

$$S_q^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2_{\dot{x}_1} S_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2_{\dot{x}_2} S_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)^2_{\dot{x}_{n1}} S_{x_n}^2. \qquad (3.2.2)$$

Из (3.2.2) легко определяется величина β. Она равна

$$\beta = \frac{g}{S_q}. \qquad (3.2.3)$$

Пример [6]. Рассмотрим задачу определения вероятности безотказной работы внецентренно сжатого сварного двутавра.

Геометрические характеристики сечения: $J_x = 1920$ *см*^{3}; $W_x = 1920$ *см*^{3}; $A = 1920$ *см*^{2}; эксцентриситет нормальной силы $e = 1{,}2$ *см*, расчетная длина $l = 5{,}6$ *м*.

Критическая сила при условии шарнирного закрепления концов:

$$N_Э = \frac{\pi^2 JE}{l^2} = 1.2 \cdot 10^3 \ kH.$$

Определим вероятность текучести крайнего волокна. Функция работоспособности имеет вид

$$g = \sigma_T - \frac{N_e}{W}\eta - \frac{N}{A} = \sigma_T - N\left(\frac{e\eta}{W} + \frac{1}{A}\right),$$

где $\eta = \frac{1}{1-\frac{N}{N_Э}}$; σ_T – предел текучести стали.

Условие отказа имеет вид $g < 0$, а граница области безотказной работы есть $g = 0$.

Нагрузка принимается распределенной по двойному экспоненциальному закону. Функция распределения продольной силы представима в форме

$$F_N = \frac{1}{\beta_*} exp\left[-\frac{x-\alpha}{\beta_*}\right] exp\left[-exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta_*}\right)\right].$$

Параметры распределения $\alpha = 5{*}10^5$ *Н*; $\beta_* = 6{*}10^4$ *Н*.

Используем известные соотношения

$$N = \alpha + 0{,}577\,\beta_*;\ S_N^2 = 1{,}645\beta_*^2.$$

Находим

$$N = 5{,}35*10^5\ H;\ S_N = 7{,}69*10^4 H.$$

Предел текучести принимается распределенным по логарифмическому нормальному закону

$$f_{\sigma_T} = \frac{1}{xt\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{lnx - m}{2t^2}\right).$$

Числовые характеристики $\boldsymbol{\sigma_T = 3*10^8}$ ***Па***, $\boldsymbol{S_{\sigma_T} = 3*10^7}$ ***Па***. Обозначив $x_1 = N$ и $x_2 = \sigma_T$, получим

$$g = x_2 - x_1\left(\frac{60*10^6}{1{,}2*10^6 - x_1} + 208{,}3\right).$$

Вычисляем производные:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \left(\frac{60*10^6}{1{,}2*10^6 - x_1} + 208{,}3\right)\frac{60*10^6 x_1}{(1.2*10^6 - x_1)^2};$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1.$$

Теперь имеем

$$g = 14{,}05*10^7;\ \ S_g = 3{,}46*10^7.$$

В соответствии (4.2.1) $\boldsymbol{\beta = 4{,}06}$ и ему отвечает $\boldsymbol{P_S = 3{,}18*10^{-5}}$, $\boldsymbol{P_f = 0{,}9999682}$.

Полученные значения вероятности безотказной работы являются весьма приближенным и, естественно, существенно должно отличаться от реального значения.

3.3. Метод «горячих точек»

Пусть величины, отражающие исходную информацию, не подчиняются нормальному закону распределения. В этом случае можно предложить преобразование, приводящее распределение к нормальному. Точное решение здесь возможно для законов, производных от нормального. В остальных случаях преобразование есть приближенная аппроксимация исходных законов нормальным. Указанная аппроксимация должна выполняться на границе области отказа в точке с максимальной совместной плотностью распределения всех исходных величин, так как в окрестности этой точки сосредоточены наиболее вероятные их сочетания.

Для вычисления вероятности отказа (3.1.2) может быть использован прием, разработанный в [3, 4] и названный методом «горячих точек». Практически тот же метод был сформулирован в [5] и получил название «метода первого приближения».

Предлагаемый ниже подход использует метод «горячих точек» с локальной аппроксимацией распределения исходных величин нормальным законом. Аппроксимация осуществляется в «горячей точке» – точке подгонки. Поскольку положение указанной точки заранее неизвестно, то привлекается итерационная процедура.

В общем случае нескольких исходных величин при нелинейной границе области безотказной работы в методе «горячих точек» соблюдается следующий порядок.

Пусть $\boldsymbol{x_1, x_2,\dots, x_n}$ – исходные случайные величины с местными интегральными $\boldsymbol{F_{x_i}}$ и дифференциальными $\boldsymbol{f_{x_i}}$ функциями распределения. Границы области безотказной работы есть $\boldsymbol{g(x_1, x_2,\dots, x_n) = 0}$, где $\boldsymbol{g}$ – функция работоспособности, подбираемая так, чтобы вероятность безотказной работы определялась как вероятность того, что $\boldsymbol{g > 0}$. На первой итерации на границе области $\boldsymbol{g = 0}$ произвольно выбирается точка подгонки $(x_1, x_2,\dots, x_n)$.

В качестве примера предлагается выбирать координаты «точки подгонки» как квантили вероятности 0,95 распределения всех исходных величин, кроме одной. Эта недостающая координата определяется из условия $\boldsymbol{g = 0}$, т. е. из условия принадлежности «точки подгонки» границе области безотказной работы.

Итак, для координат «точки подгонки» имеем

$$\boldsymbol{x_i^{\Pi} = F_{x_i}^{-1}(0.95)\Big|\begin{matrix} n-1 \\ i=1' \end{matrix}} \qquad (3.3.1)$$

где $\boldsymbol{x_i^{\Pi}}$ определяется из условия $\boldsymbol{g = 0}$.

В «точке подгонки» осуществляется локальная нормализация исходных величин. Иными словами, устанавливаются средние значения $\boldsymbol{x_i}$ и стандарт $\boldsymbol{S_{x_i}}$ такого нормального распределения величины $\boldsymbol{x_i}$, у которого значения интегральной и дифференциальной функций распределения в «точке подгонки» равны значению соответствующих функций исходного распределения величины x_i, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_i^{П} - \Phi^{-1}\left[F_{x_i}\left(x_i^{П}\right)\right]S_{x_i}; \\ S_{x_i} &= \frac{1}{f_{x_i}\left(x_i^{П}\right)}\varphi\left\{\Phi^{-1}\left[F_{x_i}\left(x_i^{П}\right)\right]\right\}; \end{aligned}\right|\begin{matrix} n \\ i=1 \end{matrix} \qquad (3.3.2)$$

причем Φ и φ – интегральная функция и плотность нормального стандартного распределения.

Центрирование производится стандартной редукцией

$$\dot{x}_i^{П} = x_i^{П} - \dot{x}_i. \qquad (3.3.3)$$

При нелинейной границе области отказа $g = 0$ функция работоспособности линеаризуется в «точке подгонки». Указанная функция в линеаризованном варианте будет иметь вид

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1^{П}, x_2^{П}, \dots, x_n^{П},) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}\left|\begin{matrix} (x_i - x_{iП}) \\ x_1 - x_1^{П} \\ x_2 - x_2^{П} \\ \dots \\ x_n - x_n^{П} \end{matrix}\right. . \qquad (3.3.4)$$

Поскольку «точка подгонки» выбрана на границе области безотказной работы $(g = 0)$, то

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, \dots, x_n) &= -\sum_{i=1}^{n} a_i\left(x_i - x_i^{П}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i^{П} - \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i, \end{aligned} \qquad (3.3.5)$$

где $a_i = -\frac{\partial g}{\partial x_i}\left|x_i - x_i^{П}\right.$.

Условие безотказной работы определяется неравенством $h > 0$ или

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i^{П} > \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i. \qquad (3.3.6)$$

Обсудим полученное неравенство (3.3.6). В левой части стоит детерминированная величина $c = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i^{П}$, а в правой части – случайная величина $z = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i$, распределенная по нормальному закону с параметрами:

- среднее значение $\hat{z} = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \dot{x}_i$,
- стандарт $S_z = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 S_{x_i}^1\right)^{1/2}$.

Вероятность выполнения условия безотказной работы будет определяться так:

$$\boldsymbol{P_f} = \int_{-\infty}^{z} \boldsymbol{f_z(z)dz} = \Phi(\boldsymbol{\rho}), \tag{3.3.7}$$

где

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\text{c}-\hat{\text{z}}}{\boldsymbol{S_z}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_i}(\boldsymbol{x_i^{\Pi}}-\dot{\text{x}}_i)}{\boldsymbol{S_z}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_i}\dot{\text{x}}_i^{\Pi}}{\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_i S_{x_i}^2}\right)^{1/2}}. \tag{3.3.8}$$

В пространстве стандартизированных нормализованных величин (преобразование $\dot{\boldsymbol{x}}_i/\boldsymbol{S_{x_i}}$) расстояние от центра распределения (начала координат) до линеаризованной границы области безотказной работы $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$ будет равняться $\boldsymbol{\rho}$. Точка пересечения перпендикуляра, опущенного из центра распределения с прямой $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$, с этой прямой есть «горячая точка». Итерация продолжается до тех пор, пока выбранная в очередной раз точка подгонки не окажется «горячей точкой». Расстояние от центра распределения до точки подгонки в пространстве стандартизованных величин

$$\chi = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^{0\Pi}}{S_{x_i}}\right)\right)^{1/2} \tag{3.3.9}$$

должно оказаться равным $\boldsymbol{\rho}$.

Это означает, что линеаризация границы области безотказной работы была проведена в точке с максимальной по этой границе плотностью совместного распределения исходных величин и погрешность при переходе от нормализации к линеаризации минимальна, т. е. индекс надежности $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\rho}$, а вероятность безотказной работы $\boldsymbol{P_f} = \boldsymbol{\Phi(\beta)}$.

При $\boldsymbol{\rho} \neq \boldsymbol{\chi}$ для очередной итерации следующую точку подгонки задают так. Все координаты этой точки, кроме одной принимаются равными соответственно координатам «горячей точки» предыдущей итерации, а последняя координата всегда отыскивается из условия $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$.

Таким образом, имеем

$$\boldsymbol{x_i^{\Pi}} = \dot{\text{x}}_i + \frac{\boldsymbol{a_i S_{x_i}^2}}{\boldsymbol{S_z}}\boldsymbol{\rho}. \tag{3.3.10}$$

Метод считается универсальным. Определенным ограничением при достаточной простоте алгоритма является требование гладкости и дифференцируемости от функции g. При кусочно-гладкой границе области отказа вводятся дополнительные условия, существенно усложняющие алгоритм. Отметим определенную затруднительность в оценке погрешности.

Пример. Рассмотрим тот же внецентренно сжатый стержень двутаврового сечения, надежность которого исследовалась впредыдущем разделе методом двух моментов.

Предел текучести здесь также подчиняется логонормальному закону распределения, для параметров которого имеем

$$m = ln\sigma_T - 0.5t^2;\ t^2 = ln\left[1 - \left(\frac{S_{\sigma_T}}{\sigma_T}\right)^2\right];$$

$$t^2 = ln1.01 = 0.01t = 0.1;$$

$$m = ln3*10^8 - 0.05 = 19.51.$$

Для нахождения значений функций $F_{\sigma_T}(x)$ и $f_{\sigma_T}(x)$ будем использовать таблицы нормального закона с применением преобразования

$$u = \frac{ln\sigma_T - 19.51}{0.1}.$$

Тогда

$$F_{\sigma_T}(x) = \Phi[u(x)];\ f_{\sigma_T}(x) = \frac{10}{x}\varphi[u(x)];$$

где Φ, φ – нормальный стандартный закон.

Введя обозначения $x_1 = N$; $x_2 = \sigma_T$, для функции работоспособности получим выражение

$$g = x_2 - x_1\left(\frac{60\cdot10^6}{1{,}2\cdot10^6 - x_1} + 208{,}3\right);$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \left(\frac{60\cdot10^6}{1{,}2\cdot10^6 - x_1} + 208{,}3\right)\left(\frac{60\cdot10^6\cdot x_1}{(1{,}2\cdot10^6 - x_1)^2}\right);$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = 1.$$

I итерация

Координаты точки подгонки определяем согласно (4.3.1).

$$x_1^{\Pi} = F_{x_1}^{-1}(0{,}95);\ exp\left[-exp\left(-\frac{x_1^{\Pi} - 5\cdot10^5}{6\cdot10^4}\right)\right] = 0{,}95.$$

Отсюда и имеем

$$\ln(-\ln 0.95) = -\frac{x_1^{\Pi}-5\cdot 10^5}{6\cdot 10^4};$$

$$x_1^{\Pi} = 6\cdot 10^4 - \ln(-\ln 0,95) + 5\cdot 10^5 = 678200.$$

Подставляем x_1^{Π} в равенство $g = 0$ и получаем

$$x_2^{\Pi} = 678200\left[\frac{60\cdot 10^6}{1,2\cdot 10^6 - 0,6782\cdot 10^6} + 208,3\right] = 2190\cdot 10^5.$$

Числовые параметры вычисляем по формулам (4.3.2), (4.3.3)

$$\dot{x}_1 = 678200 - \Phi^{-1}(0,95)S_{x_1} = 678200 - ,645S_{x_1};$$

$$S_{x_1} = \frac{\varphi(1,645)}{f_{x_1}(x_1^{\Pi})};$$

$$f_{x_1}(x_1^{\Pi}) = \frac{1}{6\cdot 10^4}exp\left[-\frac{6,782\cdot 10^5 - 5\cdot 10^5}{6\cdot 10^4}\right]\cdot$$

$$\cdot exp\left[-exp\left(\frac{6,782\cdot 10^5 - 5\cdot 10^5}{6\cdot 10^4}\right)\right] = 8,123\cdot 10^{-4};$$

$$S_{x_1} = 1,27\cdot 10^5;\ \dot{x}_1 = 4,69\cdot 10^5.$$

Аналогично определяем $\dot{x}_2$ и S_{x_2}

$$\dot{x}_2 = x_2^{\Pi} - \Phi^{-1}\left(\frac{\ln x_2^{\Pi} - 19,51}{0,1}\right)S_{x_2};$$

$$S_{x_2} = \frac{\varphi\left(\frac{\ln x_2^{\Pi} - 19,51}{0,1}\right)}{\frac{10}{x_2^{\Pi}}\varphi\left(\frac{\ln x_2^{\Pi} - 19,51}{0,1}\right)} = \frac{x_2^{\Pi}}{10} = 219\cdot 10^5;$$

$$\dot{x}_2 = 2868\cdot 10^5.$$

Центрирование

$$x_1^{0\Pi} = 678200 - 469390 = 2,08\cdot 10^5$$

$$x_2^{0\Pi} = 2190\cdot 10^5 - 2868\cdot 10^5 = -678\cdot 10^5$$

Теперь, используя (4.3.5), найдем

$$a_1 = \frac{\partial g}{\partial x_1}\bigg|_{\substack{x_1 = x_1^{\Pi}\\ x_2 = x_2^{\Pi}}} = 472.4.$$

$$a_2 = -1.$$

Далее находим

$$\boldsymbol{S_z} = \left[\left(\mathbf{472{,}4 \cdot 1{,}27 \cdot 10^5}\right)^2 + \left(\mathbf{2190 \cdot 10^5}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \mathbf{638{,}4 \cdot 10^5.}$$

Для определения $\boldsymbol{\rho}$ вычисляем по (4.3.8)

$$\sum \boldsymbol{a_i x_2^{0\text{П}}} = \boldsymbol{472{,}4 \cdot 2{,}08 \cdot 10^5 + 678 \cdot 10^5 = 1664{,}4 \cdot 10^5;}$$

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{1664{,}4}}{\mathbf{638{,}4}} = \mathbf{2{,}61.}$$

По (3.3.9) получаем

$$\boldsymbol{r} = \left[\left(\frac{\mathbf{2{,}08}}{\mathbf{1{,}27}}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{\mathbf{678}}{\mathbf{219}}\right)^2\right]^{\mathbf{1/2}} = \mathbf{3{,}506.}$$

Итак

$$\boldsymbol{r \neq \rho.}$$

Таким образом, необходима следующая итерация.

II итерация

Координаты точки подгонки согласно (3.3.9) равны

$$x_1^{\text{П}} = 4{,}69 \cdot 10^5 + \frac{472{,}4(1{,}27 \cdot 10^5)^2}{638{,}4 \cdot 10^4} \cdot 2{,}61 = 7{,}87 \cdot 10^5;$$

$$x_2^{\text{П}} = 7{,}8 \cdot 10^5 \left(\frac{60}{1{,}2 - 0{,}78} + 208{,}3\right) = 2741{,}2 \cdot 10^5.$$

Нормализация

$$\dot{x}_1 = 7{,}8 \cdot 10^5 - \Phi^{-1}[F_{x_1}(7{,}8 \cdot 10^5)]S_{x_1}.$$

$$F_{x_1}(7{,}8 \cdot 10^5) = exp\left[-exp\left(\frac{7{,}8 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5}{6 \cdot 10^4}\right)\right] = 0{,}99067.$$

$$\Phi^{-1}(0{,}99067) = 2{,}346.$$

$$f_{x_1}(7{,}8 \cdot 10^5) = \frac{1}{6 \cdot 10^4} exp\left(-\frac{7{,}8 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5}{6 \cdot 10^4}\right)$$

$$exp\left[-exp\left(-\frac{7{,}8 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5}{6 \cdot 10^4}\right)\right] = 1{,}546 \cdot 10^7.$$

$$S_{x_1} = \frac{\varphi(2{,}346)}{f_{x_1}(7{,}8 \cdot 10^5)} = 1{,}646 \cdot 10^5.$$

$$\dot{x}_1 = 7{,}8 \cdot 10^5 - 2{,}35 \cdot 1{,}65 \cdot 10^5 = 3{,}94 \cdot 10^5.$$

$$\dot{x}_2 = 2{,}741 \cdot 10^5 - \Phi^{-1}[F_{x_2}(2741{,}2 \cdot 10^5)]S_{x_2}.$$

$$\Phi^{-1}[F_{x_2}(2741{,}2\cdot10^5)] = 10(\ln 2741{,}2-19{,}51) = -0{,}84.$$

$$S_{x_2} = \frac{2741{,}2\cdot10^2}{10} = 274{,}12\cdot10^5.$$

$$\dot{x}_2 = 274{,}2\cdot10^5+0{,}84\cdot274{,}12\cdot10^5 = 2971{,}2\cdot10^5.$$

Центрирование

$$x_1^{0п} = 7{,}8\cdot10^5 - 3{,}93\cdot10^5 = 3{,}86\cdot10^5.$$

$$x_2^{0п} = 2741{,}2\cdot10^5 - 2971{,}2\cdot10^5 = -230\cdot10^5.$$

Коэффициенты $\boldsymbol{a_i}$**:**

$$a_1 = \frac{72\cdot10^{12}}{1{,}2\cdot10^5-0{,}78\cdot10^5} + 208{,}3 = 616{,}33. \quad a_2 = -1$$

Определяем $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{\rho}$**:**

$$S_z = [(616{,}63\cdot1{,}65\cdot10^5)^2+(2{,}74\cdot10^5)^2]^{1/2} = 1051{,}67\cdot10^5.$$

$$\sum a_i x_i^{0п} = 616{,}63\cdot3{,}86\cdot10^5+230\cdot10^5 = 2611{,}9\cdot10^5.$$

$$\rho=\frac{2611{,}9}{1051{,}67} = 2{,}48; \quad r = \left[\left(\frac{3{,}86}{1{,}65}\right)^2 + \left(\frac{230}{27{,}1}\right)^2\right]^{1/2} = 2{,}49 \approx \rho.$$

Вероятность отказа $P_s = 0{,}0064$. Вероятность безотказной работы $P_f = 0{,}9936$.

3.4. Метод статических испытаний

Рассмотрим случай оценки вероятности отказа по частоте события $\boldsymbol{Q > R}$. Ему соответствуют достаточно большое число статистических данных по результатам испытаний по схеме Бернулли, т. е. на каждом испытании генерируются случайные реализации всех исходных величин. При этом выполняется детерминированный расчет значений $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$ как функций реализаций с проверкой условия $\boldsymbol{Q > R}$. При выполнении этого условия исходом испытания считается отказ. Частота $\boldsymbol{\nu}$ появления отказа рассматривается как оценка $\boldsymbol{P_s}$ его вероятности в форме

$$\boldsymbol{\nu = \frac{k}{m} = P_S}, \qquad (3.4.1)$$

где $\boldsymbol{k}$ – число отказов, $\boldsymbol{m}$ – общее число испытаний.

Метод исключительно прост и универсален, но требует обязательного анализа близости оценки $\boldsymbol{\nu}$ к исходной вероятности $\boldsymbol{P_s}$, которая зависит от числа испытаний $\boldsymbol{m}$.

Известные методы такого анализа основаны на следующих предельных теоремах:

- Бернулли, утверждающей, что при $\boldsymbol{m} \to \infty$, $\boldsymbol{\nu} \to \boldsymbol{P_s}$ и имеет асимптотически нормальное распределение;
- Хинчина (закон больших чисел), утверждающей, что при $\boldsymbol{m} \to \infty$ средние частоты $\boldsymbol{\nu}$ стремятся к их математическому ожиданию;
- Линдсберга – Леви (центральная предельная теорема), утверждающая, что средние частоты $\boldsymbol{\nu}$ имеют асимптотически нормальное распределение.

Далее, считая, что число отказов распределено по нормальному закону, в соответствии с теоремами сложения утверждаем – биномиальное распределение устойчиво при сложении независимых величин и сумма взаимно независимых случайных величин имеет нормальное распределение тогда и только тогда, когда все они нормально распределены. Поэтому остается неясным число испытаний, достаточных для использования предельных теорем и принятия асимптотического распределения для построения практических процедур проверки точности и достоверности полученных оценок.

Выяснение достаточного числа испытаний – вопрос дисскусионный. Кроме того, известные процедуры используют асимптотическое распределение частоты $\boldsymbol{\nu}$ и не ставят целью построения доверительного интервала и математического ожидания, а не искомой вероятности. Процедуры достаточно сложны и неубедительны. Это часто приводит к отказу от анализа близости оценки.

В [6] приведена разработанная процедура построения доверительного интервала для вероятности отказа $\boldsymbol{P_s}$, использующая распределение этой вероятности. Следуя [6], опишем суть процедуры.

Число $\boldsymbol{k}$ отказов в $\boldsymbol{m}$ испытаниях при вероятности отказа $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P_s}$ в одном испытании распределяется по биномиальному закону

$$f_{k/p,m}(k) = C_m^k\, p^k (1 - p)^{m-k}. \quad (3.4.2)$$

Это распределение дискретно, поскольку $\boldsymbol{k}$ – целое число. В реальной ситуации известны $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{m}$ и неизвестно $\boldsymbol{p}$.

Возможно предсказать с некоторой вероятностью значение $\boldsymbol{p}$ в каждом из приведенных испытаний. Такое предположение характеризуется плотностью распределения величины $\boldsymbol{p}$, которая выражается формулой (4.4.2) при условии принятия в качестве аргумента не $\boldsymbol{k}$, а $\boldsymbol{p}$ с введением нормирующего множителя χ. Имеем

$$f_{k/p,m}(k) = \chi\, C_m^k\, p^k(1 - p)^{m-k}, \qquad (3.4.3)$$

где нормирующий множитель χ определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_p(p)dp = 1.$$

Легко видеть, что $\chi = m + 1$, и, следовательно, плотность распределения вероятностей (4.4.3) представляется в виде

$$f_{k/p.m}(k) = (m + 1)C_m^k\, p^k(1 - p)^{m-k}\,. \qquad (3.4.4)$$

Выражение (4.4.5) есть бета-распределение (непрерывное распределение).

$$f_p(p) = \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}, \qquad (3.4.5)$$

где положено $(\alpha - 1) = k;\ (\beta - 1) = m - k$.

Для получения границ доверительного интервала для ρ необходимо вычисление значений функции распределения

$$F_{p/k,m}(p) = 1 - F_{k/p,(m+1)}(k), \qquad (3.4.6)$$

где $F_{p/k,m}$ – функция распределения $\boldsymbol{p}$ при заданных $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{m}$ (бета-распределение), $F_{k/p,(m+1)}$ – функция распределения $\boldsymbol{k}$ при заданных $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{p}$ (биномиальное распределение).

Для вычисления функции биномиального распределения при больших $\boldsymbol{m}$, малых $p(p < 0{,}1)$, конечных $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{p}$ воспользуемся пуассоновским приближением

$$f_{k/p,m}(k) = C_m^k\, p^k(1 - p)^{m-k} \approx \frac{(mp)^k}{k!}e^{-mp}. \qquad (3.4.7)$$

В нашем случае имеем

$$1 - F_{p/k,m}(p) = F_{k/p,(m+1)}(k) = \sum_{i=1}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=0}^{k} f_k(i), \qquad (3.4.8)$$

$\lambda = m + 1$, а $f_k(i)$ вычисляется по рекуррентной формуле

$$f_k(i) = \frac{\lambda}{i}\, f_k^{i-1}; \qquad f_k(0) = e^{-\lambda}. \qquad (3.4.9)$$

По существу решение задачи сводится к построению функции $F_{\lambda/k}(\lambda)$, из которой преобразованием $\lambda = (m + k)k$ можно получить функции $F_{p/\kappa}(p)$ для любого m. По этой функции определяются квантили вероятности γ. Имеем $\lambda_\gamma = F^{-1}_{\lambda/k}(\gamma)$ при доверительных коэффициентах $\eta_\gamma(k) = \frac{\lambda\gamma}{k}$. Произведение $\eta_\gamma v_1$ есть граница доверительного интервала, соответствующая достоверности γ, где $v_1 = \frac{k}{m+1}$.

При больших m и малых k имеем $v_1 = v$. В таблице 3.1 приведены значения $\eta_{0,95}$ и $\eta_{0,99}$ в зависимости от числа отказов k.

Покажем практическое использование метода статических испытаний.

Пусть проведено 5000 испытаний при числе отказов $k = 20$. Частота отказов $v = 0,004$. С доверительной вероятностью $0,95$ λ можно утверждать, что

$$P_s \leq \eta_{0,95}; \ \ v = 1,45312 \cdot 0,04 = 0,005812,$$

а с вероятностью 0,99

$$P_s \leq \eta_{0,99}; \ \ v = 1,65525 \cdot 0,04 = 0,00622.$$

Доверительные коэффициенты η зависят только от числа зафиксированных отказов k и не зависят от числа испытаний. Это открывает возможность составления полной таблицы практически необходимых значений коэффициентов. Процедура анализа результатов статистического моделирования становится простой и выражается формулой

$$P_{rob}\{P_s \leq \eta_\gamma v_1\} = \gamma. \qquad (3.4.10)$$

Задача определения необходимого числа испытаний может быть решена путем задания мнимого доверительного коэффициента с выполнением испытаний для получения соответствующего числа отказов.

Известно [1], что теоретически исходное значение любой характеристики, определяющей случайную величину, может быть оценено при бесконечно большом числе испытаний N. В инженерных исследованиях строительных конструкций, где требуются высокие уровни надежности порядка 0,999...0,9999, приходится иметь дело с малыми значениями вероятности отказа и анализировать «хвосты» функций распределения параметров. Эти «хвосты» определяются с достаточной степенью точности при $N \geq 10^6 ... 10^9$ (в зависимости от типа задачи).

Таким образом, основная сложность задачи, решаемой методом статистических испытаний, заключается в длительности проводимых расчетов. Конечно, развитие средств вычислительной техники сводит на нет указанную сложность. Поэтому целесообразно привести алгоритм расчета надежности строительных конструкций методом статистических испытаний: все параметры конструкции $R_1, ..., R_n$ и нагрузки $Q_1, ..., Q_n$, обладающие изменчивостью, считаются случайными величинами с известными законами распределения, которые задаются численно, с помощью генераторов случайных чисел; при этом предполагается известным детерминированный метод расчета конструкций, а отказом считается невыполнение принятого основного расчетного усилия.

Определение частоты отказов и построение гистограммы функции резерва прочности осуществляется по следующему алгоритму:

- методом статистического моделирования, согласно известным законам распределения, назначаются n реализаций случайных величин параметров конструкций и нагрузок $R_{1e}, ..., R_{mi}; Q_{1e}, ..., Q_{mi}$ $(i = 1, …, n)$;
- производится n детерминированных расчетов строительных конструкций, согласно выбранному методу, при этом n раз определяется значение функции резерва прочности g;
- при значении $g < 0$ фиксируется отказ, а частота отказов вычисляется по (4.4.1);
- сравнивается полученная частота отказов с заданной вероятностью отказов P_s, изменяя один из параметров (например, процент армирования для железобетонных конструкций), возвращаясь ко второму шагу, повторяем вычисление методом итераций до достижения нужной частоты отказов;
- строятся гистограммы относительных частот функции распределения резерва прочности на интервале, равном m

стандартам g, причем правая и левая границы интервала лежат на расстоянии $m/2$ стандартов вправо и влево от математического ожидания.

Метод статистических испытаний с достаточной степенью точности дает оценку вероятности безотказной работы строительных конструкций. Громоздкость метода нивелируется использованием современных средств вычислений. Применяемый подход к определению верхней оценки доверительного интервала для величины оценки вероятности отказа является простым и достаточно эффективным. Указанный подход позволяет производить нормирование необходимого числа отказов. По этому числу по таблице 4.1 получают коэффициент $\eta_{0,95}$ и $\eta_{0,99}$, на которую умножается вероятность отказа для получения верхней границы доверительного интервала, которая не будет превышена с вероятностью соответственно 0,95 и 0,99.

Недостатком описанного алгоритма считается необходимость большого числа испытаний при оценке малых вероятностей P_s. На каждом испытании выполняется сложный детерминированный расчет и тогда метод оказывается неэффективным.

3.5. Метод Монте-Карло

Сравнительно с изложенным выше методом, меньший разброс оценки вероятности отказа дает метод статистического моделирования, называемый методом Монте-Карло. В соответствие этому интеграл (3.5.1) рассматривается как математическое ожидание функции F_R, а несмещенной эффективной оценкой математического ожидания является среднее выборочное значение.

Поэтому

$$P_s = \int_0^\infty F_R(x) f_Q(x)dx = F_R(Q) \approx \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} F_R(Q_i), \qquad (3.5.1)$$

где, как и выше, m – число испытаний.

Итак, на каждом испытании по точности вероятности величины Q моделируется ее реализация Q_i и находится значение функции распределения R при аргументе Q с достаточным определением средних значений по всем приведенным испытаниям.

Пусть величина Q есть функция нескольких переменных

$$Q = \varphi_Q(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad (3.5.2)$$

На каждом испытании по плотностям вероятностей величины q_i моделируются их реализации q_{ij}, вычисляются их значения и далее – как в одномерном случае.

Величина R может быть функцией нескольких переменных

$$R = \varphi_R(r_1, r_2, \ldots, r_n) \tag{3.5.3}$$

Функция распределения R должна быть получена заранее в аналитической форме или как результат статистической обработки данных физического или математического моделирования.

Выражение (3.5.1) представимо в виде

$$33P_s = \int_0^\infty \left[1 - F_Q(x)\right] f_R(x)dx = |1\text{-}\dot{F}_Q(R)| \approx \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[1 - F_Q(R_i)\right]. \tag{3.5.4}$$

В этом случае заранее должна быть известна функция распределения величины Q, а значения R моделируются по их плотности вероятности.

Преимуществами метода является простота эффективности сравнительно с методом оценки вероятности по частоте.

Недостаток метода заключается в том, что в многомерном случае одна из функций распределения величин R и Q должна быть известна заранее. Кроме этого, анализ точности и достоверности результата приходится выполнять с использованием асимптотических распределений получаемой оценки, а не искомой вероятности как в методе статистических испытаний. Для этого используются более сложные и менее эффективные известные процедуры.

Пример. Рассмотрим пример, который исследовался в предыдущих разделах.

Имеем

$$P_s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} F_{\sigma_T}(N_i).$$

Моделируем значение нормальной силы N. Для этого используем датчик случайных чисел с равномерным распределением в интервале [0,l] и преобразование с помощью функции распределения $F_N(N)$.

Датчик дал первое случайное число $\xi = 0{,}084.$ Теперь

$$F_n(N_i) = exp\left[-exp\left(-\frac{5\cdot 10^5}{6\cdot 10^6}\right)\right] = 0{,}084.$$

$$N_1 = 6\cdot 10^4[-ln(-ln0{,}084)]+5\cdot 10^5 = 4{,}4549\cdot 10^5 H.$$

Находим предел текучести из условия его равенства напряжению в крайнем волокне силы N_1

$$\sigma_{T1} = N_1\left(\frac{60\cdot10^6}{1{,}2\cdot10^6} + 208{,}3\right) = 1281{,}7\cdot10^5 Па.$$

Этому значению предела текучести соответствует значение функции распределения:

$$F_{\sigma_T}[\sigma_{T1}(N_1)] = \Phi[10(\ln\sigma_T - 19{,}51)] = \Phi(-8{,}48) = 1 - \Phi(-8{,}48) = 0.$$

Операцию проводим 1000 раз и находим среднее значение:

$$P_s = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} F_{\sigma_{T1}}(N_i) = 0{,}0049.$$

Оценим теперь точность и достоверность, которая является необходимой операцией во всех статистических методах.

Для этого формируем и рассчитываем 20 выборок из 1000 испытаний и получаем 20 значений оценки вероятности отказа P_s. Последнюю рассматриваем как случайную величину, математическое ожидание которой есть P_s. При известном среднеквадратичном отклонении для нахождения доверительного интервала используем критерий Стьюдента:

$$v = \pm\, t_p\left(\frac{\sum_{i=1}^{M} P_{S_i}^2 - MP_{S_i}^2}{M(M-1)}\right)^{1/2}.$$

Различным значениям t_p соответствуют различные значения доверительной вероятности $p(t)$. В нашем случае $M = 20$ и, используя вероятность P_s, оценивается так:

$$P_s = \dot{P}_s \pm t_p\frac{\sum_{i=1}^{20} P_{S_i}^2 - 20\dot{P}_{S_i}^2}{20\cdot19}.$$

В таблице 2.1 представлены результаты расчетов 20 значений оценки P_{S_i} по выборкам объема 1000. В таблице 3.1 представлены значения доверительного интервала для различных значений доверительной вероятности.

Среднее значение оценки $\dot{P}_{S_i}$ по 2000 испытаний равно 0,0058. Например, для доверительной вероятности $p(t)$ = 0,95 можно ожидать, что

$$P_s = 0{,}0580 \pm 0{,}00034 \text{ или } 0{,}00613 > P_s > 0{,}00545.$$

Если ширина доверительного интервала слишком велика, то следует увеличить объем выборок или их число. Среднее значение выборки $\boldsymbol{P_{S_i}}$ ***= 57317E-02.***

Таблица 3.1 – Значения вероятности наступления текучести в крайних волокнах

85333 E-02	64393 E-02	50887 E-02	46491 E-02
67381 E-02	63440 E-02	50115 E-02	42542 E-02
66616 E-02	57279 E-02	50007 E-02	37344 E-02
66438 E-02	55120 E-02	49169 E-02	33797 E-02
66137 E-02	53909 E-02	48898 E-02	10305 E-02

Таблица 3.2 – Оценка доверительно интервала с использованием критерия Стьюдента

Доверительная вероятность *p(t)*	Доверительный интервал	Доверительная вероятность *p(t)*	Доверительный интервал
99000	35525E-03	93000	33372E-03
98000	35167E-03	92000	33013E-03
97000	34808E-03	91000	32655E-03
96000	34449E-03	90000	32655E-03
95000	34090E-03	89000	31937E-03
94000	33731E-03	88000	31578E-03

3.6. Модифицированный метод Монте-Карло

Одним из способов повышения эффективности метода Монте-Карло является уменьшение дисперсии оценки, которая достигается стратификацией моделируемой выборки, например, выборки значений $\boldsymbol{Q_i}$, при использовании (3.5.1). Для этого интервал интегрирования разбивается на $\boldsymbol{n}$ классовых интервалов

$$\boldsymbol{Ps} = \int_0^\infty \boldsymbol{F_R(x)f_Q(x)dx} = \sum_{j=1}^{n} \int_{Q_{j=1}}^{Q_i^*} \boldsymbol{F_R(x)f_Q(x)dx} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\int_{Q_{j=1}^*}^{Q_i^*} \boldsymbol{f_Q\,(x)dx}\right)\left[\dot{\mathrm{F}}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{Q_j})\right]_j = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P_{Q_i}}\left[\dot{\mathrm{F}}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{Q_j})\right]$$
$$\approx \sum_{i=1}^{mj} \boldsymbol{F_R(Q_{ij})} \qquad (3.6.1)$$

где $\boldsymbol{P_{Q_j}}$ – вероятность попадания величины $\boldsymbol{Q}$ в $\boldsymbol{j}$-ый классовый интервал; $\dot{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{(Q_j)}$ – математическое ожидание функции $\boldsymbol{F_R\ (Q)}$ при условии нахождения $\boldsymbol{Q}$ в $\boldsymbol{j}$-ом классовом интервале $\boldsymbol{Q^*_{j-1}} < \boldsymbol{Q_j} < \boldsymbol{Q^*_j}$, $\boldsymbol{m_j}$ – число реализаций величины $\boldsymbol{Q}$, попавших в $\boldsymbol{j}$-ый классовый интервал; $\boldsymbol{Q_{ij}}$ – $\boldsymbol{i}$-ая реализация случайной величины $\boldsymbol{Q}$ в $\boldsymbol{j}$-ом классовом интервале.

Понятно, что при таком походе дисперсия оценки резко уменьшается, поскольку является суммой весьма малых дисперсий случайных величин, ограниченных на одном классовом интервале. Однако при вычислении малых вероятностей классовые интервалы, дающие основной вклад в оценку (3.6.1), лежат в области маловероятных значений величины $\boldsymbol{Q}$. Поэтому значительная часть выборки оказывается ненужной и необходимое число реализаций будет большим.

Этот недостаток исправим модификацией метода Монте-Карло, в которой непосредственно формируется стратифицированная выборка только на нужных классовых интервалах и с заданными объемами классовых выработок. Для этого модифицируются ограниченные случайные величины $\boldsymbol{Q^*_{j-1}} < \boldsymbol{Q_j} < \boldsymbol{Q^*_j}$ с плотностями распределения вероятностей

$$\boldsymbol{f_Q(x) = \frac{1}{P_{Q_1}} f_{Q_j}(x).} \tag{3.6.2}$$

Преимуществом метода является высокая вычислительная эффективность. Недостаток заключается в более сложной, чем в прямом методе Монте-Карло, процедуре формирования выборок. Кроме того, при решении многомерных задач не всегда просто выделить нужные классовые интервалы для исходных величин. Анализ точности и достоверности выполняется аналогично прямому методу Монте-Карло и создает те же затруднения.

Пример. Проанализируем ту же задачу, которая решалась в предыдущих главах.

Имеем

$$\boldsymbol{P_s = \sum_{j=1}^{n} P_{N_j} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} F_{\sigma_T}\left[\sigma_T(N_{ji})\right].}$$

Определяем интервал интегрирования ($\boldsymbol{N_Л, N_П}$). Правая граница $\boldsymbol{N_П}$ устанавливается из условия

$$F_N(N_П) = 0{,}9999 \rightarrow N_П = F_N^{-1}(0{,}9999) =$$
$$= 6\cdot 10^4\ [-ln(-ln0{,}9999) + 5\text{-}10^5] = 10{,}5\cdot 10^5 H.$$

Для левой границы $N_Л$ имеем условие

$$F_{\sigma_T}[\sigma_T(N_Л)] = 0{,}0001 \rightarrow F_{\sigma_T}[\sigma_T(N_Л)] =$$
$$= \Phi\{10[ln\sigma_T(N_Л)]\text{-}19{,}51\} = -\ 3{,}72 \rightarrow \sigma_T(N_Л) = 2055.$$

Уравнение $g = 0$ дает

$$N_Л\left(\frac{60\cdot 10^6}{1{,}2\cdot 10^6 - N_Л} + 0{,}0208\right) = 2055\cdot 10^5 \rightarrow N_Л = 6{,}5\cdot 10^5 H.$$

Разбиваем интервал интегрирования на четыре классовых интервала (j – 1, 2, 3, 4) с левыми границами:

$$N_1 = N_Л = 6{,}5\cdot 10^5;\ N_2 = 7{,}5\cdot 10^5;\ N_3 = 8{,}5\cdot 10^5;\ N_4 = 9{,}5\cdot 10^5.$$

Определяем значения функций распределения на границах интервала

$$F_N(N_1) = exp\left(-exp\frac{6{,}5\cdot 10^5 - 5\cdot 10^5}{0{,}6\cdot 10^5}\right) = 0{,}9212.$$

Аналогично

$$F_N(N_2) = 0{,}9846;\ F_N(N_3) = 0{,}9971;$$
$$F_N(N_4) = 0{,}9994;\ F_N(N_5) = 0{,}9994, \text{ где } N_5 = N_П.$$

Вероятности попадания значения нагрузки в классовые интервалы равны

$$P_{N_1} = F_N(N_2) - F_N(N_1) = 0{,}0634,$$
$$P_{N_2} = 0{,}0125;\ P_{N_3} = 0{,}0023;\ P_{N_4} = 0{,}0005.$$

Для каждого из классовых интервалов моделируем свою выборку объемом m с помощью датчика равномерно распределенных случайных чисел. Случайные значения нагрузки N_{ij} для j-го классового интервала определяем как функцию случайного числа ξ_{ij}:

$$N_{ij} = F_N^{-1}\{F_N(N_j) + [F_N(N_{j+1})\text{-}\ F_N(N_j)\ \xi_{ij}]\} =$$
$$= F_N^{-1}\{F_N(N_j) + P_{N_j}\xi_{ij}\} = F_N^{-1}[F_N(N_{ij})].$$

Значение предела текучести определяем из условия $g = 0$, которое имеет вид

$$\sigma_T(N_{ji}) = N_{ji}\left(\frac{60\cdot 10^6}{1{,}2\cdot 10^6 - N_{ji}} + 208{,}3\right).$$

Значение функции распределения:

$$F_{\sigma_T}[\sigma_T(N_{ji})] = \Phi\{10[\ln\sigma_T(N_{ji})\text{-}19{,}51]\}.$$

Производя эту операцию m раз для каждого классового интервала, получаем оценку вероятности отказа P_s.

Анализ точности при заданной достоверности так же, как и для обычного метода Монте-Карло.

4. НАДЕЖНОСТЬ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

4.1. Анализ надежности внецентренно-сжатого железобетонного элемента

При решении задачи будем руководствоваться расчетными формулами, принимаемыми по действующим нормам проектирования железобетонных конструкций [80]. При этом отказом считается невыполнение требования по прочности с привлечением метода статистических испытаний. С учетом затрат машинного времени принимаем количество реализаций случайных величин на каждом шаге метода статистических испытаний равным $\boldsymbol{n}$ = 1000. По результатам вычислений строятся гистограммы функций распределения несущей способности и резерва прочности. Указанные гистограммы строятся на интервале, равном 10 стандартам $\boldsymbol{S_g}$, причем правая и левая границы интервала лежат на расстоянии 5 стандартов вправо и влево от математического ожидания $\boldsymbol{g}$.

Считаем, что решению подлежат следующие задачи:

- определение обеспеченности несущей способности железобетонного внецентренно-сжатого стержня прямоугольного поперечного сечения, запроектированного по действующим нормам;
- определение величины несущей способности с заданной обеспеченностью;
- определение процента армирования для заданной обеспеченности несущей способности;
- определение внешней нагрузки при заданной вероятности отказа;
- определение процента армирования при заданной вероятности отказа.

При выполнении детерминированного расчета использовалась зависимость между напряжением в растянутой арматуре и относительной высотой сжатой зоны бетона в соответствии

[11]. Расчет сечений, аномальных к продольной оси железобетонного стержня, при действии внешней силы в плоскости оси симметрии сечения осуществляем в зависимости от соотношения между величиной относительной высоты сжатой зоны бетона $\xi = x/h_0$ и граничным значениям относительной высоты сжатой зоны ξ_R. При этом арматура сосредоточена у перпендикулярных к плоскости симметрии граням элемента.

Имеем

$$N \cdot e \leq R_b bx(h_0 - 0,5x) + R_{SC}A'_S(h_0 - a'), \qquad (4.1.1)$$

где обозначено: $e = e_0\eta + \frac{h}{2} - a$; R_b – расчетное сопротивление бетона сжатию; R_{sc} – расчетное сопротивление арматуры сжатию; A'_s – площадь поперечного сечения сжатой или наименее растянутой арматуры; η – коэффициент продольного изгиба.

Высота сжатой зоны удовлетворяет условиям

$$\xi = \frac{x}{h_0} \leq \xi_R;\ N = R_b xb + R_{SC}A'_S - R_S A_S;$$

$$\xi = \frac{x}{h_0} \leq \xi_R;\ N = R_b xb + R_{SC}A'_S - \sigma_S A_S. \qquad (4.1.2)$$

где R_s – расчетное сопротивление арматуры растяжению; A_s – площадь поперечного сечения растянутой арматуры; σ_s – напряжение в растянутой или наименее сжатой арматуре.

При использовании бетонов класса не выше ВЗО и не напрягаемой арматуры классов A-I, A-II, A-III напряжение σ_s определяется по формуле

$$\sigma_s = \left[2\frac{1-\xi}{1-\xi_R} - 1\right]R_S, \qquad (4.1.3)$$

где ξ_R – граничная относительная высота сжатой зоны бетона, вычисляемая так:

$$\xi_R = \frac{\omega}{1+\frac{\sigma_{SR}}{\sigma_{SCU}}\left(1-\frac{\omega}{1,1}\right)}, \qquad (4.1.4)$$

причем ω – характеристика сжатой зоны бетона.

Согласно [6] имеем $\omega = 0,85 - 0,008R_b$; $\sigma_{SR} = R_s$; $\sigma_{SCU} = 500$ МПа.

Для элементов из бетона класса выше В30 с арматурой классов выше A-III (напрягаемой и ненапрягаемой) для напряжения σ_s рекомендуемая зависимость

$$\sigma_S = \sigma_{SR} + \sigma_{SCU}\left(\frac{\omega}{\xi} - 1\right)\left(1 - \frac{\omega}{1,1}\right). \qquad (4.1.5)$$

Гибкий внецентренно-сжатый элемент под влиянием момента прогибается, вследствие чего начальный эксцентриситет e_o – предельной силы N увеличивается. При этом изгибающий момент возрастает, и разрушение наступает при меньшей продольной силе N сравнительно с коротким (негибким) элементом.

Нормами [11] рекомендуется расчет таких элементов выполнять по деформированной схеме. Допускается гибкие внецентренно сжатые элементы при гибкости $l_o/l > 14$ рассчитывать с учетом эксцентриситета, получаемого умножением начального его значения e_o на коэффициент $\eta > 1$.

Величина коэффициента η устанавливается по зависимости

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}}, \qquad (4.1.6)$$

где выражение для критической силы N_{cr} при прямоугольном сечении с симметричным армированием $A_s = A'_s$ (без предварительного натяжения) имеет вид

$$N_{cr} = \frac{6LE_bA}{l_0^2}\left[\frac{r^2}{\varphi_1}\left(\frac{0.11}{0,1+\delta} + 0,1\right) + \alpha\mu_1\left(\frac{h}{2} - a\right)^2\right]. \qquad (4.1.7)$$

Здесь E_b – начальный модуль упругости бетона; $A = bh$ – площадь поперечного сечения стойки; l_0 – расчетная длина стойки; r – радиус лора** сечения [8] (r = 0,289h для прямоугольного сечения); φ_1 – коэффициент, учитывающий влияние длительного действия нагрузки на прогиб элемента в предельном состоянии (для тяжелого бетона $\varphi_1 = 1 + \frac{M_{1,1}}{M_1}$, где $M_{1.1}$ и M_1 – моменты соответственно от длительной и полной нагрузок относительно оси, проходящей через центр тяжести наименее сжатой (растянутой арматуры); δ – принимается наибольшим из двух значений:

$\delta = e_o/h$ и $\delta = 0,5\text{-}0,01 1l_o - R_b$; $\alpha = E_S/E_b$ – отношение модулей упругости арматуры и бетона; $\mu_1 = 2A_S / A$ – коэффициент армирования;

Для нахождения предельной несущей способности можно предложить следующий алгоритм решения.

Предполагаем, что $\xi \le \xi_R$, а предельная несущая способность N^* тогда определится из совместного решения уравнений (4.1.1) и (4.1.2). Далее проверяется условие $\xi \le \xi_R$. Если оно нарушается, то предельная несущая способность N^* устанавливают при условии $\xi \le \xi_R$.

При анализе надежности внецентренно сжатого элемента средние значения расчетного сопротивления бетона R_b и среднеквадратичное отклонение S_R призменной прочности бетона равны

$$R_b = \frac{R_b^{\text{н}}}{1{,}07(1-\vartheta_b)}\,;\; S_{R_b} = \bar{\underset{\bullet}{R}}_b \vartheta_b. \qquad (4.1.8)$$

При вычислении средних значений и среднеквадратичных отклонений арматуры рекомендуется [11] использовать соотношения

$$\bar{\underset{\bullet}{R}} = \frac{R_S^H}{1-1{,}64\vartheta_S};\; S_{R_S} = \bar{\underset{\bullet}{R}}_S \vartheta_S. \qquad (4.1.9)$$

Рассмотрим теперь задачу определения обеспеченности несущей способности железобетонного сжатого стержня прямоугольного поперечного сечения, запроектированного по действующим нормам [11].

Определим величину предельной несущей способности из совместного рассмотрения соотношений (4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.6, 4.1.7) и замененного на знак равенства(4.1.1):

$$\check{N} \cdot e = R_b b x (h_0 - 0{,}5x) + R_{sc} A'_s (h_0 - a').$$

В формуле (4.1.7) положим $\varphi_l = 1$, т. е. предположим отсутствие длительно действующих нагрузок. Кроме этого, считаем случайный эксцентриситет приложения продольной силы равным минимально допустимому значению $e_0 = 1$ *см*.

Проведем вероятностный расчет данного стержня методом статистических испытаний и определим величину обеспеченности несущей способности.

В качестве случайных величин принимаем прочность бетона $\bar{\underset{\bullet}{R}}_b$, прочность арматуры $\bar{\underset{\bullet}{R}}_s$ и эксцентриситет приложения продольной силы e_0.

За отказ принимаем невыполнение основного расчетного положения

$$N_{СНиП} \le \dot{N}_{вер} \qquad (4.1.10)$$

где $N_{СНиП}$ – несущая способность, полученная расчетным путем; $\dot{N}_{вер}$ – случайная несущая способность.

Значение $\dot{N}_{вер}$ получается из совместного рассмотрения записанных уравнений. Полученную в результате вероятностного расчета частоту отказов v примем в качестве оценки вероятности отказа конструкции P_s.

Тогда обеспеченность несущей способности P_f будет равна

$$P_f = 1 - P_s. \qquad (4.1.11)$$

Пример. Рассмотрим задачу определения обеспеченности несущей способности шарнирно опертого железобетонного стержня, запроектированного по нормам [11].

Стержень имеет квадратное сечение $h = b = 0,3$ *м*. Длину стержня принимаем равной $l = 4,8$ *м;* коэффициент армирования $\mu_1 = 0,025$.

Расчет, произведенный по СНиП [11], дает значение предельной несущей способности $N_{СНиП} = 1718,25$ кПа.

Произведем теперь вероятностный расчет и определим частоту отказов в соответствие выбранному критерию отказа.

Для случайного сопротивления бетона и арматуры принимаем нормальный закон со следующими параметрами распределения:

- для арматуры класса А-III $\bar{R}_s = 466,5$ МПа, $S_{Rs} = 45,1$ МПа;
- для класса бетона по прочности на сжатие В20 $\bar{R}_b = 19,2$ МПа, $S_{Rb} = 2,59$ МПа.

Случайный эксцентриситет также принимаем распределенным по нормальному закону. Математическое ожидание эксцентриситета принимаем равным $e_0 = 0$. В [3] приводятся статистические данные по наблюдаемым значениям относительных эксцентриситетов $S_{e_{OTH}} = 0,34$. Относительный эксцентриситет равен $e_{OTH} = e_0 / \rho$ (ρ – ядровое расстояние сечения). Стандарт случайного эксцентриситета можно определить как $S_{e_0} = S_{e_{JNY}} * \rho$.

Количество испытаний принимаем равным 10000. Вычисленная частота отказов составляет $v = 0,0042$.

Таким образом, обеспеченность несущей способности запроектированного по нормам железобетонного каркаса составляет $P_f = 1 - 0,0042 = 0,9958$.

Приведен порядок расчета по определению требуемого значения несущей способности N^* стержня при заданной обеспеченности $P_{зад}$.

Основное вероятностное расчетное условие

$$N^* \leq \dot{N}. \qquad (4.1.12)$$

В качестве критерия отказа принимаем невыполнение условия (4.1.12). Методом статистических испытаний устанавливается частота отказов ν. Принимаем частоту отказов ν равной вероятности отказа P_1 и находим обеспеченность несущей способности $P_f = 1 - P_s$. Сравниваем полученное значение P_f с $P_{зад}$. Изменяем N^* и методом итераций добиваемся выполнения условия $P_f = P_{зад}$. Полученное таким образом значение N^* и является искомой величиной несущей способности при заданной обеспеченности $P_{зад}$.

Рассмотрим пример определения величины несущей способности стержня заданной обеспеченности. Все исходные данные отвечают предыдущему примеру. В результате расчета получено, что для рассматриваемого стержня обеспеченность $P_{зад} = \mathbf{0{,}9999}$ соответствует несущая способность $N^* = 1540kH$.

Таблица 4.1.1 – Результаты расчета несущей способности стержня

Несущая способность, $N_{зад}$, *кН*	Обеспеченность несущей способности, P_f^*	Несущая способность, $N_{зад}$, *кН*	Обеспеченность несущей способности, P_f^*
1550	0,9999	1850	0,9844
1600	0,9993	1900	0,9774
1650	0,9986	1950	0,9661
1700	0,9959	2000	0,9496
1750	0,9943	2500	0,4365
1800	0,9909	3000	0,0135

Используя приведенный выше алгоритм, можно решить обратную задачу – для заданной несущей способности $N_{зад}$ определяется ее обеспеченность P_f^*. Для этого последовательно следует задать значения $N_{зад}$ и каждый раз находить соответствующую этой несущей способности обеспеченность.

В таблице 4.1.1 приведены результаты расчетов для принятого к рассмотрению стержня.

Приведен алгоритм решения задачи по определению коэффициента армирования железобетонного стержня μ_1, соответствующего заданной обеспеченности несущей способности $P_{зад}$. Значение самой несущей способности остается постоянным. В качестве критерия отказа принимаем невыполнение условия (4.1.12).

1. Задаемся коэффициентом армирования $\mu_1 = 2A_s/bh$.

2. Методом статических испытаний определяем частоту отказов ν.

3. Принимаем $\nu = P_s$.

4. Определяем обеспеченность несущей способности $P_f = 1 - P_s$.

5. Сравниваем полученное значение P_f с $P_{зад}$.

6. При расхождении изменяем значение μ_1, возвращаемся к п. 2 и методом итераций продолжаем расчет до выполнения условия $P_f = P_{зад}$.

Найденное значение μ_1 является искомой величиной коэффициента армирования, соответствующее заданной обеспеченности $P_{зад}$.

Таблица 4.1.2 – Результаты коэффициента армирования μ_1.

Коэффициент армирования, μ_1	Обеспеченность несущей способности, P_f^*	Коэффициент армирования, μ_1	Обеспеченность несущей способности, P_f^*
0,030	0,9993	0,010	0,7463
0,025	0,9958	0,005	0,4121
0,020	0,9819	0,001	0,1590
0,015	0,9228	0,000001	0,1156

Приведем численный пример. Для принятого стержня при несущей способности $N = 1718{,}25\ kH$ обеспеченность $P_{зад} = 0{,}95$ соответствует коэффициенту армирования $\mu_1 = 0{,}017$. Используя приведенный алгоритм, решим обратную задачу: для заданного коэффициента армирования μ_1 определим обеспеченность P_f несущей способности $N = 1718{,}25\ kH$. Результаты расчета приведены в таблице 4.1.2.

Анализ полученных результатов показывает, что при коэффициенте армирования $\mu_1 = 0$ обеспеченность несущей способности становится равной 0,115. Это означает наличие вклада, вносимого бетоном в несущую способность.

4.2. О надежности железобетонного каркасного здания

Серьезным недостатком применяемого при расчете конструкций метода предельных состояний следует считать невозможность оценки надежности конструкций и, тем более, проектирования их с заданным уровнем надежности. Основным требованием указанного метода, как известно, является сравнение расчетных значений нагрузки и несущей способности. Иными словами, задача вероятности безотказной работы конструкции за заданный промежуток времени остается вне рассмотрения.

С девяностых годов в Западной Европе ведется работа по созданию европейских норм проектирования [3–6]. Основные положения этих норм базируются на разработанном с участием российских исследователей Техническим комитетом (ТК98) международной организации по стандартизации (ИСО) стандарта ИСО 2394 «Основные положения расчета строительных конструкций на надежность». Основу стандарта составляет метод расчета по предельным состояниям, названный методом частных коэффициентов надежности.

В европейских нормах нашел отражение накопленный отечественный опыт проектирования. Это выражается в значениях частных коэффициентов надежности и расчетных параметрах прочности и нагрузок.

Рассмотрим задачу составления уровня надежности конструкций, проектируемых по отечественным и европейским нормам с применением вероятностных методов.

В качестве примеров сопоставления примем 7- и 4-этажные железобетонные каркасные здания с подвальными этажами, имеющие размер в плане 22,5 × 30 м и сетку колонн 7,5 × 7,5 .

Высота этажей принята 3,75 м. Ригели продольных рам четырехпролетные на опорах жестко соединены со средними колоннами и шарнирно с наружными колоннами. Поперечное сечение колон 40 × 40 см. В поперечном направлении жесткость здания обеспечивается вертикальными связями.

4.3. Проектирование железобетонного каркасного здания по отечественным и европейским нормам

За отказ в работе конструкции здания принимаем исчерпание несущей способности средней колонны первого этажа. Для расчета выбрана средняя колонна, поскольку приходящаяся на её долю грузовая площадь больше, чем на крайнюю колонну.

А. Отечественные нормы

При расчетах средней колонны прямоугольного сечения, согласно СНиП «бетонные и железобетонные конструкции» [1], исходим из основного расчетного положения

$$Ne \leq R_b bx(h_0 - 0.5x) + R_{sc}A'_s(h_0 - a'). \tag{4.3.1}$$

Здесь

$$e = e_o\eta + \frac{h}{2} - a,$$

где R_b – расчетное сопротивление бетона сжатию; R_{sc} – расчетное сопротивление арматуры сжатию; A'_s – площадь поперечного сечения сжатой или наименее растянутой арматуры; a – защитный слой бетона; h_0 – рабочая высота сечения $h_0 = h\text{-}a$; η – коэффициент, учитывающий увеличение изгибающего момента в результате продольного изгиба.

Высоту сжатой зоны x определяют из следующих уравнений:

$$N = R_b x\delta + R_{SC}A'_S - R_S A_S \text{ при } \xi = x/h_0 < \xi_R;$$

$$N = R_b x\delta + R_{SC}A'_S - \sigma_s A_s \text{ при } \xi = x/h_0 > \xi_R,$$

где R_s – расчетное сопротивление арматуры растяжению; A_s – площадь поперечного сечения растянутой арматуры; σ_s – напряжение в растянутой или наименее сжатой арматуре, определяемое по формуле

$$\sigma_s = [2(1-\xi)/(1-\xi_R)]R_S, \tag{4.3.2}$$

причем ξ_R – граничная относительная высота сжатой зоны бетона, для которой имеем

$$\xi_R = \frac{\omega}{1+\frac{\sigma_{SR}}{\sigma_{SCU}}\left(1-\frac{\omega}{1.1}\right)}, \tag{4.3.3}$$

где $\omega = 0.85 - 0.008R_b$ – характеристика сжатой зоны бетона [1], $\sigma_{SR} = R_S$; σ_{SR} = 500 МПа.

Значение коэффициента η устанавливается из известной зависимости

$$\eta = \frac{1}{1-\frac{N}{N_{cr}}}. \tag{4.3.4}$$

Выражение для критической продольной силы N_{cr} при прямоугольном сечении с симметричным армированием (без предварительного напряжения) имеет вид

$$N_{cr} = \frac{6.4E_bA}{l_0^2}\left[\frac{r^2}{\varphi_1}\left(\frac{0.11}{0.1+\delta}+0.1\right)+\alpha\mu\left(\frac{h}{2}-a\right)^2\right], \tag{4.3.5}$$

где E_b – начальный модуль упругости бетона; $A = bh$ – площадь поперечного сечения колонн; l_0 – расчетная длина элемента (расчетную длину колонн многоэтажных зданий при жестком соединении ригелей с колонами в сборных перекрытиях принимается равной высоте этажа; $r = 0{,}289h$ – радиус ядра сечения; φ_1 – коэффициент, учитывающий влияние длительного действия нагрузки на прогиб элемента в предельном состоянии (для тяжелого бетона $\varphi_1 = 1+\frac{M_{1,1}}{M_1}$); δ – принимается наибольшим из двух значений $\delta = l_0 / h$ или δ = 0,5–0,0 1l_0 - R; $\alpha = \frac{E_S}{E_b}$ – отношение модулей упругости арматуры и бетона; $\mu = \frac{2A_S}{A}$ – коэффициент армирования.

Б. Европейские нормы

Расчет железобетонной колонны по европейским нормам производим с использованием [9].

Основным расчетным уравнением является

$$\frac{1}{2}\left[A_S f_{yd}(h-2d_1)+\frac{hN_d(1-N_d)}{\alpha bhf_{cd}}\right]-M_d > 0 \tag{4.3.6}$$

при $N_d < ½\ \alpha bhf_{yd}$;

$$k_2\left[\frac{A_S f_{yd}(h-2d_1)}{2}+\frac{\alpha b h^2 f_{cd}}{8}\right]-M_d>0 \qquad (4.3.7)$$

при $N_d < ½\ \alpha b h f_{yd}$.

Здесь

A_S – площадь поперечного сечения арматуры;

$A_{S_1} = A_{S_2} = A_S/2$;

f_{yd} – расчетное сопротивление арматуры;

f_{cd} – расчетное сопротивление бетона сжатию;

N_d – расчетная продольная сила в сечении;

M_d – расчетный изгибающий момент в сечении;

α = 0.85 – коэффициент, учитывающий длительность действия нагрузки;

k_2 – коэффициент, определяемый так:

$$k_2 = \frac{N_{ud}-N_d}{N_{ud}-N_{ba}}, \qquad (4.3.8)$$

где N_{ud} – критическая продольная сила, причем $N_{ud} = \alpha b h f_{cd} + A_s f_{yd}$; $N_{bal} = 0,5\alpha f_{cd} A_c$; $A_c = bh$.

В. Нагрузки на здание

Постоянные нагрузки

Всю постоянную нагрузку (нагрузку от веса колонн, плит перекрытия, ригелей и перегородок) заменяем эквивалентной равномерно распределенной нагрузкой. Указанная эквивалентная нагрузка, собранная с одного этажа, равна

$$q_{экв} = h_{экв} * \rho_c, \qquad (4.3.9)$$

где $\rho_c = 0,024\ мН/м^3$ – плотность железобетона; $h_{экв} = 0,3\ м$ – эквивалентная высота перекрытия.

Временные нагрузки (*Кратковременные*)

1. Нормативные значения равномерно распределенной временной нагрузки на плиты перекрытия принимаем по соответствующим нормам или по имеющимся общим данным для перекрытия.

2. Нормативную нагрузку от действия ветра при расчете принимаем по [10]. Имеем для типа местности В нормативное ветровое давление

$$W_0 = 0{,}23\ кН/м^2.$$

Нормативное значение средней составляющей ветровой нагрузки W_m на высоте Z над поверхностью земли равно

$$W_m = W_0 kc, \qquad (4.3.10)$$

где k – коэффициент, учитывающий изменение ветрового давления по высоте; c – аэродинамический коэффициент.

По европейским нормам [85] имеем

$$W_0 = q_{ref} c_0(Z) c_{po}\,, \qquad (4.3.11)$$

где q_{ref} – скоростной напор:

$$q_{ref} = \tfrac{1}{2}\, v_{ref} \rho, \qquad (4.3.12)$$

где ρ = 1,25 кН/м^3 – плотность воздуха; v_{ref} – скорость ветра, причем

$$v_{ref} = c_{alt} \cdot v_{ref,0}\,, \qquad (4.3.13)$$

где $v_{ref,0}$ – базисное значение скорости ветра;

$$c_{alt} = 1 + 0{,}001 \cdot a_S, \qquad (4.3.14)$$

где a_S – высота над уровнем моря (м); c_{po}= 1,3 – аэродинамический коэффициент, учитывающий изменение скорости ветра в зависимости от высоты над землей;

$$c(z) = k_2 ln(z/z_0) \qquad (4.3.15)$$

(k_2 = 0,22; z_0 = 0,3 м).

Длительные

Нагрузки принимаем по соответствующим нормам или имеющимся данным для проектирования.

4.4. Расчет рамы

Рассматриваемая многоэтажная рама имеет регулярную расчетную схему с равными пролетами ригелей и равными длинами стоек (высотами этажей), сечение ригелей и стоек по этажам принято постоянными. Узлы стоек таких рам, расположенные на одной вертикали, имеют примерно равные углы поворота и, следовательно, равные узловые моменты с нулевой точкой моментов в середине этого этажа. Это дает основание расчленить многоэтажную раму на ряд одноэтажных рам со стойками (колоннами) высотой, равной высоте этажа с шарнирными по концам стоек, кроме первого этажа . Стойки первого этажа принимаются жестко защемленными в фундаменте . При числе пролетов больше трех раму практически заменяют трехпролетной рамой и полагают изгибающие моменты в средних пролетах многопролетной рамы такими же, как и в среднем пролете трехпролетной рамы. Расчет такой рамы можно выполнить с использованием таблиц [6] или по стандартным программам.

Изгибающие моменты в местах примыкания ригелей к колонне определяются так:

$$M = (\alpha g' + \beta q')la^2, \tag{4.4.1}$$

где α, β – табличные коэффициенты, зависящие от схемы загружения ригеля g' и временной q' нагрузками и коэффициента k – отношение погонных жестокостей ригеля и колонны.

$$k = \frac{J_{bm} l_{col}}{J_{col} l_{bm}}. \tag{4.4.2}$$

Горизонтальные ветровые нагрузки

Распределенную горизонтальную ветровую нагрузку заменяем сосредоточенными силами, приложенными к узлам рамы. Нулевую точку эпюры моментов стоек всех этажей рамы, кроме первого, считаем расположенной в середине высоты этажа, а на первом этаже (при защемлении стоек в фундаменте) – на расстоянии 2/3 высоты, считая от места защемления.

Ярусные поперечные силы рамы

$$Q_1 = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$$

$$Q_1 = F_1 + F_2 + \ldots + F_n \tag{4.4.3}$$

Эти силы распределены между отдельными стойками рамы пропорционально жесткостям:

$$Q = Q_k\left(\frac{B}{\sum_{i=1}^{m} B_i}\right), \tag{4.4.4}$$

где B – жесткость сечения стойки; m – число стоек в ярусе.

По найденным поперечным силам определяются изгибающие моменты в стойках всех этажей, кроме первого:

$$M^{ветра} = Ql/2. \qquad (4.4.5)$$

Для первого этажа изгибающие моменты, соответственно, в верхнем и нижнем сечениях стойки равны

$$M^{ветра} = Ql/3. \quad M^{ветра} = 2Ql/3 \qquad (4.4.6)$$

4.5. Определение усилий в расчетном сечении

Продольная сила в расчетном сечении колонны возникает в результате действия постоянной вертикальной нагрузки (нагрузки от собственного веса) и временной, равномерно распределенной нагрузки на плиты покрытия. Предполагаем, что изгибающий момент в расчетном сечении колонны возникает вследствие действия постоянной и временной равномерно распределенной нагрузок, приложенных к вышестоящим перекрытиям, и горизонтальной ветровой нагрузки.

А. Отечественные нормы

1. *Усилия от вертикальных нагрузок продольные силы* от расчетных нагрузок определяются от действия постоянных нагрузок на покрытие одного этажа с учетом коэффициента надежности по назначению здания $\gamma_n = 0,95$.

$$G = \gamma_n g \gamma_f A, \qquad (4.5.1)$$

где $g = g_{экв}$ – постоянная нормативная нагрузка, A – площадь сечения.

Временная нагрузка на покрытие одного этажа с учетом γ_n = **0,95.**

$$Q = \gamma_n v \gamma_f A, \qquad (4.5.2)$$

в том числе длительная

$$Q_1 = \gamma_n v_1 \gamma_f A \qquad (4.5.3)$$

где v – полная временная нормативная нагрузка, v_1 – длительная временная нормативная нагрузка.

Продольная сила в колонне 1 от действия длительных нагрузок равна

$$N_{max,1} = n(G+Q_1\psi_n), \tag{4.5.4}$$

а от полной нагрузки

$$N_{max} = n(G+Q\psi_n), \tag{4.5.5}$$

Здесь n – количество этажей, ψ_n – коэффициент, учитывающий сочетание поэтажных нагрузок

$$\psi_n = 0.4+\frac{\psi_A-0,4}{\sqrt{n}}, \tag{4.5.6}$$

где ψ_A – коэффициент, учитывающий снижение расчетной нагрузки при увеличении грузовой площади

$$\psi_A = 0,4 + \frac{0,6}{(A/A_1)^{1/2}};\ A_1 = 9\ м^2 \tag{4.5.7}$$

2. *Изгибающие моменты в колонне от расчетных нагрузок.* Изгибающие моменты в стойках определяем по разности абсолютных значений опорных моментов ΔM в узле. Указанная разность распределяется между стойками, примыкающими к узлам снизу и сверху – в средних этажах поровну M = 0,5 ΔM, а в первом ярусе M = 0,4 ΔM. При этом для определения изгибающих моментов стоек вычисляются опорные моменты ригелей для первого яруса при значении k, увеличенном в 1,2 раза. Анализом усилий можно установить, что при расчете средней колонны следует принять комбинацию из M_{max} и $N_{соотв.}$

Максимальный момент в расчетном сечении колонны от вертикальных нагрузок определим по формуле

$$M = (\alpha g' + \beta q')la^2, \tag{4.5.8}$$

где g', q' – соответственно постоянная и временная равномерно распределенная нагрузки на погонный метр ригеля.

Нагрузка v' вычисляется с учетом коэффициента ψ_A, а также с привлечением коэффициента сочетания 0,95 для длительной и 0,9 для кратковременной нагрузок, так как расчетное сопротивление включает две кратковременные нагрузки (временную равномерно распределенную и ветровую).

Находим опорные моменты ригелей в узле рамы от действия полной и длительной нагрузок M_{21}; M_{23} и $M_{1,21}$; $M_{1,23}$. Определяем разность абсолютных значений опорных моментов в узле рамы при длительной и полной нагрузках соответственно

$$\Delta M_1 = M_{1,21} - M_{1,23};\ \ \Delta M = M_{21} - M_{23}. \qquad (4.5.9)$$

Момент в колонне подвала от длительной вертикальной нагрузки

$$M_{max,1} = 0{,}4\Delta M_1 \qquad (4.5.10)$$

От полной вертикальной нагрузки момент равен

$$M_{max} = 0{,}4\Delta M. \qquad (4.5.11)$$

Соответствующая максимальному моменту продольная сила определяется при загружении всех пролетов на всех этажах постоянной и временной нагрузками, за исключением временной нагрузки в среднем пролете первого этажа.

Таким образом, соответствующая продольная сила определяется так:

$$N_{соотв,1} = N_{max,1} - Q/2; \qquad (4.5.12)$$

$$N_{соотв} = N_{max} - Q/2; \qquad (4.5.13)$$

3. *Усилия от действия ветра.* Расчетный момент от действия ветра находим умножением нормального значения момента на коэффициент надежности по ветровой нагрузке γ_f = 1,4 [10]. Имеем

$$M^{ветра,р} = \gamma_f M^{ветра}.$$

Полное расчетное значение момента

$$M_{max} = M^{вертп,р} + 0{,}9M^{ветра,р}$$

$$M_{max,1} = M_1^{вертик,р} + 0.9M_1^{ветра,р} \qquad (4.5.14)$$

В. Европейские нормы

Максимальный расчетный изгибающий момент определится, согласно [3], по формуле

$$M_{d_0} = \gamma_G M_{W,K} + \gamma_Q \max\{M_{imp,K} + \psi_0 M_{wind,K}; \; M_{wind,K} + \psi_0 M_{imp,K}\}. \quad (4.5.15)$$

Здесь

$\gamma_G = 1{,}35$ – коэффициент надежности по постоянной нагрузке;

γ_Q – коэффициент надежности по временной нагрузке;

$M_{imp,K}$ – момент от нормативной постоянной нагрузки;

$M_{W,K}$ – момент от нормативной временной нагрузки;

$M_{wind,K}$ – момент от нормативной ветровой нагрузки;

ψ_0 – коэффициент сочетания, равный 0,7 для равномерно распределенной временной нагрузки и 0,6 – для ветровой нагрузки.

Соответствующая максимальному моменту расчетная продольная сила равна

$$N_d = \gamma_G N_{W,K} + \gamma_Q N_{imp,K}, \quad (4.5.16)$$

где $N_{W,K}$ – продольная сила от нормативной постоянной нагрузки; $N_{imp,K}$ – продольная сила от нормативной временной нагрузки.

Для $N_{imp,K}$ имеем

$$N_{imp,K} = nAp_{imp}\alpha_n\alpha_A. \quad (4.5.17)$$

Здесь

n – количество этажей; A – грузовая площадь; p_{imp} – нормативная равномерно распределенная нагрузка на перекрытие; α_n – коэффициент сочетания при количестве перекрытий $n > 2$; α_A – коэффициент сочетания, снижающий нормативную нагрузку при увеличении грузовой площади A. Коэффициент α_n определяется так:

$$\alpha_n = \frac{2+(n-2)\psi_0}{n}, \quad (4.5.18)$$

где ψ_0 – коэффициент сочетания нагрузок.

Для коэффициента α_A дается формула

$$\alpha_A = \frac{5}{7}\psi_0 + \frac{A_0}{A} \le 1; \quad (4.5.19)$$

Если временная нагрузка входит в расчет с коэффициентом сочетания ψ_0 в виде $\psi_0 N_{imp,k}$, то вероятность α_n в расчете не учитывается.

4.6. Подбор сечения арматуры

А. Отечественные нормы

Расчет выполняется по принятой комбинации N_{max} и $N_{соотв}$.

Рабочая высота сечения $h_0 = h - a$, а эксцентриситет силы равен $l_0 = M/N$ (случайный эксцентриситет $l_0 = h/30$ или $l_0 = 1_{col}/600$, но не менее 1 см). Для расчета принимается наибольшее значение эксцентриситета e_0.

Найдем величину моментов в сечении относительно оси, проходящей через центр тяжести наименее сжатой (растянутой) арматуры.

При длительной нагрузке получается, что

$$M_{1.1} = M_1 + N_{соотв}\left(\frac{h}{2} - a\right), \tag{4.3.4}$$

а при полной нагрузке

$$M_1 = M + N_{соотв}\left(\frac{h}{2} - a\right), \tag{4.6.2}$$

Критическую продольную силу вычисляем по формуле (5.1.7).

Задаем коэффициент армирования

$$\mu_1 = \frac{2A_S}{A}, \tag{4.6.3}$$

где, как и выше, $A = bh$ – площадь сечения колонны.

Определяем критическую силу. Для этого находим значение коэффициента η по формуле (см. 4.3.4), а величину эксцентриситета вычисляем по формуле

$$e = e_0\eta + \frac{h}{2} - a. \tag{4.6.4}$$

Граничная относительная высота сжатой зоны устанавливается по зависимости (4.1.5).

Далее имеем

$$\alpha_n = \frac{N}{R_b b h_0} \geq \xi_R$$

$$\xi = \frac{\alpha_n(1-\xi_R)+2\alpha_S\xi_R}{1-\xi_R+2\alpha_S} \geq \xi_R$$

$$\alpha_S = \frac{\alpha_n(\frac{e}{h_0}-1+\alpha_n/2)}{1-\delta'}; \tag{4.6.5}$$

$$\delta' = a/h_0\,.$$

При $\alpha_S \leq 0$ принимаем $A_S = A'_S$ конструктивно по минимальному проценту армирования. При $\alpha_S > 0$ значение $A_S = A'_S$ вычисляется так:

$$A_S = A'_S = \frac{\frac{Ne}{h_0} - \xi(1-\xi/2)\alpha_n}{R_S(1-\delta')}. \quad (4.6.6)$$

Вычислив коэффициент армирования, сравниваем его с принятыми при определении N_{cr}. При их расхождении изменяем μ_1 и делаем пересчет.

В. Европейские нормы

В сечении колонны действует момент, равный

$$M_d = M_{d_0} + N_d(e_a + e_2). \quad (4.6.7)$$

Здесь M_{d_0} – начальный изгибающий момент в расчетном сечении колонны, определяемый так:

$$M_{d_0} = M^{ветра,р} + M^{верт,р}, \quad (4.6.8)$$

причем $M^{ветра,р}$ – расчетный изгибающий момент в сечении колонны от действия ветра, $M^{верт,р}$ – расчетный изгибающий момент в сечении колонны от действия вертикальных нагрузок на перекрытие над расчетным сечением;

e_a – эксцентриситет, возникающий в следствие отклонения от геометрических размеров и неточности монтажа;

e_2 – эксцентриситет, возникающий в следствие продольного изгиба колонны

$$e_a = 0{,}0028L \text{ } (L \text{ – длина колонны}). \quad (4.6.9)$$

$$e_2 = 0{,}1k_1L^2{}_0\gamma(1/r); \quad (4.6.10)$$

где k_1 – коэффициент, зависящий от гибкости, при $\lambda \geq 35$ имеем $k_1 = 1$;

кривизна

$$\frac{1}{r} = \frac{2k_2e_{yd}}{0{,}9(h-d_1)}, \quad (4.6.11)$$

где k_2 – определяется по формуле (4.3.8), $\varepsilon_{yd} = f_{ud}/E_S$, f_{ud} – расчетное сопротивление арматуры, МПа; E_S – модуль упругости арматуры, МПа.

4.7. Сопоставление отечественных и европейских норм проектирования

В качестве числового примера, позволяющего сделать сопоставление результатов расчета по отечественным и европейским нормам, рассмотрим расчет 4-этажного типового административного здания.

Расчетным путем были получены коэффициенты армирования средней колонны первого яруса здания поперечного сечения 40 × 40 см, в качестве материалов конструкции принята арматура класса А-III и бетон класса прочности на сжатие В20.

В таблицу 4.7.1 занесены принятые для расчета здания нормативные (характеристические) и расчетные значения нагрузок, коэффициента надежности по нагрузке, а также расхождение в процентах расчетных значений нагрузок при проектировании по отечественным и европейским нормам.

В таблице 4.7.2 представлены формулы для расчета коэффициентов сжатия расчетных значений нагрузок. Здесь приведены величины коэффициентов сжатия и их расхождение для 4-этажного здания при проектировании по различным нормам.

Установим теперь влияние на коэффициент армирования сечения железобетонной колонны использование расчетных формул, представленных отечественными и зарубежными нормами.

В таблицу 4.7.3. занесены результаты расчетов и расхождение полученных коэффициентов армирования.

В таблице 4.7.4. приведены принятые для расчета нормативные значения сопротивлений, коэффициенты надежности по материалу, а также расхождение в % расчетных сопротивлений материалов при проектировании по отечественным и европейским нормам.

Для сравнения рассмотрим 7-этажное бетонное каркасное здание. В результате расчетов определены коэффициент армирования $\boldsymbol{v_1}$ при использовании бетонов класса В20, В25, В30 (таблица 4.7.5).

Анализ результатов детерминированного расчета по отечественным и европейским нормам проектирования показывает, что последние дают в 2,5–3,5 раза больший процент армирова-

Таблица 4.7.1 – Нормативные (характеристические) и расчетные значения нагрузок

Нагрузки на здание	Отечественные нормы			Европейские нормы			Расхождение расчетных значений, %
	Нормативное значение нагрузки, КПа	Коэффициент надежности по нагрузке	Расчетное значение нагрузки, КПа	Нормативное значение нагрузки, КПа	Коэффициент надежности по нагрузке	Расчетное значение нагрузки, КПа	
Постоянные: собственный вес на 1 м^2 перекрытия	7,2	1,1	7,92	7,2	1,35	9,72	22,7
Временны:							
– нагрузки на перекрытие;	2,0	1,2	2,4	3,0	1,5	4,5	87,5
– ветровая	0,23	1,4	0,32	0,39	1,5	0,59	84,4
Полная:							
– вертикальная нагрузка на 1 м^2 перекрытия	9,2	–	10,32	10,2	–	14,22	44,6
– в том числе длительная	7,9	–	8,76	8,76	–	12,09	38,0

ния. Этот факт объясняется тем, что европейскими нормами проектирования предписывается использование больших коэффициентов надежности по нагрузке, коэффициентов надежности по материалу, а также привлечение расчетных формул учета сочетания нагрузок, которые приводят к увеличению коэффициентов армирования.

Кроме этого, европейскими нормами в расчет вводятся большие значения нормативной равномерно распределенной нагрузки на плиты перекрытия и большие значения ветрового давления.

Проведенный анализ показывает, что отечественные нормы допускают при проектировании более низкий уровень надежности, чем европейские. Одно из объяснений такого положения заключается в директивности требований экономии металла в строительстве, насаждаемой в стране в течение десятилетий. Это привело к необходимости глубокого исследования нагрузок на сооружения и к более смелому назначению расчетных нагрузок. Многолетний опыт безаварийной эксплуатации зданий массового применения свидетельствует об оправданности сделанных предложений.

Таблица 4.7.2 – Значения коэффициентов сжатия расчетных нагрузок

Формулы учета сочетания нагрузок	Отечественные нормы	Европейские нормы	Расхождение, %
Формулы снижения расчетных нагрузок по этажам	$\psi_n = 0,4 + \frac{\psi_A - 0,4}{\sqrt{n}}$	$\alpha_n = \frac{[2+(n-2)\psi_0]}{n}$	**-**
Значение коэффициента для 4-этажного здания	$\psi_n = 0,496$	$\alpha_n = 0,678$	***36,7***
Формулы снижения расчетных нагрузок по грузовой площади	$\psi_A = 0,4 + \frac{0,6}{\sqrt{A/A_1}}$ $A_1 = 9\ м^2$	$\alpha_A = \frac{5\psi_0}{7} + \frac{A_0}{A} \leq 1$ $A_0 = 10\ м^2$	**-**
Значение коэффициента для 4-х этажного здания	$\psi_A = 0,448$	$\alpha_A = 0,850$	***89,7***

Таблица 4.7.3 – Результаты расчетов и расхождение полученных коэффициентов армирования

Коэффициент армирования			
Расчетные значения усилий	Отечественные нормы	Европейские нормы	Расхождение, %
M_{max} = 49 КНм $N_{соотв}$ = 29·10^3 КН	0,19	0,20	5

Таблица 4.7.4 – Нормативные значения сопротивлений, коэффициенты надежности по материалу

Материал	Отечественные нормы			Европейские нормы			Расхождение расчетных значений %
	Норматив. сопротив., МПа	Коэффициент надежности по материалу	Расчетное сопротивление, МПа	Норматив. сопротив., МПа	Коэффициент надежности по материалу	Расчетное сопротивление, МПа	
Бетон В20	15	1,3	11,5	15	1,50	10	13
Арматура А-III	390	1,07	36,5	390	1,15	33,913	–

Таблица 4.7.5 – Коэффициент армирования $\boldsymbol{\nu_1}$ при использовании бетонов класса В20, В25, В30

Коэффициент армирования				
класс бетона по прочности	отечественные нормы		европейские нормы	
	4-этажное здание	7-этажное здание	4-этажное здание	7-этажное здание
В20	0,019	–	0,048	–
В25	0,011	–	0,041	–
В30	0,005	0,032	0,035	0,088

4.8. Вероятностный расчет железобетонного каркасного здания

Исходные положения

При выполнении вероятностного расчета случайными принимаем:

- постоянную нагрузку;
- временную нагрузку на плиты перекрытий;
- ветровую нагрузку;
- дополнительный эксцентриситет, возникающий вследствие неточности монтажа и отклонения от геометрических размеров сечения;
- сопротивление бетона сжатию;
- сопротивление арматуры.

При вероятностном расчете средней колонны будем исходить из того же расчетного положения (4.3.1), что и при детерминированном расчете.

Величину коэффициента $\boldsymbol{\eta}$, учитывающего возрастание момента вследствие продольного изгиба по формулам (4.1.6), (4.1.7). При этом

$$A = bh; \; r = 0{,}289h; \quad \varphi_1 = 1 + M_{1,1} / M_1;$$

$$M_{1,1} = M_1 + \frac{N_1}{\frac{h}{2} - a}; \quad M_1 = M + \frac{N}{\frac{h}{2} - a};$$

$$\alpha = E_S / E_b; \quad \mu_1 = 2A_S / A; \quad \delta = e_0 / h; \quad e_0 = M / N.$$

Момент $M_{1,1}$ и продольную силу N_1 принимаем в качестве постоянных величин. Так как ветровая нагрузка не относится к длительным, то $M_{1,1}$ и N_1 определяем, собирая постоянные и временные вертикальные нагрузки. Для временных нагрузок принимаем пониженное значение, равное 0,7 от полного в соответствии с СНиП [10] для административных зданий. При этом нормативное значение нагрузок принимаем равными их математическим ожиданиям. Это позволяет увеличить количество испытаний в десятки раз и довести с 1000 до 1 млн.

Высоту сжатой зоны $\boldsymbol{x}$ определяют по формулам

$$N = \begin{cases} R_b x b + R_{SC} A'_S - R_S A_S \text{ при } \xi = \frac{x}{h_0} \le \xi_R \\ R_b x b + R_{SC} A'_S - \sigma_S A_S \text{ при } \xi = \frac{x}{h_0} > \xi_R \end{cases} \qquad (4.8.1)$$

где

$$\sigma_S = \left[\frac{2(1-\xi)}{1-\xi_R} - 1\right] R_S.$$

Сформулируем алгоритм вероятностного расчета, причем проверку несущей способности колонны будем производить в предложении, что $\xi = x / h_0 \le \xi_R$.

В рассматриваемом случае при $A'_S = A_S$ и $R_{SC} = R_S$, высота сжатой зоны, найденная по (4.8.1), равна $x = N / R_b b$. Вычисляем ξ_R по формуле (4.1.4). Проверяем условие $\xi = x / h_0 \le \xi_R$ и, если оно соблюдено, при установленном значении x оцениваем несущую способность элемента по формуле (4.1.1).

Наблюдение условия $\xi = x / h_0 \le \xi_R$ означает, что x необходимо определять при $\xi = x / h_0 > \xi_R$ по формуле (4.8.1). После несложных преобразований, будем иметь

$$x = \frac{\sigma_{SCU} A \omega h_0}{\left(R_b A_b - N + \frac{\sigma_{SCU} A_S}{1-\frac{\omega}{1{,}1}}\right)\left(1-\frac{\omega}{1.1}\right)}. \qquad (4.8.2)$$

Изменчивость прочностных характеристик бетона и арматуры зависит от принимаемого класса бетона прочности при сжатии В20, класс арматуры А-III.

Распределение прочности бетона и арматуры соответствует нормальному закону [8]. Параметры распределения случайной прочности принимаем в соответствие с методикой, изложенной в [2]. Имеем

$$\bar{R}_b = \frac{R_{b,\text{норм}}}{1{,}07(1-V_b)}; \; S_{R_b} = \bar{R}_b V_b;$$

$$\bar{R}_b = \frac{R_{a,\text{норм}}}{1{,}64 V_a}; \; S_{R_a} = \bar{R}_a V_a;$$

Для бетона класса В20: $\bar{R}_b = 19{,}2$ *МПа*, $S_{R_b} = 2{,}59$ *МПа*; для арматуры класса А-III: $\bar{R}_a = 466{,}5$ *МПа;* $S_{R_a} = 46{,}7$ *МПа.*

Случайный эксцентриситет приложения продольной нагрузки возникает из-за отклонений геометрических размеров и неточности монтажа колонны. Для случайного эксцентриситета принимаем нормальный закон распределения. Математическое ожидание эксцентриситета принимаем равным $e_0 = 0$. Согласно [12], стандарт случайного относительного эксцентриситета приложения продольной нагрузки в верхнем сечении колонн для железобетонных каркасных зданий составляет $S_{e_{\text{отн}}} = 0{,}34$. Относительный эксцентриситет равен $e_{отн} = e_0 / \rho$, (ρ – ядровое расстояние сечения). Стандарт случайного эксцентриситета можно определить так;

$$S_{e_0} = S_{e_{OTH}}\rho.$$

Нагрузки на здание в расчетном сечении при вероятностном расчете отличаются от нагрузок, собранных при детерминированном расчете. В соответствие принятой схеме расчета [13] действие нагрузок учитывается следующим образом. Изгибающий момент в расчетном сечении принимается равным

$$M = M_{ветр} + M_0 + M_e, \tag{4.8.3}$$

где $M_{ветр}$ – момент от действия ветровой нагрузки; M_0 – момент от нагрузок на перекрытие расчетным сечением (остальные вышележащие вертикальные нагрузки момент в расчетном сечении не создают); M_e – момент, возникающий в результате наличия случайного эксцентриситета.

Продольная сила в расчетном сечении

$$N = N_0 + N_\Sigma, \tag{4.8.4}$$

причем N_0 – продольная сила от вертикальных нагрузок на перекрытие над расчетным сечением; N_Σ – продольная сила от остальных вышележащих постоянных и временных нагрузок.

Ветровая нагрузка, согласно принятой схеме расчета, нормальной силы в сечении колонны не создает.

При рассмотрении нагрузок принимаем допущение – постоянные и временные вертикальные нагрузки представляют собой независимые случайные величины. Исходя из указанного допущения, математическое ожидание и стандарт случайной суммарной нагрузки N_Σ, определяем по правилам сложения случайных величин.

Поскольку изгибающий момент в расчетном сечении колонны возникает от действия ветровой и вертикальной равномерно распределенной нагрузок, рассмотрим нагрузку на перекрытие отдельно. Принимаем, что постоянная нагрузка от собственного веса одинакова во всех пролетах этажа. Это позволяет избежать генерирования дополнительно еще двух случайных величин (постоянной и временной нагрузок на вышележащее перекрытие) и, естественно, сократить затраты машинного времени.

Учет изменчивости временной нагрузки в самих пролетах основан на следующем. Средняя интенсивность временной нагрузки на перекрытие от веса оборудования и людей также постоянна, меняется интенсивность нагрузки в пролете в результате оттока людей и перемещения оборудования из одного пролета и сосредоточение их в другом.

Предположим, что $\boldsymbol{q_1}$ является равномерно распределенной случайной величиной на интервале $|0;2q_{ср}|$, тогда $q_2^1 = q_{ср} - q_1^1$.

Нагрузки от собственного веса. Для постоянной нагрузки (вес частей сооружения, в том числе вес несущих и ограждающих строительных конструкций) принимается нормальный закон распределения с математическим ожиданием $\boldsymbol{\breve{g} = 7{,}2kH/м^2}$ и стандартом $\boldsymbol{S_g = 0.72kH/м^2}$; изменчивость постоянной нагрузки равна $\boldsymbol{V_g = 0.1}$.

Временные нагрузки на перекрытия представляют собой временные длительные и кратковременные нагрузки, определенные в [10]. Естественно считать изменчивость временных нагрузок больше изменчивости постоянных нагрузок. В [8] приведены данные о нагрузках на перекрытия (мебель, оборудование, работающий персонал). Эти данные позволяют рассмотреть следующую модель временной равномерно распределенной нагрузки на плиты перекрытия. Для участников перекрытия с площадью более 36 м^2 в качестве закона распределения для временной нагрузки принимается нормальный закон с параметрами распределения $\boldsymbol{q = 0.88kH/м^2; S_q = 0.21kH/м^2}$.

Ветровые нагрузки носят случайный характер, а значение максимумов скорости ветра принимаются распределенными по двойному экспоненциальному закону [7]

$$\boldsymbol{P(V) = exp[-exp(u-V)/\beta^*],} \tag{4.8.5}$$

где $\boldsymbol{u, \beta^*}$ – параметры распределения.

Используя формулу максимумов независимых случайных величин, можно перейти от максимума за год к минимуму за $\boldsymbol{n}$ лет. Интегральная функция распределения при этом принимает вид

$$\boldsymbol{P(V) = exp\left(-\frac{exp(u-V+\beta^* ln\, n)}{\beta^*}\right).} \qquad (4.8.6)$$

Следуя [10], значение ветрового давления определиться так

$$\boldsymbol{W_0 = 0.61V^2.} \qquad (4.8.7)$$

Конкретные числа при расчетах приняты:

$\boldsymbol{V = 19.95}$ ***м/с;*** $\boldsymbol{S_V = 4.1}$ ***м/с;*** $\boldsymbol{u = 18.105}$ ***м/с;*** $\boldsymbol{\beta^* = 3.197}$ ***м/с.***

Определение усилий в колонне при вероятностном расчете

Изгибающий момент от вертикальных нагрузок вычислим по формуле (5.4.1) с учетом сделанных предположений

$$\boldsymbol{M} = \begin{cases} [\boldsymbol{\alpha_1}(\boldsymbol{g}' + \boldsymbol{g}_2') + \boldsymbol{\beta_1}(\boldsymbol{q}_1' - \boldsymbol{q}_2')]\boldsymbol{l^2} \text{ при } \boldsymbol{q}_1' < \boldsymbol{q_2}' \\ [\boldsymbol{\alpha_2}(\boldsymbol{g}' + \boldsymbol{g}_1') + \boldsymbol{\beta_2}(\boldsymbol{q}_2' - \boldsymbol{q}_1')]\boldsymbol{l^2} \text{ при } \boldsymbol{q}_1' < \boldsymbol{q_2}' \end{cases} \qquad (4.8.8)$$

Изгибающий момент в расчетном сечении колонны равен

$$\boldsymbol{\acute{M} = \acute{M}^{вертик} + \acute{M}^{ветра},} \qquad (4.8.9)$$

где $\boldsymbol{\acute{M}^{вертик}}$ – момент от вертикальных нагрузок, определяемый так

$$\boldsymbol{\acute{M}^{вертик} = 0{,}4\Delta\acute{M};\ \Delta\acute{M} = \acute{M}_{21} - \acute{M}_{23};}$$

$\boldsymbol{\acute{M}^{ветра}}$ – момент от действия ветровой нагрузки:

$$\boldsymbol{\acute{M}^{ветра} = \frac{Ql}{3},} \qquad (4.8.10)$$

причем $\boldsymbol{l}$ – расчетная длина стойки, равная высоте этажа; Q – сила от действия ветровой нагрузки.

Продольная сила в расчетном сечении определяется так:

$$\boldsymbol{\dot{N} = \dot{N}_{эт} + \dot{N}_{подв}\,,} \qquad (4.8.11)$$

где $\boldsymbol{\dot{N}_{эт}}$ – продольная сила от постоянной и временной нагрузок, собранная с грузовой площади вышележащих над расчетным сечением перекрытий, кроме перекрытия подвала.

Продольное усилие в расчетном сечении колонны представляется как случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами распределения вида

$$\dot{N}_{эт} = \sum \dot{N}_{эт,i}; \tag{4.8.12}$$

$$S_{N_{эт}} = \left[\left(\sum S_{N_{эт,i}^{пост}}\right)^2 + \left(\sum S_{N_{эт,i}^{врем}}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Здесь

$\dot{N}_{эт,i}$ – математическое ожидание усилия в колонне от нагрузки на перекрытие i-го этажа;

$S_{N_{эт,i}^{пост}}$ – стандарт усилия в колонне от постоянной нагрузки на перекрытие i-го этажа;

$S_{N_{эт,i}^{врем}}$ – стандарт усилия в колонне от временной нагрузки на перекрытие i-го этажа;

Продольная $\dot{N}_{подв}$ от нагрузки на перекрытие на расчетным сечением определяется так:

$$\dot{N}_{подв} = A[g+(q_1+q_2)/2], \tag{4.8.13}$$

где A – грузовая площадь.

Построение функции надежности осуществляется методом статистических испытаний с определением частоты отказов колонны здания, запроектированного по отечественным и европейским нормам. За отказ принимаем исчерпание несущей способности колонной, так как отказ фиксируется при невыполнении условия (4.3.1) может быть переписано таким образом:

$$\acute{M}_{внеш} < \acute{M}_{внутр}. \tag{4.8.14}$$

Используя метод статистических испытаний, описанный в разделе II, для запроектированных зданий возможно построение функции надежности (зависимости вероятности безотказной работы от срока службы).

Результаты конкретных вычислений представляются в форме построения функции надежности 4-этажного здания, запроектированного по отечественным нормам для класса бетона В20, В25, В30. Результаты расчета сведены в таблицу 4.8.1.

Таблица 4.8.1 – Результаты класса бетона по прочности

Частота отказов $\boldsymbol{v}$ для количества, лет					
Класс бетона по прочности	1	5	15	20	50
В20 В25 В30	170 370 460	290 580 650	370 740 850	440 820 970	610 1130 1220

При неизменной несущей способности конструкции применение бетона большой прочности влечет за собой снижение коэффициента армирования железобетонного сечения. При этом вклад арматуры в несущую способность элемента уменьшается. Поскольку арматура имеет меньшую сравнительно с бетоном изменчивость прочности, то уменьшение вклада арматуры в несущую способность приводит к снижению надежности элемента.

Применение бетона более низкого класса прочности ведет к повышению коэффициента армирования и, естественно, к более надежной конструкции.

При использовании бетона В20 при $\boldsymbol{\mu_1}$ = 0,019 вероятность безотказной работы 4-этажного здания в течение 50 лет после возведения составляет 0,99994, а это соответствует вероятности безотказной работы здания за 5-летний срок эксплуатации при использовании бетона В30 с $\boldsymbol{\mu_1}$ = 0,005.

Кроме этого, проведен анализ вероятностного расчета 7-этажного типового административного здания, запроектированного по отечественным и европейским нормам. Для расчета был принят рекомендуемый европейскими нормами для данного случая бетона класса С70/85 с нормативным сопротивлением 70 МПа.

Сравнивая 4- и 7-этажные здания, запроектированные по отечественным нормам, можно заключить, что надежность более высокого здания снижается сильнее в зависимости от количества лет. Так вероятность отказа 4-этажного здания за 15 лет эксплуатации увеличивается примерно в 2 раза, а 7-этажного – в 3,5 раза.

Расчет 7-этажного здания был произведен при различных коэффициентах вариации прочности бетона. Оказалось, что вероятность отказа для здания с коэффициентами вариации прочности бетона $\boldsymbol{\vartheta_b}$ = 0,2 в 2,5 раза больше, чем для здания с $\boldsymbol{\vartheta_b}$ = 0,135. Из этого, как следовало ожидать, ясно, что надежность железобетонной конструкции существенным образом зависит от прочностных характеристик материалов.

Для случайного эксцентриситета расчеты показывают, что при увеличении его стандарта в 2 раза (с $S_{e_{OTH}}$= 0,34 до $S_{e_{OTH}}$= 0,68) частоты отказов 4-этажного здания при использовании бетона В20 остались прежними для всех рассматриваемых временных отрезков.

Надежность здания, запроектированного по европейским нормам, выше чем по отечественным.

Укажем, что выбор критерия отказа достаточно условен – нарушение условия прочности в одном сечении внецентренно сжатого элемента. Но такой подход позволяет с привлечением метода статистических испытаний произвести сопоставление надежности сооружения, проектируемого по разным нормам.

Разработанный алгоритм вероятности расчета дает возможность проектировать здания с заданным уровнем надежности. Например, для 7-этажного здания при бетоне класса В30 для заданного уровня безотказной работы 0,99999 получен коэффициент армирования $\boldsymbol{\mu_1}$ = 0,033.

Список использованной литературы

1. *Байков В.Н., Сигалов Э.Е.* Железобетонные конструкции. Общий курс. М.: Стройиздат, 1991. 767 с.

2. *Балышев И.А., Клепиков Л.В.* Статистический анализ данных о температурах воздуха для расчета конструкций // Труды ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. 1976. Вып. 42. С. 11–34.

3. *Гумбель Э.* Статистика экспериментальных значений. М.: Мир, 1965. 449 с.

4. Надежность строительных конструкций. Основные положения. Проект СНиП России. Внесен ЦНИИСК. М.: Стройиздат, 1994. 25 с.

5. *Парасонис И.И.* Надежность каркасов одноэтажных производственных зданий с учетом точности геометрических размеров монтажа. Вильнюс: Техника, 1995. 392 с.

6. *Райзнер В.Д.* Методы теории надежности в задачах нормирования расчетных параметров строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1986. 192 с.

7. *Райзнер В.Д.* Расчет и нормирование надежности строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1995. 348 с.

8. *Сеитов Б.М.* Вероятностное моделирование надежности строительных конструкций. Бишкек: КРСУ, 2002. 231 с.

9. *Снаркис Б.И.* О связи метода оптимальных расчетных значений с методикой предельных состояний // Проблемы надежности в строительном проектировании. Свердловск: Стройиздат, 1972. С. 202–206.

10. СНиП 2.01.07-85. Нагрузки и воздействия / Госстрой СССР. М.: ЦИТП Гостроя СССР, 1986. 36 с.

11. СНиП 2.03.01-84. Бетонные и железобетонные конструкции / Госстрой СССР. М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985. 79 с.

12. *Стрелецкий Н.С.* Метод расчета конструкций зданий и сооружений по предельным состояниям, применяемым в СССР, и основные направления его применения к строительным конструкциям. М.: Стройиздат, 1961. 34 с.

13. *Сухов Ю.Д.* Некоторые особенности теории надежности строительных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 1975. № 4. С. 13–16.

14. *Сухов Ю.Д.* Рекомендуемые методы определения показателя надежности // Труды ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. М.: Стройиздат, 1993. С. 3–7.

15. ENV 1991.-2-1: Eurocode 1: Basis of design and actions on structures. Part 2.1: Densties, self-weight and imposed loads, CEN 1994.

16. ENV 1991.-2-4: Eurocode 1: Basis of design and actions on structures. Part 2.4: Wind Loads, CEN 1995.

17. ENV 1992-1: Eurocode 2: Basis of concrete structures. Part 1: General rules and rules for buildings, CEN 1993.

СОДЕРЖАНИЕ

Бейшенбек Сыдыкбекович Ордобаев,
Болот Мукаевич Сеитов,
Кулсаан Оморовна Кадыралиева,
Джуман Арпочиевич Рыспаев

НАДЕЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ.
ТЕХНОГЕННЫЙ РИСК

Учебное пособие

Редактор *Н.В. Шумкина*
Компьютерная верстка *Д.Ю. Иванова*

Подписано в печать 15.08.2016.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Печать офсетная.
Объем 6,5 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 36

Издательство КРСУ
720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44

Отпечатано в типографии КРСУ
720048, г. Бишкек, ул. Горького, 2