ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ»
Кафедра физики и микроэлектроники

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
ПО КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Учебное пособие
для студентов направления «Физика»

Бишкек 2017

УДК 530(075.4)
Р 47

Ответственный редактор:
Б.Ч. Чечейбаев, д-р физ.-мат. наук

Рецензенты:
О.Ш. Шаршекеев, д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН КР,
Н.Ж. Кайрыев, канд. физ.-мат. наук, доц.

Составители:
А.Т. Байтереков, Н.К. Касмамытов

Рекомендовано к изданию НТС КРСУ

Р 47 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ: учебное пособие для студентов направления «Физика» / Сост.: А.Т. Байтереков, Н.К. Касмамытов. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2017. 110 с.

Приведены сведения об основных положениях теории классической механики, методах решения задач по основным разделам курса. Даны примеры с детальным изложением решений задач.

Пособие написано в соответствии со стандартом и разработанной программой ФОГОС-3.

Для студентов, магистров, обучающихся по специальности «Физика», а также для преподавателей, читающих курс классической механики.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Фундаментальные науки и, в частности, классическая механика играют большую роль при подготовке специалистов технического профиля. Предлагаемое пособие призвано помочь студентам получить навыки обобщения и закрепления основных сведений о методах решения задач по классической механике. В первую очередь это относится к подготовке будущих специалистов, способных квалифицированно решать задачи по механике, связанные с современными новейшими технологиями.

В учебном пособии в краткой форме приведены основные теоретические разделы классической механики с примерами решения задач, которые способствуют углублению знаний студента.

В начале каждой главы даются общие указания и рекомендации о наиболее рациональных методах и приёмах решения задач, приводятся формулы, применяемые при решении этих задач. Рассматриваются примеры решений задач и способы практического использования предлагаемых методов.

В каждой главе представлен широкий спектр задач для различных механических движений тела, детально рассматривается методика их решения с учётом требований программы для бакалавров.

Данное пособие не претендует на полный объём изложения всех разделов классической механики и ограничено рамками учебного курса, разработанного на кафедре физики и микроэлектроники ЕТФ КРСУ.

Глава 1

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. Основные понятия кинематики материальной точки

Кинематика есть раздел механики, где изучается механическое движение материальных тел с геометрической точки зрения, без учета причин (т. е. механических сил), вызывающих данное механическое движение. От геометрии кинематика отличается, по существу, тем, что при рассмотрении перемещений тел в пространстве принимается во внимание еще и время перемещения. Поэтому кинематику иногда называют «геометрией четырех измерений», понимая под четвертым измерением время. Такое представление оказалось удобным в теории относительности, которая позволяет изучать движение тела с учётом взаимосвязи пространства и времени с движущимся телом.

В классической механике применяется модель трехмерного евклидова пространства, у которого метрические свойства считаются независящими от движущихся в нем материальных тел. Это пространство обладает свойствами однородности и изотропности во всех направлениях. Время в классической механике принимается “абсолютным” – это означает, что оно протекает одинаково во всех точках пространства и не зависит от движущегося тела.

Трехмерное евклидово пространство и абсолютное время отражают реальные свойства пространства и времени и дают вполне достаточную для практики оценку точности при изучении движений со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света в вакууме.

Для измерения протяженности в пространстве выбрана единица длины по Международной системе единиц измерения – метр (*м*).

Измерение времени основывается на периодических астрономических явлениях – вращении Земли вокруг своей оси или же движении Земли вокруг Солнца. За единицу времени принимается секунда *(с)*. Отсчет времени введется от некоторого начального момента ($t = 0$).

Для изучения механического движения материальных тел в кинематике был введен ряд моделей материальных тел: материальная точка, абсолютно твердое тело и сплошная среда.

Материальной точкой называется материальное тело, обладающее массой, размерами, формой, вращением и внутренней структурой, которой можно пренебречь в условиях рассматриваемой задачи. Положение материальной точки в пространстве определяется как положение геометрической точки, что существенно упрощает решение задач механики. Практически всякое тело можно рассматривать как материальную точку в случаях, когда расстояния, проходимые точками тела, очень велики по сравнению с его размерами.

Абсолютно твёрдое тело – тело (система), взаимное положение любых точек которого не изменяется, каким бы воздействиям данное тело в процессе движения не подвергалось (поэтому абсолютно твёрдое тело не изменяет свою форму и сохраняет неизменным распределение масс).

Сплошная среда – механическая система, обладающая бесконечным числом частиц (т. е. внутренних степеней свободы). Её движение в пространстве, в отличие от других механических систем, описывается не координатами и скоростями отдельных частиц, а скалярным полем плотности и векторным полем скоростей.

Система отсчета. Положение тела в пространстве может быть определено только относительно произвольно выбранного другого неизменного тела, называемого системой отсчета. Системой отсчета является система координат и время. В механике в соответствии с рассматриваемой задачей, используются прямоугольная (декартовая), цилиндрическая и сферическая системы координат.

Если положение тела относительно выбранной системы отсчета со временем не изменяется, то тело покоится относительно данной системы отсчета; если же тело изменяет свое положение относительно данной системы отсчета, то тело относительно этой системы отсчета движется. Таким образом, понятия «движение» и «покой» являются по своему существу относительными и имеют смысл только тогда, когда указана система отсчета, относительно которой тело рассматривается.

Траектория. Движение является непрерывным процессом. Поэтому точки пространства, в которых последовательно находится любая движущаяся точка, представляют собой непрерывное многообразие одного изменения и, следовательно, они образуют непрерывную кривую. Такая непрерывная кривая, описываемая точкой при движении тела, называется траекторией. Вид траектории движущегося тела зависит от системы отсчета, к которой отнесено данное движение.

Задачи кинематики. Движение тела (материальной точки) по отношению к выбранной системе отсчета будет известно, если можно определить его положение относительно этой системы отсчета в любой момент времени.

Положение точки или тела относительно данной системы отсчета определяется соответствующими координатными параметрами, а движение – уравнениями, выражающими эти движения как функцию времени.

Главной задачей кинематики является математическое (по заданным уравнениям, графикам, таблицам и т. п.) определение положения и характеристик движения точек или тел во времени. Движения материальных тел могут задаваться различными способами:

а) движение задается с помощью скалярной функции пройденого пути телом в процессе его движения в зависимости от времени:

$$s = f(t) \ . \tag{1.1}$$

При таком способе задания движения функция (1.1) должна быть однозначной, непрерывной и дифференцируемой. А также должны быть заданы: траектория, начало отсчета и положительное направление движения. Это является недостатком такого способа задания движения материального тела;

б) векторный способ определения движения материальной точки заключается в том, что движение задается с помощью радиус-вектора ***r****(t)*, как функция времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \ , \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{r}(t) = X(t)\bullet\boldsymbol{i} + У(t)\bullet\boldsymbol{j} + Z(t)\bullet\boldsymbol{k},$$

где ***i, j, k*** – единичные векторы.

Траекторией при векторном способе задания движения является годограф радиус-вектора;

в) координатный способ задания движения материальной точки задается с помощью параметрических функций координат по времени, где время является параметром. Чаще всего положение точки в пространстве определяется в прямоугольной декартовой системе координат (рисунок 1.1). В этой системе движение точки задается в виде

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{1.3}$$

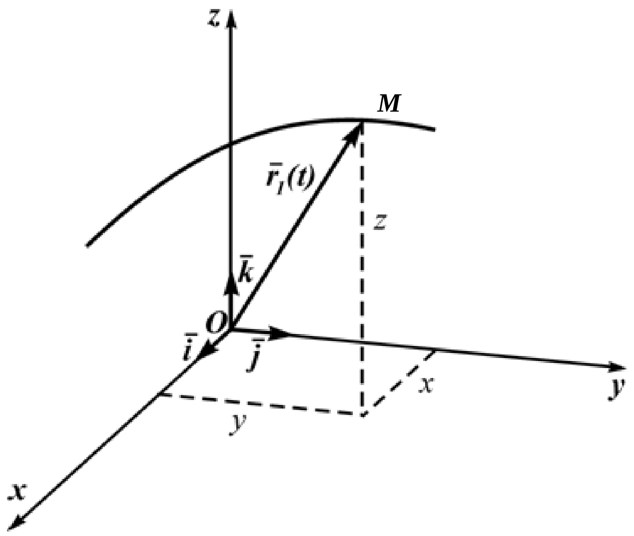


Рисунок 1.1

Если из уравнений (1.3) исключить параметр t (время), то траектория движения в этом случае определится уравнением вида:

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1.4}$$

По форме траектории движение материальной точки можно подразделить на два типа: прямолинейное и криволинейное. При этом прямолинейное движение можно рассматривать как частный случай криволинейного движения, у которого траектория искривлений описывается бесконечно большим радиусом.

1.2. Прямолинейное движение материальной точки

Движение называется прямолинейным, если его траектория относительно выбранной системы отсчета есть прямая.

Положение точки на прямой определяется координатой x, которая представляет собой расстояние движущейся точки M от произвольно выбранного начала O, и берется с положительным или отрицательным знаком в зависимости от направления отрезка OM. В этом случае закон движения выражается уравнением

$$x = f(t). \tag{1.5}$$

Если функция x монотонно возрастает по абсолютной величине, то точка удаляется от начала координат O, и движение называется прямым. В противном случае – возвратным. В случае, когда функция не зависит от времени, означает, что точка M не изменяет своего местоположения (расстояния) от начала координат O, и точка находится в покое относительно выбранной системы отсчета. Пусть точка M движется по прямой Ox, и в момент времени t_1 она находится в положении M_1, а в момент времени t_2 – в положении M_2.

Направленный вектор M_1M_2, берущий начало в точке M_1, и заканчивающийся в конечной точке движения M_2, называется перемещением точки M за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$. Понятие «перемещение» и «путь» отличаются содержанием. Например, точка M в процессе движения может перейти из положения M_1 в положение M_2, пройдя по разным траекториям (путь которых по величине отличается), тогда как перемещение для этих движений будет одним и тем же.

В случае прямолинейного движения векторы перемещений точек будут коллинеарные, и их можно рассматривать как алгебраические величины.

Скорость при прямолинейном движении можно определить следующим образом. Пусть точка движется по прямой Ox, и в момент времени t положение точки определяется координатой x, а в момент t' – координатой x'. Тогда за промежуток времени $\Delta t = t' - t$ точка совершает перемещение $\Delta x = x' - x$. Отношение перемещения точки к соответствующему промежутку времени называется средней скоростью точки за этот промежуток времени:

$$\upsilon_{ср} = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \ . \qquad (1.6)$$

Если уменьшить промежуток времени Δt , устремляя его к нулю, то в пределе средняя скорость при $\Delta t \to 0$ дает производную по времени от изменения координаты Δx, получившую название мгновенной скорости, величина которой определяется выражением

$$\upsilon = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad или \quad \upsilon = \frac{dx}{dt} \ . \qquad (1.7)$$

Таким образом, мгновенная скорость точки в данный момент времени равна производной от расстояния по времени. Скорость может обращаться в нуль в двух случаях:

1) если производная по времени в какой-либо момент равна нулю;

2) либо при переходе через нуль, когда изменяется знак на противоположный, и происходит изменение направление движения. Скорость в Международной системе единиц измерения СИ измеряется в *м/сек.*

Если $\upsilon = \upsilon_0 = const$ скорость точки – постоянная величина, то движение называется равномерным. Закон равномерного движения можно записать в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_0 \quad и \quad dx = \upsilon_0 dt \ .$$

Интегрируя последнее выражение, получим закон прямолинейного равномерного движения точки:

$$x = x_0 + \upsilon_0 t. \qquad (1.8)$$

Величина x_0 в формуле (1.8) является координатой точки в начальный момент времени при $t = 0$ или начальном расстоянии.

Ускорение прямолинейного движения находим аналогичным путем. Если принять за приращение скорости точки величину $\Delta\upsilon = \upsilon' - \upsilon$ в промежутке времени $\Delta t = t' - t$, то отношение приращения скорости к соответствующему промежутку времени – есть величина

$$a = \frac{\upsilon' - \upsilon}{t' - t}. \qquad (1.9)$$

Величина a называется средним ускорением точки за этот промежуток времени. Эта величина в пределе, при $\Delta t \to 0$ бесконечно малом промежутке времени при становится мгновенным ускорением:

$$a = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \ . \qquad (1.10)$$

Если ускорение a с течением времени не изменяется ($a = const$), то движение точки принято называть равнопеременным. Закон равнопеременного движения можно получить исходя из следующих вычислений:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = a \quad и \quad d\upsilon = adt.$$

Проинтегрировав последнее выражение, получим выражение для скорости:

$$\upsilon = \upsilon_0 + at \ . \tag{1.11}$$

Подставив выражение (1.11) в соотношение (1.7) и проинтегрировав, получим закон равномерного прямолинейного переменного движения точки:

$$x = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}, \tag{1.12}$$

где υ_0 – есть начальная скорость точки.

Если скорость по абсолютной величине возрастает, то движение называется ускоренным, а если убывает, то замедленным. Скорость и ускорение – векторные величины. При прямолинейном движении векторы скорости и ускорения направлены вдоль траектории движения, и кроме модулей их значений, они могут различаться знаками.

Закон прямолинейного движения может быть представлен графически в прямоугольной декартовой системе координат. Как правило, по оси абсцисс откладывают время, за которое происходит изменение положения точки, а по оси ординат – соответствующее расстояние. Графически закон движения, определяемый соотношением (1.12), изобразится кривой. Анализ функциональной кривой позволяет определить все свойства данного движения.

Например, для того чтобы графически оценить среднюю скорость движения точки для промежутка времени $\Delta t = t' - t$, которое аналитически определяется по формуле:

$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

достаточно провести секущую через точки M и M' графика траектории при соответствующих моментах времени: t' и t (рисунок 1.2).

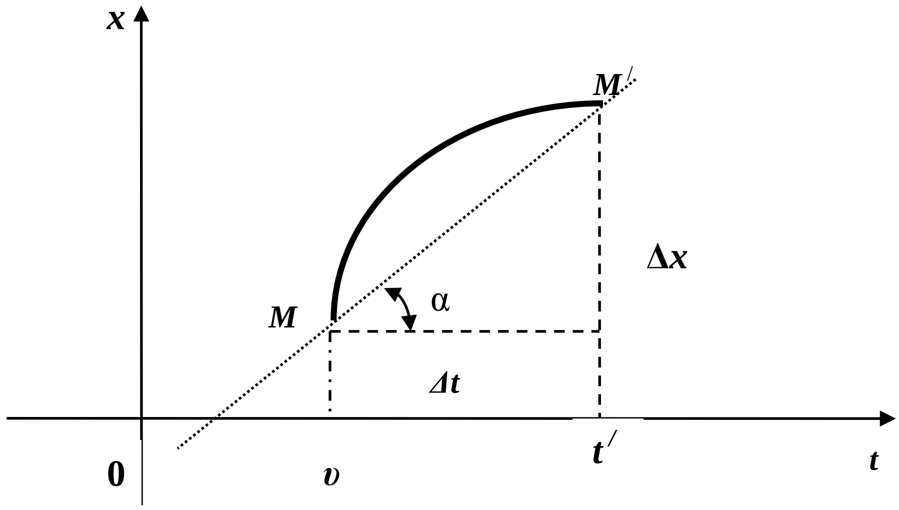


Рисунок 1.2

Средняя скорость движения точки численно равна тангенсу угла наклона секущей к оси абсцисс с точностью масштабного коэффициента:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = tg\alpha.$$

1.3. Гармоническое колебание

Частным случаем прямолинейного движения является гармоническое колебательное движение. Гармоническим колебательным движением называется движение материальной точки по закону синуса или косинуса. Закон гармонического колебательного движения может быть задан уравнением:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)\ , \qquad (1.13)$$

где x – смещение точки; A – амплитуда колебания, показывающая максимальное отклонение движующейся точки от начала отсчёта O; ω – циклическая частота; φ_o – начальная фаза колебания; t – время колебания.

Скорость точки при гармоническом колебании определится соотношением:

$$\upsilon = \frac{d\upsilon}{dt} = A\omega\cos\omega t\ , \qquad (1.14)$$

а ускорение:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2\sin\omega t\ . \qquad (1.15)$$

Время, с течением которого материальная точка возвращается в исходное положение, называется периодом колебания – T. Период колебания определяется из условия

$$\sin\omega(t+T) = \sin\omega t, \qquad (1.16)$$

откуда

$$\omega T = 2\pi \ \ и \ \ T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (1.17)$$

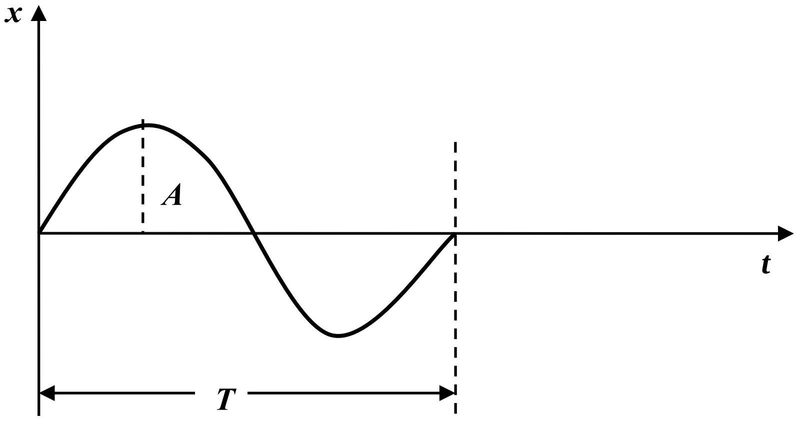


Рисунок 1.3

Величина ω, обратно пропорциональная периоду T, называется частотой колебаний. Аргумент синуса, т. е. величина ($\omega\ t + T$) называется фазой колебаний.

Величина $\omega = 2\pi\nu$ называется циклической или круговой частотой колебаний, где ν – частота колебания.

На рисунке 1.3 представлено графическое решение гармонического уравнения колебания (1.13). Отметим, что кривой расстояний гармонического колебательного движения является синусоида, а кривой скорости гармонического колебания точки – косинусоида. Кривая ускорения так же как и кривая растояний, является синусоидой, но сдвинутой по фазе относительно её на величину π.

1.4. Криволинейное движение точки

Криволинейное движение – это движение, траектория которого представляет собой кривую линию (например, окружность, эллипс, гиперболу, параболу).

Положение точки в данной системе отсчета определяется радиус-вектором $\boldsymbol{r}(x, y, z)$, имеющим начало в начале декартовой системе координат в точке O (см. рисунок 1.4). При движении точки, радиус-вектор меняется как функция по времени. Закон криволинейного движения обычно выражается векторным уравнением:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t)=x(t)\bullet\boldsymbol{i} + y(t)\bullet\boldsymbol{j} + z(t)\bullet\boldsymbol{k}, \tag{1.18}$$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – единичные векторы. Векторное уравнение (1.18) в координатной форме равносильно трем скалярным уравнениям:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \tag{1.19}$$

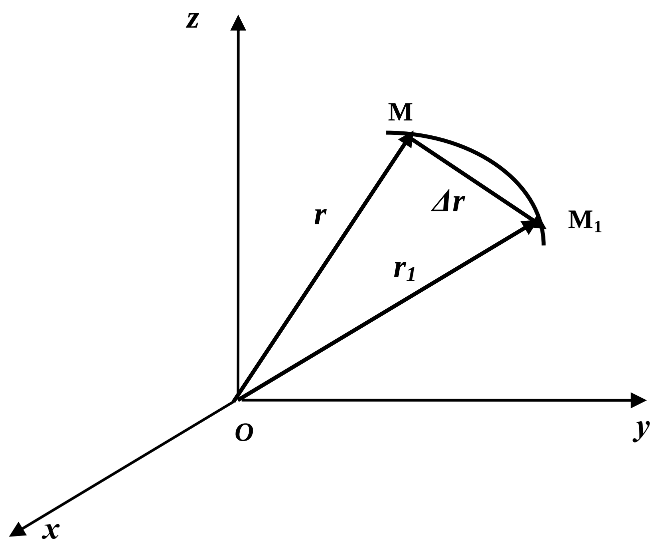


Рисунок 1.4

Пусть в некоторый момент времени t положение точки М (рисунок 1.4) определяется радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, а в момент времени t_1 положение точки M_1 – радиус-вектором $\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Delta r}$. Тогда перемещение точки М за промежуток времени $\Delta t = t_1 – t$ определится соотношением:

$$\Delta r = r + r_1 \tag{1.20}$$

Величина, равная отношению перемещения точки к соответствующему промежутку времени

$$\upsilon = \frac{r_1 - r}{t_1 - t} = \frac{\Delta r}{\Delta t}, \tag{1.21}$$

называется средней скоростью точки за промежуток времени Δt. Следовательно, средняя скорость точки есть вектор, направленный по хорде в направлении движения точки, так как Δt – скалярная величина.

Скорость точки в данный момент времени определится как предел, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad \text{или} \quad \upsilon = \frac{dr}{dt}. \tag{1.22}$$

Таким образом, скорость точки в данный момент времени является векторной величиной, равной первой производной от радиус-вектора точки по времени. Так как в пределе (при $\Delta t \to 0$) направление вектора $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ совпадает с направлением касательной к траектории, следовательно, и скорость точки в данный момент времени также будет направлен по касательной к ее траектории. Если принять, что модули величин $|dr| = |ds|$, где ds – есть элемент дуги траектории, то модуль скорости определится соотношением:

$$|d\vec{\upsilon}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|. \tag{1.23}$$

Следует отметить, что запись скорости движущейся точки по криволинейной траектории в виде формулы

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} \tag{1.24}$$

будет представлять собой проекцию скорости на касательную, проведенную в точке М в сторону положительного отсчета расстояний, и эту скорость обозначают как $\upsilon = \upsilon_\tau$ и называют тангенцальной скоростью точки.

Для определения ускорения криволинейного движения материальной точки удобнее рассматривать её движение относительно так называемой естественной системы координат. Координатные оси такой системы направлены: одна по касательной, другая – по внутренней нормали к траектории движения, а третья ось – перпендикулярно к этим обеим осям и соответственно, эти три оси получили название: тангенциальной, нормальной и бинормальной. Начало естественной системы координат (т. O) совмещается с движущейся материальной точкой. В естественной системе координат скорость точки М запишется в виде

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_\tau \vec{\tau}^0 = \upsilon\, \vec{\tau}^0, \tag{1.25}$$

где $\upsilon = \upsilon_\tau$ – проекция вектора скорости на тангенциальную ось; $\vec{\tau}^0$ – единичный вектор тангенцальной оси.

Дифференцируя равенство по времени, получим:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}^0 + \frac{d\vec{\tau}^0}{dt}\upsilon. \tag{1.26}$$

Видно, что ускорение точки состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое есть вектор, направленный по касательной к траектории движения. Направление второго слагаемого вектора ускорения ориентировано перпендикулярно к касательной и направлено по внутренней нормали к центру кривизны траектории. Из курса дифференциальной геометрии (*Амелькин Н.И.* Кинематика и динамика твердого тела. М., 2000) известно, что $\left|d\vec{\tau}^0\right| = \left|\vec{\tau}^0\right| d\theta = d\theta$, где $d\theta$ – угол смежности. Отсюда находим, что

$$\frac{d\vec{\tau}^0}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{n}^0 . \tag{1.27}$$

С другой стороны, если величину $d\theta/dt$ помножим и разделим на одну и ту же величину ds, то от этого данная величина не изменится, и введя обозначение

$$\frac{ds}{dt} = \upsilon, \quad a \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}, \tag{1.28}$$

можем записать следующее выражение:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{\upsilon}{\rho}, \tag{1.29}$$

где ρ есть радиус кривизны траектории. С учетом (1.29) формулу (1.27) перепишем в виде:

$$\frac{d\vec{\tau}^0}{dt} = \frac{\upsilon}{\rho}\vec{n}^0. \tag{1.30}$$

Подставляя выведенную величину (1.30) в формулу (1.26), окончательно получим:

$$\vec{a} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}^0 + \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}^0 . \tag{1.31}$$

Таким образом, проекции ускорения на оси естественной системы координат определятся следующими выражениями:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}, \quad a_b = 0 . \tag{1.32}$$

При равноускоренном или равнозамедленном движении закон движения точки имеет следующий вид:

$$s = s_0 + \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \tag{1.33}$$

Скорость точки в любой момент времени определится соотношением:

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm at , \tag{1.34}$$

где υ_0 – скорость точки в начальный момент времени (при $t = 0$).

Глава 2

МЕТОДЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

2.1. Графический способ задания движения точки

Закон движения и закон изменения скоростей и касательных ускорений точки можно представить графически (рисунок 2.1, *а, б*).

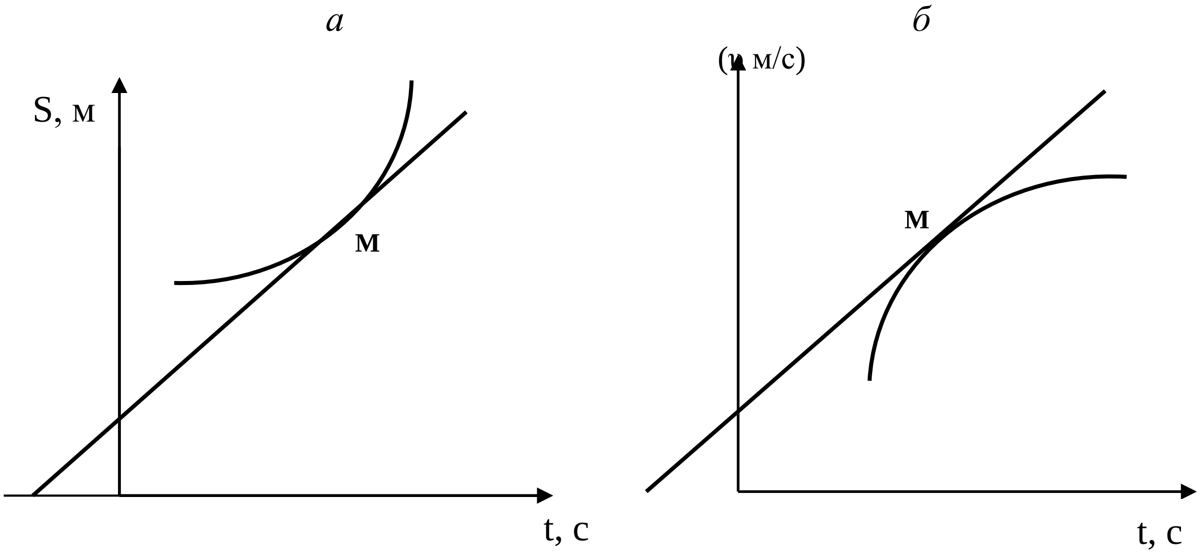


Рисунок 2.1

Графические способы помогают наглядно представить движение точки и часто облегчают решение сложных задач. Закон изменения расстояний точки от начала отсчета есть закон движения, который может быть представлен в координатах s, *t* в виде некоторой кривой, получившей название кривой расстояний (рисунок 2.1, *а*). Как видно на рисунке, по горизонтальной оси откладывается время *t,* а по вертикальной – расстояние *s*. Кривая скоростей может быть построена в системе координат *υ, t* (рисунок 2.2, *б*).

Определив величины скоростей в соответствующие моменты времени из формулы, определяющей закон изменения скоростей $\upsilon = f\ (t)$, можно построить график (кривую скоростей), откладывая значения скорости от времени в данной системе координат.

Аналогично строится кривая тангенцальных ускорений от времени, т. е. выбирают систему координат a_τ, t и вычисляют значения a_τ для расчётных моментов времени.

При построении графиков зависимостей масштаб интервала времени должен быть одинаковым для всех трех параметров: расстояний, скорости и ускорений. Масштабы расстояний, скоростей и ускорений выбирают, исходя из требований удобства и точности построения этих диаграмм.

Как известно, величина скорости точки равна первой производной от расстояния по времени, а величина касательного ускорения равна первой производной от скорости по времени. Поэтому скорость точки пропорциональна тангенсу угла наклона касательной к кривой расстояний (см. рисунок 2.1) в соответствующей точке М, т. е.

$$\upsilon = b_1 tg\alpha\ . \tag{2.1}$$

Касательное ускорение численно равно тангенсу угла наклона касательной к кривой скоростей в соответствующей точке М (рисунок 2.1), т. е.

$$a_\tau = b_2 tg\alpha. \tag{2.2}$$

Известно, что тангенс угла наклона между касательной к кривой и осью абсцисс равен первой производной от соответствующей функции.

2.2. Координатный способ задания движения точки

При координатном способе задания движения точки должны быть известны её координаты в выбранной системе координат, выраженные в функциях от времени *t:*

$$x = f_1(t): \qquad y = f_2(t); \qquad z = f_3(t). \tag{2.3}$$

Эти уравнения называют уравнениями движения в проекциях на оси координат. С другой стороны, эти уравнения представляют уравнения траектории точки в параметрической форме. Для получения их в явном виде нужно исключить параметр – время *t.* Зная эти уравнения, можно получить закон изменения проекций скорости на соответствующие оси координат по формулам:

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_x; \qquad \frac{dy}{dt} = \upsilon_y; \qquad \frac{dz}{dt} = \upsilon_z. \tag{2.4}$$

Модуль величины скорости точки, выраженной через ее проекции, определится соотношением:

$$\upsilon = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} \quad . \tag{2.5}$$

Направления вектора скорости $\vec{\upsilon}$ могут быть определены по приведенным ниже формулам:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\upsilon_x}{\sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}} \\ \cos\beta &= \frac{\upsilon_y}{\sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{\upsilon_z}{\sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}} \end{aligned}\right\}, \tag{2.6}$$

где α, β, γ – углы между вектором скорости и соответствующими осями координат O x, O y и O z.

Проекции ускорения точки на оси координат равны вторым производным от координат по времени:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a_y; \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = a_z. \tag{2.7}$$

Величина полного ускорения:

$$a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{2.8}$$

Направление вектора ускорения можно установить, определив углы α_1, β_1, γ_1, которые находятся между вектором ускорения и соответствующими осями координат, по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos\beta_1 &= \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos\gamma_1 &= \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \end{aligned}\right\}. \tag{2.9}$$

2.3. Связь между координатными и натуральными способами задания движения точки

Если движение точки задано координатным способом, то для перехода к натуральному – необходимо определить уравнение траектории точки, положение точки в начальный момент времени (координаты x_0, y_0, z_0) и закон движения точки по ее траектории.

Закон движения точки можно определить по траектории его движения следующим уравнением:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)} \cdot dt, \tag{2.10}$$

где s – дуговая координата (расстояние точки от начала отсчета); $f_1'(t)$, $f_2'(t)$, $f_3'(t)$ – первые производные от координат по времени.

2.4. Векторный способ задания движения точки

При векторном способе задания движения точки ее положение определяется радиус-вектором, проведенным из произвольно выбранного центра. Радиус-вектор есть функция времени:

$$\vec{r} = f(t). \tag{2.11}$$

Радиус вектор в проекциях на оси координат *Ox, Oy и Oz* , будет иметь вид:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{2.12}$$

Вектор скорости (согласно определению) есть первая производная от радиус-вектора по времени и запишется как

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{2.13}$$

или в проекциях на оси координат вектор скорости примет вид:

$$\vec{\upsilon} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \tag{2.14}$$

Вектор полного ускорения есть первая производная от вектора скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{d\,t} \tag{2.15}$$

или в проекциях на оси координат:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{d\,t^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{d\,t^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{d\,t^2}\vec{k}. \tag{2.16}$$

2.5. Годографы

Годóграфом (*от древне-греч. – путь, движение, направление*) называется кривая, представляющая собой геометрическое место концов изменяющегося со временем вектора физической величины (скорости либо ускорения), значения которого в различные моменты времени отложены от начала отсчёта т. *O* (см. рисунок 2.2).

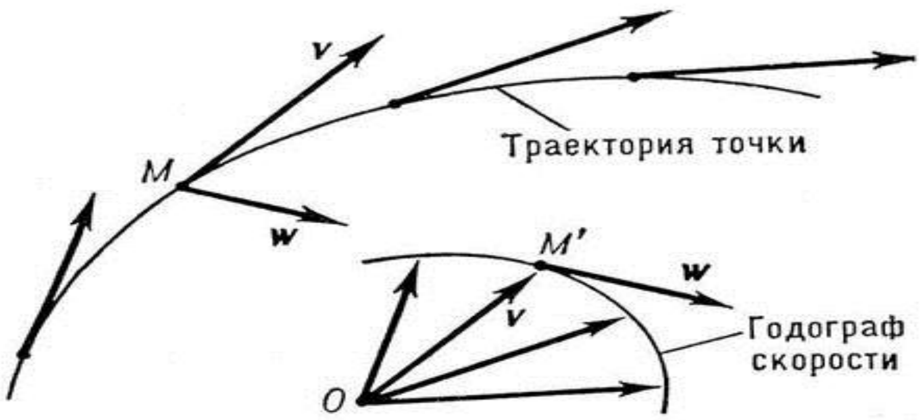


Рисунок 2.2

Линия, соединяющая концы векторов скоростей (или ускорений) точки, проведенных из начала отсчёта т. *O* выбранного центра, называется годографом скоростей. Видно, что годограф даёт наглядное геометрическое представление о том, как изменяется со временем физическая величина, изображаемая переменным вектором, и о скорости этого изменения, имеющей направление по касательной к годографу. Например, если скорость точки – величина, изображаемая переменным вектором, то, отложив значения этого вектора в разные моменты времени от выбранной точки *O*, получим годограф скорости. При этом вектор, характеризующий быстроту изменения скорости υ в некоторой точке *M*, т. е. ускорение a_τ в этой точке, в любой момент времени направлен по касательной к годографу скорости в соответствующей его точке. Для получения уравнения годографа скорости при задании движения точки координатным способом, следует продифференцировать уравнения движения и исключить время *t* из полученных уравнений скоростей υ_x и υ_y .

Глава 3

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

3.1. Методические указания к решению задач

Задачи по кинематике материальной точки в основном можно свести к четырём основным типам. Рассмотрим эти задачи по отдельности, и проанализируем способы их решения.

1. Движение точки задано естественным способом. Требуется определить кинематические элементы движения (скорость, касательное, нормальное и полное ускорение) как функции от времени или в требуемые моменты времени. Задача решается путем дифференцирования закона движения точки согласно формулам (1.2), (1.3), (1.4), (1.5).

В случае, когда известна траектория и требуется определить закон движения точки по заданной скорости или ускорению, задача решается путем интегрирования заданной функции. При этом в условии задачи должны быть данные (начальные или конечные условия), которые применяются для определения постоянной интегрирования. Определив закон движения точки, остальные элементы движения можно определить по указанным выше формулам.

2. Движение точки задано координатным способом. Требуется определить уравнение траектории точки в заданной системе координат, затем путем дифференцирования определяются проекции скоростей и ускорений точки на соответствующие оси координат, их величины и направления по формулам (2.5), (2.6), (2.8) и (2.9). К координатному способу относятся задачи, когда в условии задачи заданы проекции скорости или ускорения движущейся точки и требуется определить закон изменения координат точки в зависимости от времени и уравнение траектории точки. В этом случае, на основании равенства (2.4) или (2.7) интегрируют заданные функции и определяют закон изменения координат точки в функциональной зависимости от времени. Для определения постоянной интегрирования используются данные, приведенные в условиях каждой задачи.

3. Движение точки задано координатным способом. Требуется определить траекторию и закон движения точки по траектории, касательному, нормальному, полному ускорению точки, и других кинематических параметров движения.

В этом случае скорость точки и полное ускорение ее в функции от времени определяется по формулам (2.5) и (2.8), затем по формуле (1.3) – величина касательного ускорения. Зная величины полного и касательного ускорений, можно из формулы (1.4) получить величину нормального ускорения. Зная нормальное ускорение, из этой же формулы определяют величину радиуса кривизны для любого требуемого момента времени. Закон движения точки по траектории определяют по уравнению (2.9).

4. К четвёртому типу задач относятся задачи, которые специально направлены на ознакомление с теми или иными способами составления уравнений движения точки. Например, задачи по составлению уравнения движения точек при полете тяжелого тела или при движении точек обода катящегося колеса и многие другие движения. Такой тип задач движения точек, как правило, рассматривают в прямоугольной декартовой системе координат, и полученный закон движения точки, выраженный координатным способом, используют для определения искомых величин.

3.2. Примеры решения задач

Задача № 1

Точка движется по дуге окружности радиусом R = 30 см. Закон ее движения по этой дуге S = 30 sinπt (t – в сек, S – в см). Найти величину направления скорости и полное ускорение точки в момент времени t = 5 сек.

Дано:

S = 30 sinπt,
[S] – см,
[t] – с,
R = 30 *см,*
g = 9,8 м/с^2.

Найти: υ –?

Решение.

Величина скорости для любого момента времени определяется по формуле

$$\upsilon = \frac{ds}{dt}.$$

Следовательно,

$$\upsilon = \frac{d}{dt}\left(30\sin\pi t\right) = 30\pi\cos\pi t \text{ см/с}.$$

В момент времени $t = 5$ *сек.*

$$\upsilon = 30\ \pi cos\pi \cdot 5 = -30\ \pi см/сек.$$

Знак минус показывает, что скорость точки в данный момент направлена против положительного направления движения.

Для определения величины полного ускорения необходимо вычислить касательное и нормальное ускорение. Касательное ускорение для любого момента времени равно:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(30\pi cos\pi t) = -30\pi^2\sin\pi t \quad см/сек^2.$$

В момент времени $t = 5$ *сек.*

$$a_\tau = -30\pi^2 cos\pi \cdot 5 = 0.$$

Нормальное ускорение для любого момента времени определится по формуле:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(30\pi\cos\pi t)^2}{30} = 30\pi^2\cos^2\pi t \ \ см/сек.$$

в момент времени $t = 5$ *сек* нормальное ускорение точки определится как

$$a_n = 30\pi^2\cos^2\pi\cdot 5 = 30\pi^2 \ \ см/сек^2.$$

Нормальное ускорение направлено по радиусу к центру вращения.

Полное ускорение для любого момента времени равно:

$$a = \sqrt{a_\tau^{\ 2} + a_n^{\ 2}} = \sqrt{(-30\pi^2\sin\pi t)^2 + (30\pi^2\cos^2\pi t)^2} = 30\pi^2\sqrt{\sin^2\pi t + \cos^2\pi t}.$$

В момент $t = 5\,сек$ касательное ускорение равно нулю, следовательно, полное ускорение по величине и направлению равно нормальному ускорению.

Задача № 2

Трамвай движется по прямолинейной траектории и в период разгона расстояние S увеличивается пропорционально кубу времени; в течение первой минуты трамвай прошел расстояние 90 м. Найти скорость и ускорение в момент $t = 0$ и $t = 5$ *сек.* Построить кривые расстояний, скоростей и ускорений.

Дано:
ΔS = Δr,
t = 1 мин = 60 с,
t_1 = 0 с,
$t_2 = 5$ *с*,
S = 90 м,
$S \sim t^3$.

Найти: *υ –? a –? f(x) –? f(υ) –? f(a) –?*

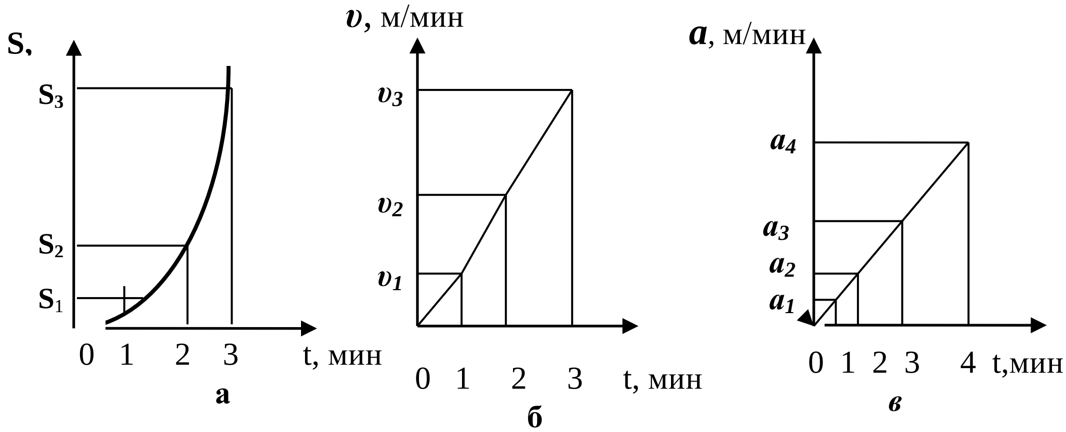


Рисунок 3.1

Решение.

Рассмотрим движение трамвая как прямолинейное движение точки по закону:

$$s = at^3, \tag{3.1}$$

где s – расстояние точки от начала отсчета; *a* – постоянный коэффициент; *t* – время.

Скорость и ускорение точки определим из уравнений:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt},$$

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Поскольку движение по условию задачи прямолинейное, то нормальное ускорение $a_n = 0$, следовательно, полное ускорение будет равно касательному ускорению $a = a_\tau$. Предварительно определим величину *a,* подставив в уравнение (3.1) значение $s = 90\ м$. Тогда получим:

$$90 = a \cdot 1^3, \text{ отсюда} => a = 90.$$

Следовательно, закон движения трамвая будет иметь вид:

$$s = 90t^3.$$

Скорость точки в любой момент времени:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = 270t^2 \quad м/мин.$$

Ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = 540t \ \ м/мин^2.$$

Таким образом, скорость и ускорение трамвая в начальный момент t = 0 равны нулю, а через 5 *сек* после начала движения соответственно скорость и ускорение принимают значения, равные:

$$\upsilon = 270\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{15}{8} \ \ м/мин. \ a_\tau = 540\frac{1}{12} = 45 \quad м/мин.$$

Зная аналитические выражения *s, υ* и a_τ, закон их изменения можно представить графически (см. рисунок 3.1, *а, б, в*). Для этого в прямоугольной системе координат построим кривые расстояний, скоростей и ускорений, приняв при этом следующие масштабы: для времени 1 см – 0,5 мин; для расстояний 1 см – 900 м; для скорости 1 см – 900 м/мин; для ускорений 1 см – 900 м/мин^2.

Задача № 3

Материальная точка движется по закону: $x = 5 + 3\cos t; \quad y = 4\sin t$.

Определить уравнение траектории движения.

Дано: $x = 5 + 3\cos t; \quad y = 4\sin t.$

Найти: уравнение траектории точки.

Решение.

Чтобы исключить время из заданных уравнений, преобразуем их и приведем к виду:

$$\frac{x-5}{3} = cost; \ \ \frac{y}{4} = \sin t.$$

Возведем эти уравнения в квадрат и соответственно сложим их левые и правые части, а также учитывая известное тригонометрическое соотношение $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, получим следующее выражение:

$$\left(\frac{x-5}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1.$$

Последнее можно привести к виду:

$$\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Из последнего выражения видно, что данное соотношение является уровнением эллипса.

Задача № 4

Движение материальной точки задано уравнениями:

$$x=3\cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi t\right),\ \ y=4\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi t\right).$$

Найти уравнение ее траектории.

Дано:

$$x=3\cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi t\right),\ \ y=4\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi t\right).$$

Найти: уравнение траектории точки.

Решение.

Для того чтобы исключить время из заданных уравнений, преобразуем их, используя тригонометрические свойства функций косинуса и синуса, тогда получим следующие выражения:

$$\frac{x}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi t\right), \tag{3.2}$$

$$y=4\sin\left[\left(\frac{\pi}{8}+\pi t\right)+\frac{\pi}{8}\right]=4\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}+\pi t\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi t\right)\sin\frac{\pi}{8}\right]. \tag{3.3}$$

Подставив значения уравнения (3.2) в уравнение (3.3), получим:

$$y-4\sin\frac{\pi}{8}=4\cos\frac{\pi}{8}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}+\pi t\right). \tag{3.4}$$

Последнее приведём к виду:

$$\frac{y-\frac{4x}{3}\sin\frac{\pi}{8}}{4\cos\frac{\pi}{8}}=\sin\left(\frac{\pi}{8}+\pi t\right). \tag{3.5}$$

Возведя обе части уравнений (3.2) и (3.5) в квадрат и сложив их, получим:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{\left(y-\frac{4x}{3}\sin\frac{\pi}{8}\right)^2}{16\cos^2\frac{\pi}{8}}=1. \tag{3.6}$$

Полученное уравнение (3.6) можно окончательно представить в виде:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{xy}{6}\sin\frac{\pi}{8}=\cos^2\frac{\pi}{8}. \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) является уравнением траектории движущейся точки и представляет собой эллипс.

Задача № 5

Заданы уравнения движения снаряда: $x = 250t;\ \ y = 430t - 4{,}9t^2$ (t – сек, x, y – в м). Определить время, дальность полета, траекторию снаряда, а также величины и направления скорости и полного ускорения в момент падения снаряда на землю.

Дано: $x = 250t;\ \ y = 430t - 4{,}9t^2$.

Найти: t –? L –? υ –? a –?

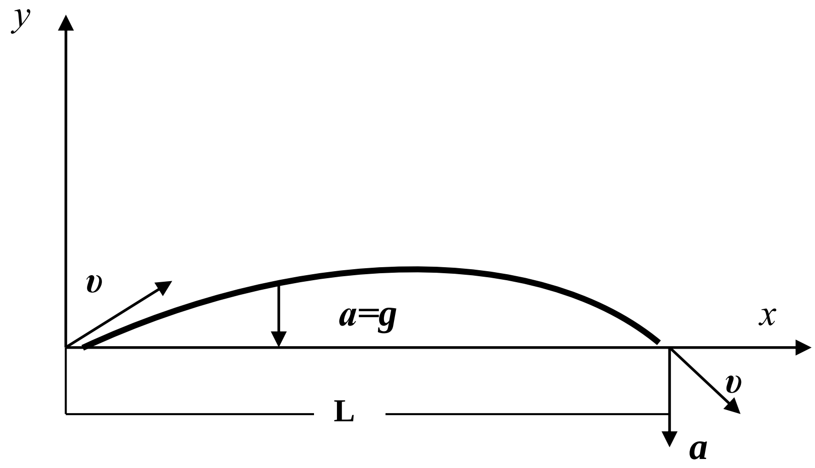


Рисунок 3.2

Решение.

Найдём уравнение траектории движения точки. Для этого исключим время из заданных уравнений движения:

$$x = 250t, \tag{3.8}$$

$$y = 430t - 4{,}9t^2. \tag{3.9}$$

Выразив из уравнения (3.8) время, и подставив его значение в уравнение (3.9), получим:

$$y = 430\frac{x}{250} - 4{,}9\frac{x^2}{250^2} = 1{,}72x - 0{,}0000784x^2. \tag{3.10}$$

Видно, что траекторией полёта снаряда является парабола (рисунок 3.2).

Для определения дальности полета L найдем такое значение x, при котором $y = 0$, т. е. уравнение (3.9) приравняем нулю:

$$430t - 4{,}9t^2 = 0 \ \ (*)\,.$$

Решим (*) относительно t, и получим время полета:

$$t = \frac{430}{4{,}9} = 87{,}75 \text{ сек}. \tag{3.11}$$

Теперь вычислим дальность полета:

$$x = L = 250t = 250 \cdot 87{,}75 = 21{,}94\,. \tag{3.12}$$

Определим величину скорости по ее проекциям на оси координат из формулы:

$$\upsilon = \sqrt{{\upsilon_x}^2 + {\upsilon_y}^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ \ . \tag{3.13}$$

Подставив численные значения, получим:

$$\upsilon = \sqrt{250^2 + (430 - 9{,}8 \cdot 87{,}75)^2} = 422 \quad м/сек\ . \tag{3.14}$$

Направление скорости определим из отношения υ_x/υ по формуле:

$$\cos(\vec{\upsilon}, \vec{i}\,) = \frac{\upsilon_x}{\upsilon} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} = \frac{250}{422} = 0{,}593. \tag{3.15}$$

Таким образом, cosβ = 0,593, где (<β = <(υ, i) (косинус угла β может быть равен двум значениям: $\beta_1 = 53^{\circ}40'$ или $\beta_2 = 306^{\circ}20'$). Первое значение угла β_1 соответствует моменту вылета снаряда из дула орудия, а второе β_2 – моменту падения снаряда на землю.

Величину ускорения определим по ее проекциям на оси координат по формуле:

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}. \tag{3.16}$$

Подставив в формулу (3.16) значения проекций ускорения на соответствующие оси ОХ и ОУ координат, вычислим модуль полного ускорения: $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ и $\frac{d^2y}{dt^2} = -9{,}8\ /сек^2$.

Таким образом, полное ускорение будет равно: $a = 9{,}8\ \ м/сек^2$.

Направление вектора полного ускорения определим аналогично, как и для скорости по формуле:

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}\,) = \frac{a_y}{a} = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}}. \tag{3.17}$$

Расчёт по формуле (3.17) показывает, что угол равен 270 °С, т. е. отсюда следует, что ускорение направлено вертикально вниз и параллельно оси О*У*.

Задача № 6

Длина линейки эллипсографа *AB* = 40 *см,* длина кривошипа *OC* = 20 *см*, *AC* = *CB*. Кривошип равномерно вращается вокруг оси *O* с угловой скоростью *ω*. Найти уравнение траектории точки *M* и годографа ее скорости, если точка *M* находится на расстоянии 10 *см* от конца *A*.

Дано:
АВ = 40 см,
ОС = 20 см,
АС = СВ,
МА = 10 см.

Найти: уравнение траектории точки М и годографа.

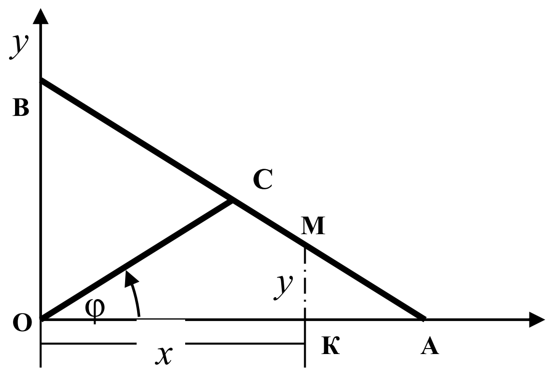


Рисунок 3.3

Решение.

Составим уравнения движения точки M, приняв координатный способ задания движения. На рисунке 3.3 видно, что координаты $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ точки M соответственно равны:

$$x = 30\cos\varphi; \tag{3.18}$$

$$y = 10\sin\varphi. \tag{3.19}$$

Так как кривошип вращается равномерно с постоянной скоростью ω, то угол φ наклона кривошипа к оси x пропорционален времени и определится соотношением:

$$\varphi = \omega t\ . \tag{3.20}$$

С учётом этого, уравнения (3.18) и (3.19) движения точки перепишем в виде:

$$x = 30\cos\omega t; \tag{3.18$'$}$$

$$y = 10\sin\omega t. \tag{3.19$'$}$$

Для того чтобы определить уравнения траектории движения кривошипа, нужно в уравнениях (3.18′) и (3.19′) исключить время t. Для этого разделим правую и левую части уравнений соответственно на коэффициенты при косинусе и синусе и возведем обе части уравнений в квадрат, затем, сложив их, окончательно получим выражение:

$$\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{100} = 1\,. \tag{3.21}$$

Это уравнение представляет собой эллипс с полуосями равными 30 *см* и 10 *см*.

Чтобы получить уравнение годографа точки M, определим проекции скорости этой точки на оси координат x и y.

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = -30\omega\sin\omega t, \tag{3.22}$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = 10\omega\cos\omega t. \tag{3.23}$$

Уравнение годографа составим в системе координат $\dot{x}O\dot{y}$, где $\dot{x}$ и $\dot{y}$ – проекции скорости на эти оси. Для этого из уравнений (3.22) и (3.23) исключим время t.

$$-\frac{\dot{x}}{30\omega} = \sin\omega t\ , \tag{3.22$'$}$$

$$\frac{\dot{y}}{10\omega} = \cos\omega t \ . \qquad (3.23^{/})$$

Возведя обе части уравнений $(3.22^{//})$ и $(3.23^{//})$ в квадрат и сложив их, получим годограф скорости в явном виде:

$$\frac{\dot{x}}{900\omega^2} + \frac{\dot{y}}{100\omega^2} = 1 \ . \qquad (3.24)$$

Уравнение (3.24) представляет собой эллипс с полуосями, равными 30 ω и 10 ω.

Задача № 7

Найти скорости движения середины *M* шатуна кривошипно-шатунного механизма и ползуна при $r = l = a$ и $\varphi = \omega t$, где $\omega = const$.

Дано:

$r = l = a$;

$\varphi = \omega t$, где $\omega = const$.

Найти: $\upsilon(м)$ *–?*

Решение.

Решим эту задачу, применив координатный способ задания движения точки. Выберем начало координат в точке *O*, направим ось *OX* по горизонтали вправо. А ось *OУ* – по вертикали вверх. Обозначим координаты точки *M* через *x* и *y* и определим по рисунку 3.4 их величины. Согласно рисунка 3.4 координаты *x* и *y* определятся по формулам (3.25) и (3.26):

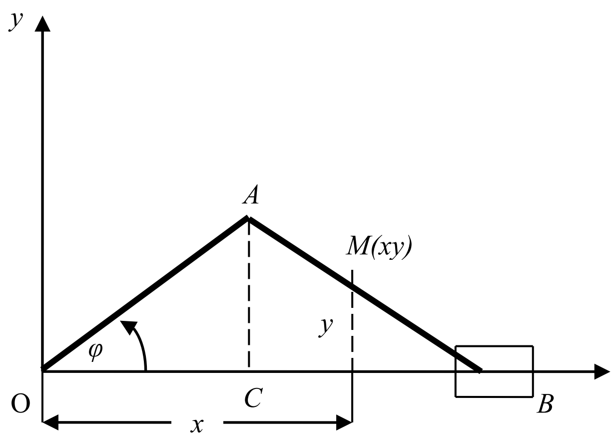


Рисунок 3.4

$$x = r\cos\omega t + \frac{1}{2}\cos\omega t, \qquad (3.25)$$

$$y = \frac{l}{2}\sin\omega t \ , \qquad (3.26)$$

так как по условию $r = l = a$, то соотношения (3.25) и (3.26) перепишем в виде:

$$x = \frac{3}{2}a\cos\omega t \, , \qquad (3.25^{/})$$

$$y = \frac{a}{2}\sin\omega t \ . \qquad (3.26^{/})$$

Проекции скорости точки *M* на оси координат определим по формулам:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{3}{2}a\omega\sin\omega t, \qquad (3.27)$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{a}{2}\omega\cos\omega t. \qquad (3.28)$$

Величину полной скорости определим из соотношения:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}a\sin\omega t\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\omega\cos\omega t\right)^2} = \frac{a}{2}\omega\sqrt{8\sin^2\omega t + 1}. \qquad (3.29)$$

Закон движения ползуна *B* получим, выразив x_B как функцию от времени. Из ΔOAB получим:

$$x_B = (r + l)\cos\omega t$$

или

$$x_B = 2a\cos\beta\omega t \ . \qquad (3.30)$$

Величину скорости ползуна *B* определим по формуле

$$\upsilon_B = \frac{d\upsilon_B}{dt} = -2a\omega\sin\omega t \ . \qquad (3.31)$$

Знак минус показывает, что скорость точки в данный момент времени направлен в противоположную сторону по отношению к положительному направлению оси *Ox*.

Задача № 8

Бомба, сброшенная с самолета, движется согласно уравнениям:

$$x = \upsilon_0 t; \qquad y = h - \frac{gt^2}{2},$$

где *x*, *y* – координаты бомбы для любого момента времени; υ_0 – начальная скорость бомбы, направленная горизонтально и равная скорости самолета в момент сбрасывания бомбы; *h* – высота падения бомбы; *t* – время; *g* – ускорение силы тяжести. Ось *Ox* направлена горизонтально, а ось *Oy* – вертикально вверх. Найти уравнение траектории; величину и направления скорости бомбы и скорости υ_1 точки, вычерчивающий годограф.

Дано:

$$x = \upsilon_0 t; \quad y = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Найти: уравнение траектории *υ(м) –? υ₁ –?*

Решение.

Исключив время из заданных уравнений движения, определим уравнения траектории:

$$x = \upsilon_0 t; \qquad (3.32)$$

$$y = h - \frac{gt^2}{2} \ . \qquad (3.33)$$

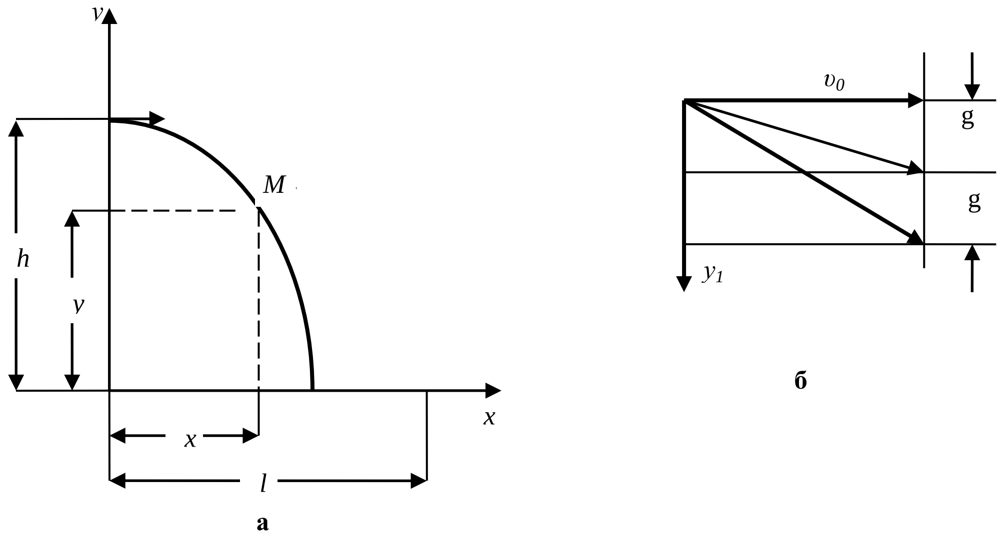


Рисунок 3.5

Определив время t из уравнения (3.32), и подставив его значение в уравнение (3.33), получим:

$$y = h - \frac{g}{2\upsilon_0^2} x^2 \ . \tag{3.34}$$

Как показывает уравнение (3.34), траекторией бомбы является парабола.

Из уравнения (3.33) определим время полета бомбы до ее падения о землю, т. е. когда $y = 0$. С учетом этого формулу (3.33) приравняем нулю, и получим:

$$0 = h - \frac{gt^2}{2} \ , \tag{3.33$'$}$$

откуда найдём время полёта бомбы:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \ . \tag{3.35}$$

Дальность полета $x_{\max} = l$ можно определить из уравнения (3.32), зная время t, а именно:

$$x_{\max} = l = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \ . \tag{3.36}$$

Скорость бомбы определим через проекции скорости на оси координат:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \upsilon_0 \ , \tag{3.37}$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = -gt \ . \tag{3.38}$$

Величину скорости для любого момента времени можно оценить из выражения:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 t^2} \ . \tag{3.39}$$

Скорость бомбы в момент падения на землю определим при подстановке формулы (3.35) в формулу (3.39), т. е. получим:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh} \ . \tag{3.40}$$

Направление вектора скорости бомбы в момент ее падения на землю определим, вычислив косинус угла между направлениями вектора скорости и оси *Ox*:

$$\cos(\vec{\upsilon}, \vec{i}\,) = \frac{\upsilon_x}{\upsilon} = \frac{\upsilon_0}{\upsilon} \ . \tag{3.41}$$

Для получения уравнения годографа скорости бомбы исключим t из уравнений (3.37) и (3.38). Тогда уравнение годографа будет иметь вид:

$$x_1 = \upsilon_0 \ , \tag{3.42}$$

т. е. уравнение вертикальной прямой (рисунок 3.5, Б), отстоящей от начала координат на υ_0. Скорость υ_{1y} точки, вычерчивающий годограф, определится при дифференцировании уравнения (3.38). В результате дифференцирования получим выражение скорости точки, вычерчивающий годограф:

$$\upsilon_{1y} = -g \ . \tag{3.43}$$

Задача № 9

Определить уравнение движения и траектории точки *M* обода колеса паровоза радиусом $R = 1$ *м*, если паровоз движется по прямолинейному пути с постоянной скоростью *20 м/сек*. Принять, что колесо катится без скольжения; за начало координат (т. *O*) взять начальное положение движущейся точки вдоль оси *Ox*. Определить также величины и направления скорости и полного ускорения точки обода колеса в момент $t = \frac{\pi}{30}$ *сек.*

Дано:
$R = 1$ *м,*
$\upsilon = 20$ *м/с,*
$t = \frac{\pi}{30}$ *сек.*

Найти: уравнение движения и траектории $\upsilon -?$ $\alpha -?$

Решение.

Обозначим точку касания колеса с рельсом в начальный момент через т. *O* и примем её за начало координат, направив ось *Ox* вдоль рельса вправо, а ось *Oy* – вертикально вверх. Так как колесо катится по рельсу без скольжения, то дуга окружности *PM* равна участку рельса *OP*, где *P* – точка касания колеса с рельсом в данный момент времени.

Рассмотрим движение точки *M*. Пусть ее текущие координаты будут *x, y*.

Обозначив центральный угол *PCM* через φ, получим:

$$x = OP - M_0P = R\varphi - R\sin\varphi\,, \tag{3.44}$$

$$y = M_0M = R - R\cos\varphi\,. \tag{3.45}$$

Таким образом, уравнения движения (3.44) и (3.45) соответственно будут иметь вид (3.46) и (3.47):

$$x = R(\phi - \sin\phi), \tag{3.46}$$

$$y = R(1 - \cos\phi). \tag{3.47}$$

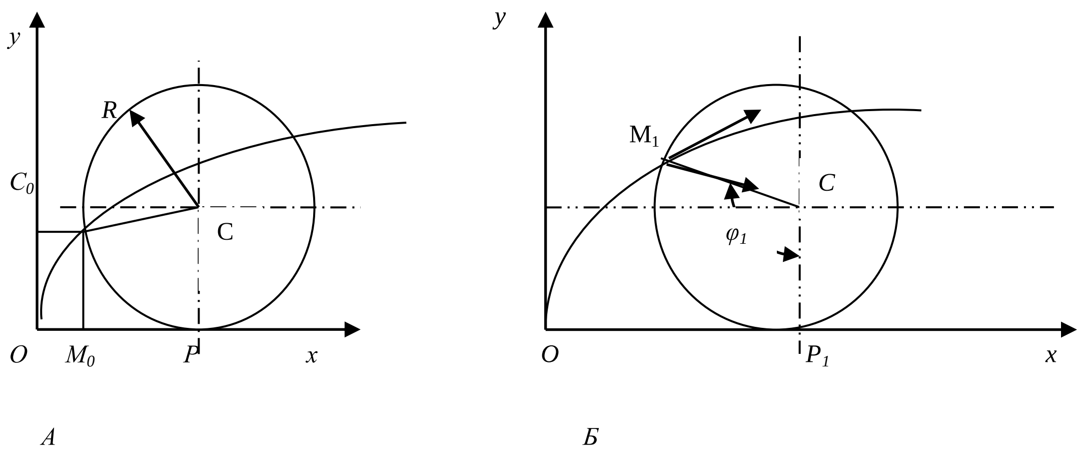


Рисунок 3.6

Дуга окружности *PM* равна участку рельса *OP,* который равен расстоянию, пройденному центром колеса *C* от своего начального положения C_0 (см. рисунок 3.6, А и Б). Центр колеса *C* движется равномерно со скоростью υ_0, следовательно, дуга окружности PM будет равно расстоянию C_oC:

$$C_0C = PM. \tag{3.48}$$

Последнее выражение (3.48) с учётом начальных условий задачи перепишем в виде:

$$\upsilon t = R\varphi \ , \tag{3.49}$$

откуда найдём φ:

$$\varphi = \frac{\upsilon}{R} t = 20t \ . \tag{3.50}$$

Подставив значение φ соответственно в уравнения (3.46) и (3.47), получим:

$$x = 20t - \sin 20t \ , \tag{3.51}$$

$$y = 1 - \cos 20t. \tag{3.52}$$

Кривая, которую описывает точка окружности колеса, катящегося без скольжения по неподвижной прямой, представляет собой циклоиду. Определим проекции скорости точки обода колеса на оси координат *x* и *y*:

$$\begin{aligned} \upsilon_x &= \frac{dx}{dt} = 20 - 20\cos 20t, \\ \upsilon_y &= \frac{dy}{dt} = 20\sin 20t. \end{aligned} \tag{3.53}$$

В момент $t = \dfrac{\pi}{30}$ *сек* точка будет находиться в положении M_1, определяемом величиной угла φ (рисунок 3.6, Б).

Значение угла φ_1 определим из уравнения (3.50), т. е. получим:

$$\varphi_1 = 20t = 20 \cdot \frac{\pi}{30} = \frac{2}{3}\pi \ \textit{рад.}, \tag{3.54}$$

откуда $\varphi_1 = 120^\circ$.

Определим проекции скорости в момент $t = \frac{\pi}{30}$ *сек*. Из уравнений (3.53) определим значения проекций скоростей на оси ОХ и ОУ:

$$\upsilon_x = 20 - 20\cos 20\frac{\pi}{30} = 20 + 20\frac{1}{2} = 30 \text{ м / сек.} \tag{3.55}$$

$$\upsilon_y = 20\sin 20\frac{\pi}{30} = 20\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ м / сек.} \tag{3.56}$$

Величину полной скорости определим из соотношения:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{30^2 + (10\sqrt{3})^2} = 20\sqrt{3} \text{ м / сек.} \tag{3.57}$$

Направление вектора полной скорости определим, вычислив угол между направлением вектора скорости и положительным направлением оси *Ox*

$$\cos(\vec{\upsilon}, \vec{i}\,) = \frac{\upsilon_x}{\upsilon} = \frac{30}{20\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ рад.,} \tag{3.58}$$

$\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. угол β между вектором скорости и осью *Ox* составляет $\beta = 30^\circ$.

Определим проекции ускорения точки обода колеса на оси координат:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 400\sin 20t, \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = 400\cos 20t. \tag{3.59}$$

Величину полного ускорения определим по формуле:

$$a = \sqrt{a_x + a_y} = \sqrt{(400\sin 20t)^2 + (400\cos 20t)^2} = 400 \text{ м / сек.} \tag{3.60}$$

Направление вектора полного ускорения определим, вычислив угол между вектором ускорения и положительным направлением оси *Ox*.

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}\,) = \frac{a_x}{a} = \frac{400\sin 20t}{400} = \sin 20t. \tag{3.61}$$

Последнее выражение (3.61) приведём к виду, используя тригонометрические свойства связи функций синуса и косинуса, получим:

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}\,) = \cos(\frac{\pi}{2} - 20t). \tag{3.62}$$

Следовательно,

$$\angle(\vec{a}, \vec{i}\,) = \frac{\pi}{2} - 20t \quad \text{рад.} \tag{3.63}$$

В момент времени $t = \frac{\pi}{30}$ сек угол между вектором ускорения $\vec{a}$ и положительным направлением оси *Ox* равен

$$\angle(\vec{a}, \vec{i}\,) = \frac{\pi}{2} - 20\frac{\pi}{30} = -\frac{\pi}{6} \text{ рад.,}$$

что соответствует отрицательному углу 30°.

Задача № 10

Ползун *B* движется по прямолинейной направляющей (см. рисунок 3.7) с ускорением $a_x = -\pi^2 \sin\frac{\pi}{2}t$ *м/сек.* Найти уравнение движения ползуна, если его начальная скорость $\upsilon_0 = 2\pi$ *м/сек.*, а начальное положение совпадает со средним положением ползуна, принятым за начало координат. Построить кривые расстояний, скоростей и ускорений.

Дано:

$a_x = -\pi^2 \sin\frac{\pi}{2}t$ *м/сек.*, $\upsilon_0 = 2\pi$ *м/сек.*

Найти: уравнение движения, построить f(s) –? f(υ) –? f(a) –?

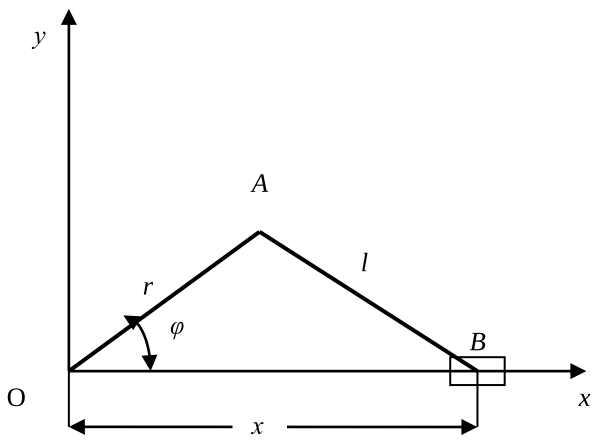


Рисунок 3.7

Решение.

Движение ползуна прямолинейное неравномерное. Задан закон изменения ускорений, на основании которого требуется определить закон изменения скорости и закон движения ползуна. Эту задачу решаем путем последовательного интегрирования дифференциального уравнения, характеризующего закон изменения ускорения.

Примем ползун за точку, движущуюся по прямолинейной траектории. Направим ось координат *Ox* по траектории вправо. Согласно условию задачи

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\pi^2 \sin\frac{\pi}{2}t\,. \tag{3.64}$$

Проинтегрируем это выражение, тогда получим:

$$\frac{dx}{dt} = \int -\pi^2 \sin\frac{\pi}{2}t dt = 2\pi \cos\frac{\pi}{2}t + C_1\,. \tag{3.65}$$

Так как проекция скорости на ось *Ox* определяется по формуле:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \tag{3.66}$$

Проинтегрировав (3.66), получим уравнение (3.67) в следующем виде:

$$\upsilon_x = 2\pi \cos\frac{\pi}{2}t + C_1 . \qquad (3.67)$$

Постоянную интегрирования C_1 определим из начальных условий. Из условия задачи известно, что при $t = 0$ скорость $\upsilon_{ox} = 2\pi$ *м/сек*. Подставляя в уравнение (3.67) эти значения скорости и времени, получим:

$$\upsilon_x = 2\pi \cos 0^o + C_1 , \qquad (3.68)$$

следовательно, $C_1 = 0$. Таким образом, закон изменения скорости ползуна будет

$$\upsilon_x = 2\pi \cos\frac{\pi}{2}t. \qquad (3.69)$$

Интегрируя уравнение (3.66), получим закон движения ползуна:

$$x = 4\pi \sin\frac{\pi}{2}t \ \text{м}. \qquad (3.70)$$

Задавшись различными значениями времени и вычислив соответствующие им значения x, υ_x и a_x, по приведенным выше формулам, построим кривые расстояний, скоростей и ускорений. Кривая расстояний представляет собой синусоиду, кривая скоростей – косинусоиду, а кривая ускорений – синусоиду, сдвинутую по фазе на величину π по отношению к синусоиде расстояний, и строится график зависимости x, υ_x и a_x от времени (см. рисунок 3.8).

Задача № 11

Палец кривошипа паровой машины в период пуска движется согласно уравнениям x = 25cos4t^2, y = 25sin4t^2 (x, y – в см, t – в сек). Найти скорость, касательное и нормальное ускорение пальца.

Кривая ускорений дана в координатах *a*, *l*.

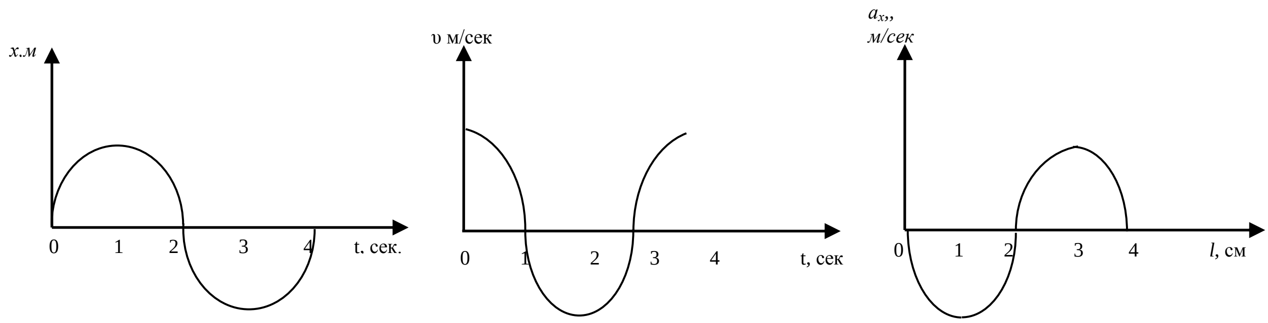


Рисунок 3.8

Дано:
$x = 25\cos 4t^2$, $y = 25\sin 4t^2$.

Найти: υ –? α_n –? α_τ –?

Решение.
Закон движения пальца кривошипа задан уравнениями в координатной форме:

$$x = 25\cos 4t^2 , \qquad (3.71)$$

$$y = 25\sin 4t^2 \;. \tag{3.72}$$

Поэтому величину скорости пальца кривошипа υ найдем, вычислив первые производные от координатных уравнений x и y по времени, т. е. определим проекции скорости υ_x и υ_y на оси координат. Проекции скорости υ_x и υ_y позволяют определить модуль скорости пальца кривошипа по формуле (3.73).

$$\begin{aligned} \upsilon_x &= \frac{dx}{dt} = -25\cdot 8t\sin 4t^2 = -200t\sin 4t^2, \\ \upsilon_y &= \frac{dy}{dt} = 25\cdot 8t\cos 4t^2 = 200\cos 4t^2, \\ \upsilon &= \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2} \end{aligned} \tag{3.73}$$

или

$$\upsilon = \sqrt{\left(-200t\sin 4t^2\right)^2 + \left(200t\cos 4t^2\right)^2} = 200t \quad см/сек. \tag{3.74}$$

Касательное ускорение пальца кривошипа найдем по формуле:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}. \tag{3.75}$$

Подставив значение υ определим значение тангенциального ускорения

$$a_\tau = \frac{d}{dt}(200t) = 200 \quad см/сек^2, \tag{3.76}$$

а нормальное ускорение определим по известной формуле:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}. \tag{3.77}$$

Как видно из формулы нормального ускорения, для определения полного ускорения (модуля ускорения), кроме скорости необходимо знать радиус кривизны ρ траектории. Радиус кривизны найдем из уравнения траектории движения по заданным уравнениям движения (3.71) и (3.72), исключив из этих уравнений время, получим уравнение траектории:

$$x^2 + y^2 = 25^2. \tag{3.78}$$

Из (3.78) следует, что палец кривошипа движется по окружности радиуса $r = 25$ *см*.

Так как радиус кривизны ρ в этом случае равен r и постоянен, то величина нормального ускорения определится соотношением:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r} = \frac{\left(200t\right)^2}{25} = 1600t^2 \quad см/сек^2 \;, \tag{3.79}$$

$$\alpha = \{\, \alpha_n{}^2 + \alpha_\tau{}^2 \}^{½} \;. \tag{3.80}$$

Подставив (3.76) и (3.79) в формулу (3.80) найдём значение полного ускорения.

Глава 4

ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательным движением твердого тела называется такое механическое движение системы точек (абсолютно твёрдого тела), при котором любой прямой отрезок, связывающий две любые точки этого тела, форма и размеры которого во время движения не меняются, остается паралельным своему положению в любой предыдущий момент времени.

При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые параллельно расположенные траектории и в каждый данный момент времени имеют равные по величине и направлению скорости и ускорения.

Траектории всех точек твёрдого тела являются, в общем случае, пространственными кривыми. В случае, когда поступательное движение тела происходит так, что все его точки перемещаются параллельно некоторой плоскости, то траектории его точек представляют собой плоские кривые, расположенные в параллельных плоскостях.

Примеры поступательного движения: движение педалей велосипеда относительно его рамы, движение поршней в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания относительно цилиндров и т. п.

При изучении поступательного движения твердого тела достаточно рассмотреть движение какой-либо одной его точки (например, точки – центра масс твёрдого тела), использовав физико-математические методы, изложенные ранее в разделах, рассматривающих кинематику точки. Математически поступательное движение по своему конечному результату эквивалентно параллельному переносу. Однако рассматриваемое как физический процесс поступательное движение представляет собой в трёхмерном пространстве вариант винтового движения.

4.2. Вращательное движение тела вокруг неподвижной оси

Вращательное движение твёрдого тела является одним из видов механического движения.

Движение твердого тела называется вращательным, если любые две точки, принадлежащие твёрдому телу и проведенная прямая через эти точки, остаются неподвижными в процессе вращательного движения.

При вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси все его точки перемещаются в паралелльных плоскостях, перпендикулярных к оси, и описывают окружности, радиусы которых равны расстояниям этих точек до оси вращения. Центры всех окружностей лежат при этом на одной прямой, перпендикулярной к плоскостям окружностей и называемой осью вращения. Ось вращения может располагаться внутри тела и за его пределами.

Положение какой-либо точки вращающегося тела, ее скорость и ускорение в любой момент времени можно определить, зная расстояние точки от оси вращения и закон изменения угла поворота тела φ в функциональной зависимости от времени t.

Угол поворота φ представляет собой угол между двумя полуплоскостями, проходящими через неподвижную ось вращения тела. Одна из этих плоскостей принимается за неподвижную, а другая вращается вместе с телом.

Все точки тела за один и тот же промежуток времени поворачиваются вокруг неподвижной оси на одинаковый угол, поэтому закон изменения угла поворота тела φ

в зависимости от времени t называется законом движения тела, и в неявном виде этот закон запишется в виде функциональной зависимости:

$$\varphi = f(t) \ . \tag{4.1}$$

Следует отметить, что вращательное движение твердого тела наряду с неподвижной осью вращения в данной системе отсчёта может быть и подвижной, но в рамках данного пособия такое вращательное движение не рассматривается.

4.3. Вращательное движение колес с зубчатым сцеплением

Рассмотрим вращательное движение на примере задачи, которая связана с преобразованием вращательного движения одного тела во вращательное движение другого. В частности, рассмотрим вращательное движение при зубчатом сцеплении двух валов (цилиндров).

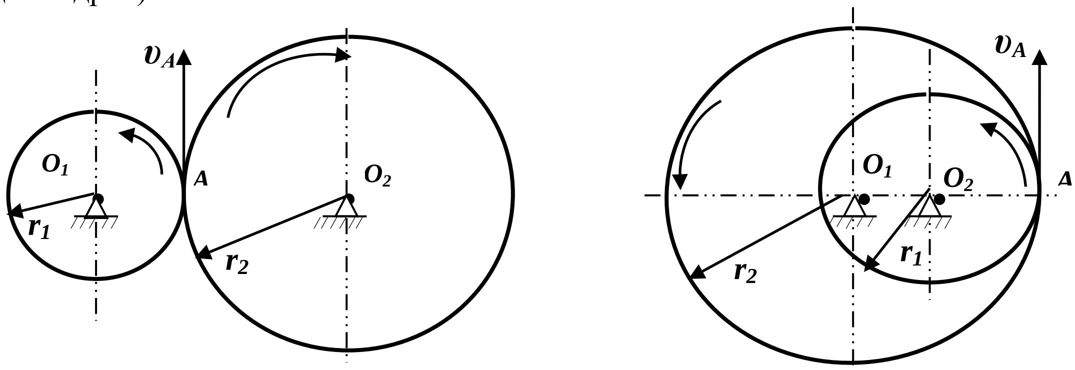


Рисунок 4.1

Пусть в зацеплении находятся два зубчатых колеса (рисунок 4.1, *а*) с радиусами начальных окружностей r_1 и r_2. Первое колесо O_1 – ведущее, а второе O_2 – ведомое (т. е. следуемое колесо под действием первого колеса).

Если скорость точки касания зубцов одинакова для обоих колес по величине и направлению, то запишем:

$$\upsilon_{1\text{A}} = \upsilon_{2\text{A}} \ . \tag{4.2}$$

Из равенства (4.2) можно получить соотношения, которые показывают связь между угловыми скоростями ω_1 и ω_2 вращающихся колес и их радиусами, а именно:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \ . \tag{4.3}$$

Или это можно переписать в виде:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \ . \tag{4.4}$$

Из соотношения (4.4) следует, что отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого равно обратному отношению их радиусов.

Как видно на рисунке 4.1, *а* при внешнем зацеплении ведомое колесо вращается в сторону, противоположную вращению ведущего. При внутреннем зацеплении (рисунок 4.1, б) оба колеса будут вращаться в одном направлении.

Введём следующие обозначения для движения тел с зубчатым сцеплением. Пусть число зубцов первого колеса равно Z_1, а второго колеса – Z_2, и число оборотов колес соответственно n_1 и n_2.

Очевидно, что отношение угловых скоростей первого колеса ко второму можно выразить через обратное отношение числа зубцов колес z_2 и z_1, либо через обратное отношение числа оборотов n_2 и n_1 в виде следующих соотношений:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} \;, \tag{4.5}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_2}{n_1} \;. \tag{4.6}$$

Отношение угловой скорости ω_1 ведомого колеса к угловой скорости ω_2 ведущего колеса называется передаточным числом, и обозначается буквой i_{12}

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = i_{1.2} \;. \tag{4.7}$$

Передаточное число i_{12} может принимать как положительное, так и отрицательное значение. При внутреннем зацеплении пары зубчатых колес передаточное число – отрицательно, а при внешнем зацеплении – положительно.

На основании формул (4.4), (4.5) и (4.6) передаточное число может быть однозначно определено этими формулами, т. е.:

$$i_{1.2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{n_2}{n_1} \;. \tag{4.8}$$

Если в зацеплении принимают участие несколько пар зубчатых колес (например, m-пар), соединенных последовательно или параллельно, то общее передаточное число i_{1n} равно произведению передаточных чисел всех пар зубчатых колес, т. е.:

$$i_{1n} = i_{1.2} \cdot i_{2.3} \cdot i_{3.4} \ldots i(-1)^n \;. \tag{4.9}$$

Формулу (4.9) можно переписать с учётом (4.7) в виде:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_m}(-1)^m, \tag{4.10}$$

где m – число пар с внешним зацеплением.

С учетом (4.8) общее передаточное число может быть выражено и через отношение числа зубцов, числа оборотов или радиусов колес.

Так, в случае последовательного соединения зубчатых колес, передаточное число определится соотношением:

$$i_{1n} = \frac{r_n}{r_1}(-1)^m = \frac{z_n}{z_1}(-1)^m \,. \tag{4.11}$$

При параллельном соединении зубчатых колес необходимо учитывать число зубцов Z_1, $Z_{1,}$, ...Z_n или радиусы r_1 , r_2 ,... r_n всех пар колес, находящихся в зацеплении, с учетом этих параметров передаточное число соответственно будут определяться выражениями:

$$i_{1n} = \left(\frac{z_2}{z_1'} \cdot \frac{z_3}{z_2'} \cdot \frac{z_4}{z_3'} \ldots \frac{z_n}{z_{n-1}'} \right)(-1)^m \tag{4.12}$$

$$i_{1n} = \left(\frac{r_2}{r_1'} \cdot \frac{r_3}{r_2'} \cdot \frac{r_4}{r_3'} \ldots \frac{r_n}{r_{n-1}'} \right)(-1)^m \;, \tag{4.13}$$

где r_2 и $r_2^/$ – радиусы шестерен, сидящих на одном валу, и z_2 и $z_2^/$ – число их зубьев.

4.4. Вращательное движение при ременной передаче

В случае ременной передачи (см. рисунок 4.2, *а, б*) передаточное число i_{12} равно отношению угловой скорости ведущего шкива к угловой скорости ведомого. Аналогично, как и при зубчатом сцеплении колес, передаточное число для ременной передачи определится соотношением (4.14). Это отношение прямо пропорционально отношению чисел оборотов и обратно пропорционально отношению радиусов колес.

$$i_{1.2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{n_1}{n_2} \ . \tag{4.14}$$

На рисунке 4.2, *а, б* приведены две схемы ременной передачи между двумя шкивами.

Если ремни передачи между двумя шкивами не скрещиваются, как показано на рисунке 4.2, *а*, то угловые скорости ведомого и ведущего шкива имеют одинаковое направление и, следовательно, передаточное число i_{12} положительно. Если ремни передачи между двумя шкивами скрещиваются, как показано на рисунке 4.2, *б*, то угловые скорости шкивов будут иметь противоположные направления и передаточное число i_{12} будет отрицательно.

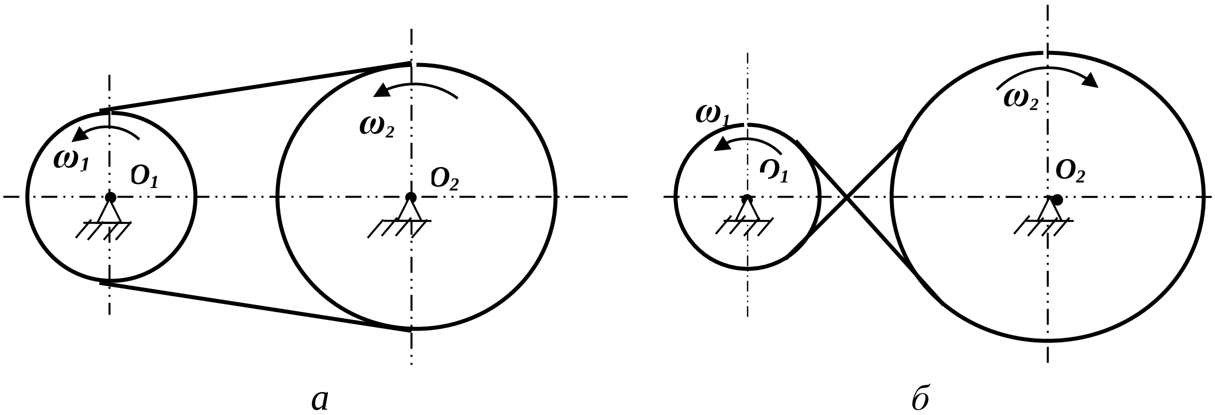


Рисунок 4.2

С методами решения задач о преобразовании вращательного (или поступательного) движения одного тела в поступательное движение (или вращательное) другого тела проще всего ознакомиться, рассмотрев ряд практических задач.

4.5. Примеры решения задач

Задача № 1

Диск паровой турбины в период пуска вращается по закону $\varphi = \pi t^{2,5}$ радиан. Определить угловую скорость и угловое ускорение диска через 4 сек после пуска турбины, а также скорость и ускорение точки диска, отстоящей на расстоянии r = 0,5 *м* от оси вращения.

Дано:

$\varphi = \pi t^{2,5}$,

t = 4 *с*,

r = 0,5 *м*.

Найти:
ω –? ε –? υ –? a_τ –? a_n –? a –?

Решение.
По условию задачи диск паровой машины вращается по закону:

$$\phi = \pi t^{2,5}. \tag{4.15}$$

Для определения закона изменения угловой скорости ***ω,*** которая по определению определяется по формуле (4.16):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{4.16}$$

Подставим (4.15) в (4.16) и возьмём производную, тогда получим:

$$\omega = 2,5\pi t^{1,5} \ 1/сек. \tag{4.17}$$

Закон изменения углового ускорения получим, взяв производную от угловой скорости ε по времени t, отсюда следует:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 3,5\pi t^{0,5} \ 1/сек^2. \tag{4.18}$$

Подставив численные значения определим значения угловой скорости диска в момент времени t = 4 сек:

$$\omega = 2,5\pi 4^{1,5} = 20\pi \ 1/сек. \tag{4.19}$$

Угловое ускорение диска в этот же момент равно:

$$\varepsilon = 3,75\pi 4^{0,5} = 7,5\pi \ 1/сек^2.$$

Скорость точки диска, отстоящей на расстоянии r = 0,5 *м* от оси вращения, вычислится по формуле:

$$\upsilon = \omega r = 20\pi \cdot 0,5 = 10\pi \ \ м/сек. \tag{4.20}$$

Касательное ускорение точки в этот же момент времени определится как

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r = 7,5\pi \cdot 0,5 = 3,75\pi \ \ м/сек^2. \tag{4.21}$$

Нормальное ускорение ее составит:

$$a_n = \omega^2 \cdot r = (20\pi)^2 0,5 = 200\pi^2 \ м/сек^2 \ , \tag{4.22}$$

а полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(3,75)^2 + \left(200\pi^2\right)^2} = 1973 \ \ м/сек^2. \tag{4.23}$$

Задача №2
Определить угловую скорость и угловое ускорение вала, вращающегося в неподвижных подшипниках, если угол поворота изменяется по следующему закону: $\varphi = 2 + 30t + \frac{5t^2}{2}$ рад.

Дано:

$$\phi = 2 + 30t + \frac{5t^2}{2}. \tag{4.24}$$

Найти: $\omega - ?$ $\varepsilon - ?$

Решение.

Угловая скорость по определению вала $\boldsymbol{\omega}$ есть первая производная от φ по времени (4.25). Продифференцировав закон изменения угла поворота (4.24) по времени, определим угловую скорость:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = 30 + 5t,\ 1/сек. \qquad (4.25)$$

Угловое ускорение вала есть первая производная от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 5,\ 1/сек^2.$$

Следовательно, вал вращается равноускоренно, т. е. с положительным постоянным ускорением, равным: $\varepsilon = 5,\ 1/сек^2$.

Задача № 3

Маховое колесо начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно; через 10 мин после начала движения оно имеет угловую скорость, соответствующую 120 об/мин. Составить закон вращательного движения и определить, сколько оборотов маховое колесо сделает за 10 мин.

Дано:

$\omega_o = 0$,
$\varepsilon > 0 = const$,
$n = 120$ *об/мин*,
$t = 10$ *мин*.

Найти:

$\varphi(t) - ?$ $n_{/t=10мин/} - ?$

Решение.

По условию задачи маховое колесо вращается равноускоренно, а это означает, что угловое ускорение ε вращающегося колеса положительно и остается постоянным с течением времени $\varepsilon > 0 = const$.

Закон изменения угла вращения махового колеса $\varphi(t)$ в зависимости от времени определим, используя формулу углового ускорения:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon\ . \qquad (4.26)$$

Формулу (4.26) проинтегрируем дважды, тогда соответственно получим два выражения (4.27) и (4.28):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon t + C_1\ , \qquad (4.26)$$

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + C_1 t + C_2\ . \qquad (4.27)$$

Используя известные в задаче начальные условия определим значения произвольных постоянных интегрирования C_1 и C_2.

Поскольку в момент времени $t = 0$ угловая скорость $\omega_0 = 0$, и угол поворота также равен нулю $\varphi_0 = 0$, то из уравнений (4.27) и (4.28) следует, что константы $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Следовательно, можно записать:

$$\omega = \varepsilon t \ , \tag{4.29}$$

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} \ . \tag{4.30}$$

В уравнениях (4.29) и (4.30) неизвестна величина углового ускорения, но из условия задачи нам известно, что через 10 мин угловая скорость махового колеса соответствует $n = 120$ об/мин. Следовательно,

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi 120}{30} = 4\pi, \ сек^{-1} \tag{4.31}$$

Тогда из уравнения (4.29) определим угловое ускорение ε. Так как в течение времени $t = 10$ мин угловая скорость равна $\omega = 4\pi, \ сек^{-1}$, то угловое ускорение определится выражением:

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{4\pi}{600} = \frac{\pi}{150} \ \ сек^{-2}. \tag{4.32}$$

Полный угол поворота колеса в радианах за 10 мин определим из соотношения (4.29):

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\pi}{150} \ \frac{(10 \cdot 60)^2}{2} = 1200\pi \ \text{рад.} \tag{4.33}$$

Итак, число оборотов колеса определим из соотношения:

$$n_1 = \frac{1200\pi}{2\pi} = 600 \ \text{оборотов.} \tag{4.34}$$

Задача № 4

С момента выключения мотора пропеллер самолета, вращавшийся с угловой скоростью $n = 1200$ об/мин, сделал до остановки 80 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения мотора до его остановки, если считать вращение пропеллера равнозамедленным.

Дано:
$n = 1200$ об./мин,
n = 80 об/мин,
$\varepsilon<0 = const.$

Найти:
$t_1 -?$

Решение.

Движение пропеллера равнозамедленное, следовательно, угловое ускорение отрицательно и постоянно по величине. С учётом этого можно записать уравнение:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\varepsilon \ . \tag{4.35}$$

Проинтегрировав (4.35), получим:

$$\frac{d\varphi}{d\,t} = -\varepsilon\,t + C_1\ , \qquad (4.36)$$

где

$$\frac{d\varphi}{d\,t} = \omega. \qquad (4.37)$$

По условию задачи в начальный момент $t = 0$ угловая скорость ω соответствовала n = 1200 об/мин, следовательно,

$$\omega = \frac{\pi\, n}{30} = \frac{\pi \cdot 1200}{30} = 40\pi,\ сек^{-1}\ . \qquad (4.38)$$

Подставив (4.38), т. е. начальное значение ω в уравнение (4.36), определим постоянную интегрирования C_1:

$$40\pi = C_1\ . \qquad (4.39)$$

С учётом последнего, закон изменения угловой скорости выразится соотношением:

$$\omega = 40\pi - \varepsilon\, t\ . \qquad (4.40)$$

Закон вращательного движения пропеллера мотора самолёта определим путем интегрирования уравнения (4.37). В результате интегрирования получим:

$$\phi = 40\pi\, t - \frac{\varepsilon\, t^2}{2} + C_2. \qquad (4.41)$$

В начальный момент времени $t = 0$ угол поворота равен $\varphi_0 = 0$, следовательно, из уравнения (4.41) следует, что $C_2 = 0$. Следовательно, закон вращательного движения (4.41) примет вид:

$$\phi = 40\pi\, t - \frac{\varepsilon\, t^2}{2}. \qquad (4.42)$$

Для определения величины углового ускорения ε и времени от выключения мотора до остановки вращения пропеллера t_1 используем конечные условия движения, заданные в задаче.

В момент остановки пропеллера его угловая скорость равна $\omega_1 = 0$, а угол поворота за этот промежуток времени будет равен:

$$\varphi_1 = 80 \cdot 2\pi = 160\pi\ \text{рад.} \qquad (4.43)$$

Подставив в уравнение (4.40) конечные условия для ω, получим:

$$0 = 40\pi - \varepsilon\, t_1\ . \qquad (4.44)$$

Отсюда

$$\varepsilon\, t_1 = 40\,\pi\ . \qquad (4.45)$$

Итак, подставив из уравнения (4.45) значение $\varepsilon\, t_1$ в уравнение (4.42), получим:

$$160\pi = 40\pi\, t_1 - \frac{\varepsilon\, t_1}{2}\ . \qquad (4.46)$$

Решив последнее уравнение (4.46) относительно t_1, получим:

$$t_1 = \frac{160\pi}{20\pi} = 8\,сек.$$

Угловое ускорение при замедлении пропеллера получим из уравнения (4.45):

$$\varepsilon \cdot 8 = 40\pi.$$

Откуда

$$\varepsilon = \frac{40\pi}{8} = 5\pi \cdot 1/сек^2. \tag{4.47}$$

Задача № 5

Маховое колесо радиуса $r = 2$ *м* вращается равноускорено из состояния покоя, т. е. при *t* = 0, $\omega_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$. Через *t* = 10 сек точки, находящиеся на ободе колеса, приобретают скорость $\upsilon = 100 м/сек$. Найти угловую скорость, нормальное и касательное ускорения точек обода колеса в момент времени *t* = 15 сек.

Дано:
r = 2 м,
$t_o = 0$,
$\omega_0 = 0$,
$\varphi_0 = 0$,
$t_1 = 10$ *с.*
υ . = 100 *м/с,*
$t_2 = 15$ *с.*

Найти: ω –? ε –?
Решение.

При равноускоренном вращении колеса его угловое ускорение положительно и постоянно.

Угловая скорость при равноускоренном вращении тела определяется по формуле:

$$\omega = \omega_0\, t + \varepsilon t. \tag{4.48}$$

Согласно условию задачи, в начальный момент времени колесо находится в покое, следовательно, начальная угловая скорость равна нулю, т. е.:

$$\omega_0 = 0. \tag{4.49}$$

С учетом (4.49) формула (4.48) примет вид:

$$\omega = \varepsilon t. \tag{4.50}$$

Используя известную в курсе физики (Баринова М.Ф., Голубева О.В. Задачи и упражнения по классической механике. М.: Высшая шк., 1980) формулу (4.51) между линейной υ и угловой ω скоростями, определим угловую скорость колеса ω по истечению 10 сек после начала вращения по (4.52):

$$\upsilon = \omega r, \tag{4.51}$$

$$\omega = \frac{\upsilon}{r} = \frac{100}{2} = 50,\ сек^{-1}. \tag{4.52}$$

Из уравнения (4.50) определим угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{50}{10} = 50,\ сек^{-2}. \tag{4.53}$$

Таким образом, можно записать закон изменения угловой скорости в зависимости от времени:

$$\omega = 5t \cdot 1/\,сек. \tag{4.54}$$

Из равенства (4.54) определим угловую скорость в момент времени t = 15 сек.

$$\omega = 5 \cdot 15 = 75,\ сек^{-1}. \tag{4.55}$$

Тангенцальное и нормальное ускорения точек обода колеса в момент t = 15 сек определим соответственно по формулам (4.56) и (4.57). Тангенциальное ускорение точек обода определится по формуле:

$$\omega_\tau = \varepsilon \cdot r = 5 \cdot 2 = 10\ \ м/\,сек \tag{4.56}$$

Нормальное ускорение:

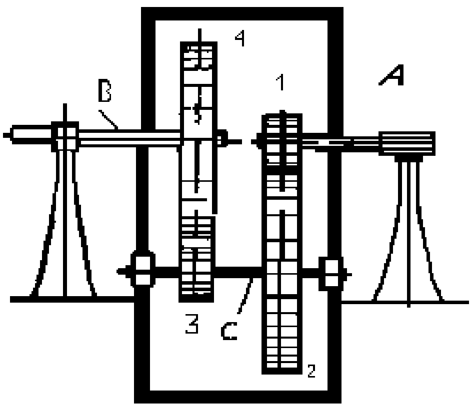
$$\omega_n = \omega^2 \cdot r = 75^2 \cdot 2 = 11250\ \ м/\,с. \tag{4.57}$$

Задача № 6

Ведущий вал редуктора А (см. рисунок 4.3) делает 1400 об/мин. Определить число оборотов ведомого вала B и общее передаточное число $i_{3,1}$ редуктора, если известно число зубцов цилиндрических шестерен редуктора: $z_1 = 10;\ \ z_2 = 60;\ \ z_3 = 12;\ \ z_4 = 70.$

Дано:

n_1 = 1400 об/мин,



$z_1 = 10;\ \ z_2 = 60;\ \ z_3 = 12;\ \ z_4 = 70.$

Рисунок 4.3

Найти:

n_2 –? $i_{3,1}$ –?

Решение.

Определим число оборотов промежуточного вала C (см. рисунок 4.3). Отношение чисел оборотов шестерен обратно-пропорционально отношению чисел зубцов:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{z_1}{z_2}\ . \tag{4.58}$$

Из (4.58) выразим n_2 и определим его значение:

$$n_2 = n_1 \frac{z_1}{z_2} = 1400 \cdot \frac{10}{60} = \frac{700}{3}\,об/\,мин. \tag{4.59}$$

Зная число оборотов n_2, определим число оборотов n_3 ведомого вала *B* (см. рисунок 4.3) к из следующего пропорционального соотношения:

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{z_3}{z_4}. \qquad (4.60)$$

Из равенства (4.60) определим значение числа оборотов n_3, получим:

$$n_3 = n_2 \frac{z_3}{z_4}. \qquad (4.61)$$

Найденное значение числа оборотов n_2 из уравнения (4.59) подставим в уравнение (4.61) и определим значение величины n_3:

$$n_3 = 1400 \cdot \frac{10}{60} = \frac{12}{70} 40, \ \textit{об / мин.} \qquad (4.62)$$

Передаточное число редуктора можно определить из соотношения (4.63) или (4.64):

$$i_{3,1} = \frac{n_3}{n_1} = \frac{40}{1400} = \frac{1}{35}, \qquad (4.63)$$

$$i_{3,1} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} (-1)^m = \frac{10 \cdot 12}{60 \cdot 70} (-1)^2 = \frac{1}{35}, \qquad (4.64)$$

где m = 2 – число пар с внешним зацеплением.

Задача № 7

Два эллиптических зубчатых колеса находятся в зацеплении. Расстояние между осями вращения равно O_1O_2 = 2 *a*. Первое зубчатое колесо вращается с постоянной угловой скоростью ω_1. Вывести законы изменения угловой скорости и углового ускорения второго колеса. Определить наибольшее и наименьшее значения угловой скорости второго колеса, если первое делает n_1 = 240 об/мин; расстояние O_1O_2 = 2 *a* = 50 *см* и полуоси эллипсов равны: *a* = 25 *см* и *b* = 20 *см.*

Дано:
O_1O_2 = 2 *a* = 50 *см*,
ω_1 = const = 240 об/мин,
a = 25 см и *b* = 20 см.

Найти: $\omega(t)$ –? ω –?, $\omega_{min} - \omega_{max}$ –?

Решение.

Линейная скорость точки касания обеих колес одинакова $(\upsilon_1 = \upsilon_2)$ и может быть определена из ниже приведенных соотношений:

$$\text{а) } \upsilon_1 = \omega_1 \cdot O_1M, \quad \text{б) } \upsilon_2 = \omega_2 \cdot O_2M. \qquad (4.65)$$

Приравняв обе формулы (а) и (б) в выражении (4.65) определим угловую скорость второго колеса *B* (см. рисунок 4.4):

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{O_1M}{O_2M}. \qquad (4.66)$$

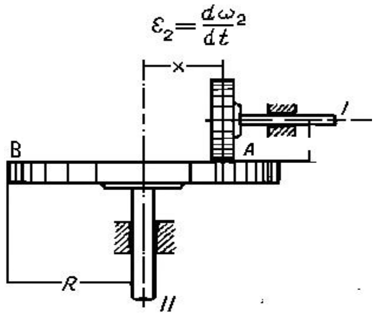


Рисунок 4.4

Обозначив величины $O_1M = r_1$ и $O_2M = r_2$, с учётом этих обозначений r_1 и r_2 соотношение (4.64) перепишем как:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} \ . \tag{4.67}$$

Для определения расстояний r_1 и r_2 воспользуемся известным свойством эллипса, что сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов равна постоянной величине $2a$, где a – большая полуось эллипса, т. е.

$$r_1 + r_2 = 2a \ . \tag{4.68}$$

С другой стороны, расстояние между фокусами эллипса определится выражением:

$$O_1O_1^/ = c = 2\sqrt{a^2 - b^2} \tag{4.69}$$

Рассмотрим треугольник $O_1MO_1^/$. На рисунке 4.4 видно, что величина r_2 может быть выражена через величины r_1, c и $\varphi_1 = \omega t$.

В рассматриваемом треугольнике сторона $O_1^/M = r_2$, отсюда можно записать выражение:

$$r_2^2 = r_1^2 + 4c^2 - 4cr_1 \cos\varphi_1. \tag{4.70}$$

Из уравнения (4.68) следует, что

$$r_2 = 2a - r_1. \tag{4.71}$$

Подставив формулу (4.71) в уравнение (4.70), получим:

$$(2a - r_1)^2 = r_1^2 + 4c^2 - 4cr_1 \cos\varphi_1. \tag{4.72}$$

Из уравнения (4.71) определим r_1 :

$$r_1 = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\varphi_1}. \tag{4.73}$$

Таким образом, определив значение r_1, можно найти r_2:

$$r_2 = \frac{a^2 - 2ac\cos\varphi_1 + c^2}{a - c\cos\varphi_1}. \tag{4.74}$$

Подставив значения r_1 и r_2 в равенство (4.67), окончательно получим выражение для определения угловой скорости второго колеса:

$$\omega_2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac\cos\phi_1 + c^2} \cdot \omega_1. \tag{4.75}$$

Из формулы (4.75) видно, что наибольшее значение угловой скорости $\omega_{2\max}$ возможно тогда, когда численное значение знаменателя в этой формуле будет принимать минимальное значение, а это возможно, когда $cos\varphi_1 = 1$, т. е. при угле $\varphi_1 = 0^0$, следовательно, выражение (4.75) перепишем, и приведем к следующему виду:

$$\omega_{2\max} = \frac{\left(a^2 - c^2\right)\omega_1}{a^2 - 2ac + c^2} = \frac{a+c}{a-c}\omega_1. \tag{4.76}$$

Соответственно, наименьшее значение угловой скорости $\omega_{2\min}$ будет при угле поворота $\phi_1 = 180^0$:

$$\omega_{2\min} = \frac{\left(a^2 - c^2\right)\omega_1}{a^2 + 2ac + c^2} = \frac{a-c}{a+c}\omega_1\cdot\ . \tag{4.77}$$

Итак, подставив числовые значения в (4.75), (4.76), (4.77), определим искомые величины:

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = 8\pi,\ сек^{-1};\ \ 2a = 50см;\ \ a = 25см;\ \ c = 15см;$$

$$\omega_{2\max} = 4\omega_1 = 32\pi,\ сек^{-1}.\qquad \omega_{2\min} = \frac{\omega_1}{4} = 2\pi,\ \ сек^{-1}.$$

Угловое ускорение второго колеса ε_2 определим, взяв производную от угловой скорости ω_2 (4.77) по времени:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{2ac\left(a^2 - c^2\right)\sin\phi}{\left(a^2 - 2ac\cos\phi_1 + c^2\right)}\omega_1\ ,\ сек^{-2}\ . \tag{4.78}$$

Задача № 8

Ведущий вал *I* фрикционной передачи, вращаясь, совершает $n_1 = 360$ об/мин, причём на ходу передвигается так, что расстояние плоскости диска от оси вращения ведомого вала *II* изменяется по закону $x = 8–0,2\ t$ *см.* Определить угловую скорость и угловое ускорение ведомого вала в функциональной зависимости от расстояния *x,* а также скорость и ускорение точки *B* на ободе ведомого диска в момент, когда *x* равно радиусу ведущего диска. Радиус ведомого диска $R = 17$ *см*; ведущего $r = 5$ *см.*

Дано:
$n_1 = 360$ об/мин,
$x = 8–0,2\ t$, *см,*
R = 17 см,
r = 5 см.

Найти:
$\omega_{2\,(x=R)}$ –? $\varepsilon_{2(x=R)}$ –? t –?

Решение.
Угловую скорость ведущего вала *I* определим по формуле:

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{\pi 360}{30} = 12\pi\cdot 1/\,сек\ . \tag{4.79}$$

Пусть окружная скорость точки касания A ведущего и ведомого дисков одинакова, тогда скольжение в направлении окружной скорости будет отсутствовать и будет справедливо равенство:

$$\omega_2 x = \omega_1 r \quad . \tag{4.80}$$

Из равенства (4.80) определим угловую скорость ω_2 ведомого диска по выражению (4.81):

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r}{x}. \tag{4.81}$$

Подставив в уравнение (4.81) выражение для x из условия задачи, а также значения ω_1, получим:

$$\omega_2 = \frac{60\pi}{8-0,2t}, \ сек^{-1}. \tag{4.82}$$

Угловое ускорение ведомого вала и диска получим, взяв первую производную от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{60\pi \cdot 0,2}{5(8-0,2t)^2} = \frac{12\pi}{(8-0,2t)^2}, \quad сек^{-2} \tag{4.83}$$

или последнее перепишем в виде:

$$\varepsilon_2 = \frac{12\pi}{x^2}, \quad сек^{-2}. \tag{4.84}$$

Из закона вращения ведомого вала $x = 8 - 0,2t$ определим время t, когда расстояние x ведущего диска будет равно радиусу $r(x = r = 5 \ см)$, т. е. запишем:

$$5 = 8 - 0,2t. \tag{4.85}$$

Из выражения (4.85) определим это время, оно будет равно:

$$t = 6 сек.$$

В этот момент времени угловая скорость равна:

$$\omega_2 = \frac{60\pi}{8-0,2t} = \frac{60\pi}{8-0,2\cdot 6} = \frac{150\pi}{17}, \ сек^{-1}. \tag{4.86}$$

Угловое ускорение определим из уравнения (4.80):

$$\varepsilon_2 = \frac{12\pi}{(8-0,2t)^2} = \frac{12\pi}{6,8^2} = \frac{75\pi}{17^2}, \ сек^{-2}. \tag{4.87}$$

Полное ускорение точки B ведомого диска определится по формуле:

$$a_B = R\sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega_2^4} = 17\sqrt{\left(\frac{75\pi}{17^2}\right)^2 + \left(\frac{150\pi}{17}\right)^4} \frac{75\pi}{17}\sqrt{1+90000\pi^2} см/сек^2. \tag{4.88}$$

Глава 5

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

5.1. Абсолютное, относительное и переносное движения

Скорость и ускорение точки

Механическое движение точки в пространстве по-разному фиксируется в системах координат, связанных с телами, которые движутся. Одно и то же механическое движение может иметь различное аналитическое выражение закона движения в зависимости от выбранной системы координат.

Главной задачей кинематики относительных движений точки является определение связи между кинематическими величинами, характеризующими одно и то же механическое движение точки в двух различных системах координат, движущихся одна относительно другой. При этом предполагается, что кинематические характеристики движущихся систем координат известны.

В механике, при рассмотрении движения тела относительно нескольких систем отсчёта возникает понятие сложного движения, когда материальная точка движется относительно какой-либо системы отсчёта, а та, в свою очередь, движется относительно другой системы отсчёта. При этом возникает вопрос о связи движений точки в этих двух системах отсчета.

Обычно выбирают одну из систем отсчёта за базовую – «неподвижную», другую называют «подвижной» относительно первой. На рисунке 5.1 представлена система из двух взаимосвязанных декартовых систем отсчёта: первая – неподвижная (с осями координатами ОХ, ОУ,OZ с началом в тч. О) и вторая подвижная относительно первой (ОХ′, ОУ′, OZ′ с началом в тч. О′).

Абсолютное движение – это движение материальной точки (тела) в базовой, т. е. неподвижной системе отсчёта. В неподвижной системе отсчёта радиус-вектор точки (тела) обозначают как $\vec{r}(t)$, а скорость тела – $\vec{V}_r(t)$.

Относительное движение – это движение материальной точки (тела) относительно подвижной системы отсчёта. В подвижной системе отсчёта радиус-вектор тела – $\vec{r}'(t)$, скорость тела – $\vec{V}_{r'}(t)$.

Переносное движение – это движение подвижной системы отсчета и всех постоянно связанных с нею точек пространства относительно базовой системы отсчета, или другими словами, переносное движение материальной точки – это движение той точки подвижной системы отсчёта, в которой в данный момент времени находится эта материальная точка. Абсолютное движение точки можно рассматривать как сложное, состоящее из относительного и переносного движений.

Наряду с изложенными выше основными понятиями кинематики сложного движения точки имеются соответственно и другие сопутствующие понятия такие как: абсолютные, относительные и переносные траектории точки, абсолютные, относительные и переносные скорости и ускорения точки.

Радиус-вектор начала системы координат подвижной системы отсчёта – $\vec{R}(t)$, его скорость – $\vec{V}_R(t)$, угловая скорость вращения подвижной системы отсчета относительно неподвижной – $\vec{\omega}_R(t)$. Отметим, что если эта угловая скорость равна нулю ($\vec{\omega}_R(t) = 0$), то говорят о поступательном движении подвижной системы отсчёта. Если угловая скорость отлична от нуля, то говорят о вращательном движении подвижной системы.

Переносная скорость $\vec{V}_e(t)$ – это скорость в неподвижной системе отсчёта произвольной точки, зафиксированной относительно подвижной системы отсчёта, обусловленная движением этой подвижной системы отсчёта относительно неподвижной. Например, это скорость той точки подвижной системы отсчёта, в которой в данный момент времени находится материальная точка В переносная скорость $\vec{V}_e(t)$ равна $\vec{V}_R(t) = \dfrac{d\vec{R}}{dt}$ только в тех случаях, когда подвижная система отчёта движется поступательно.

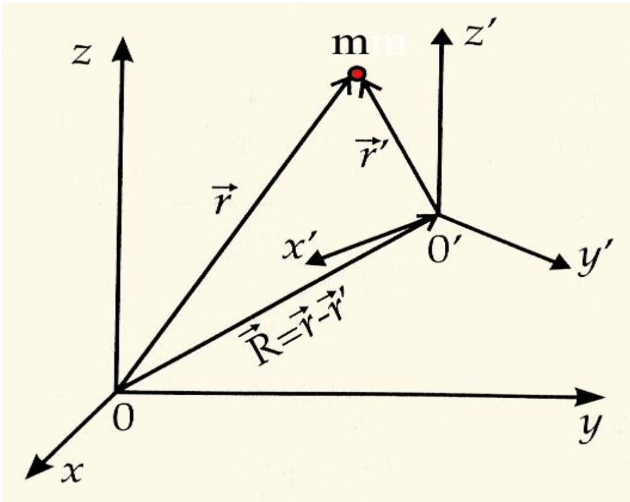


Рисунок 5.1

Если переносное и относительное движения точки являются прямолинейными, то абсолютное движение данной точки тоже будет прямолинейным. При этом это абсолютное движение будет определяться геометрической суммой переносного и относительного перемещений:

$$\bar{S}_a = \bar{S}_e + \bar{S}_r \ . \tag{5.1}$$

При криволинейном движении абсолютное перемещение точки принимается за бесконечно малый промежуток времени dt и равно геометрической сумме переносного и относительного перемещений:

$$d\bar{S}_a = d\bar{S}_e + d\bar{S}_r \ . \tag{5.2}$$

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной $\vec{\upsilon}_e$ и относительной $\vec{\upsilon}_r$ скорости:

$$\vec{\upsilon}_a = \vec{\upsilon}_e + \vec{\upsilon}_r \ . \tag{5.3}$$

При определении абсолютного ускорения точки (при сложном движении) следует различать два случая:

1) когда переносное движение поступательное;

2) когда переносное движение вращательное.

В первом случае абсолютное ускорение $\vec{a}_a$ точки равно геометрической сумме ускорений переносного $\vec{a}_e$ и относительного $\vec{a}_r$:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r \ . \tag{5.4}$$

Во втором случае абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех векторов ускорений: переносного $\vec{a}_e$, относительного $\vec{a}_r$ и добавочного (ускорение Кориолиса) $\vec{a}_K$:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_K \ . \tag{5.5}$$

Ускорение Кориолиса, или так называемое добавочное ускорение, определяется удвоенным векторным произведением переносного и относительного скоростей точки:

$$\vec{a}_K = 2\,\overline{\omega}_e \times \vec{\upsilon}_r \tag{5.6}$$

и, следовательно, его скалярная величина определится выражением:

$$a_K = 2\,\omega_e\,\upsilon_r \sin\left(\overline{\omega}_e \hat{,} \vec{\upsilon}_r\right) \ . \tag{5.7}$$

В формуле (5.7) величина под аргументом функции синуса есть угол между двумя векторами скоростей $\overline{\omega}_e$ и $\vec{\upsilon}_r$, где $\overline{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного вращательного движения; $\vec{\upsilon}_r$ – вектор относительной скорости точки.

Направление вектора добавочного ускорения $\vec{a}_K$ определяется из формулы векторного произведения (5.6). Для определения направления вектора ускорения Кориолиса применяют два правила Жуковского.

Первое правило: согласно этому правилу вектор ускорения Кориолиса $\vec{a}_K$ перпендикулярен векторам $\overline{\omega}_e$ и $\vec{\upsilon}_r$ (или плоскости, проходящей через эти вектора, проведенные из одной точки). Направлен вектор $\vec{a}_K$ так, что если смотреть ему навстречу, то кратчайший поворот вектора $\boldsymbol{\omega_e}$ до совмещения с вектором $\vec{\upsilon}_r$ происходит против хода часовой стрелки (см. рисунок 5.2).

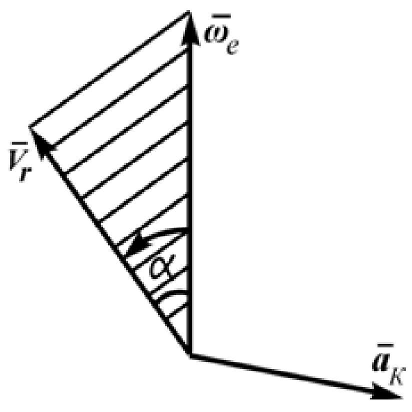


Рисунок 5.2

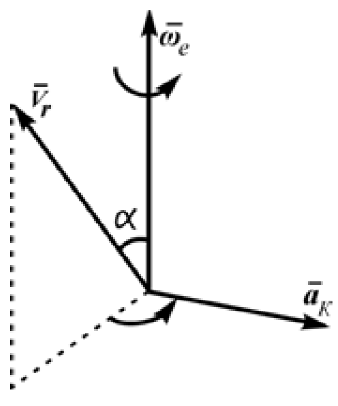


Рисунок 5.3

Второе правило, суть которого заключается в следующем: для того чтобы определить направление ускорения (добавочного) Кориолиса нужно спроецировать вектор относительной скорости в плоскость, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости, и полученную проекцию повернуть на 90 в сторону переносного вращения (см. рисунок 5.3).

Иногда в кинематике относительных движений точки практические задачи решаются в проекциях на оси координат. Так, для определения расстояний S_a, S_e, S_r пользуются алгебраическими равенствами в виде системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_a &= x_e + x_r \\ y_a &= y_e + y_r \\ z_a &= z_e + z_r \end{aligned}\right\}; \tag{5.8}$$

для определения скоростей – равенствами:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_{ax} &= \upsilon_{ex} + \upsilon_{rx} \\ \upsilon_{ay} &= \upsilon_{ey} + \upsilon_{ry} \\ \upsilon_{az} &= \upsilon_{ez} + \upsilon_{rz} \end{aligned}\right\}; \tag{5.9}$$

для определения ускорений – равенствами:

$$\left.\begin{aligned} a_{ax} &= a_{ex} + a_{rx} \\ a_{ay} &= a_{ey} + a_{ry} \\ a_{az} &= a_{ez} + a_{rz} \end{aligned}\right\}; \tag{5.10}$$

При наличии дополнительного (Кориолиса) ускорения пользуются равенствами:

$$\left.\begin{aligned} a_{ax} &= a_{ex} + a_{rx} + a_{Kx} \\ a_{ay} &= a_{ey} + a_{ry} + a_{Ky} \\ a_{az} &= a_{ez} + a_{rz} + a_{Kz} \end{aligned}\right\}. \tag{5.11}$$

5.2. Методические указания к решению задач

Как было указано в предыдущем параграфе, абсолютное движение точки можно рассматривать как сложное движение, состоящее из переносного и относительного движений. В задачах этого раздела требуется определить кинематические характеристики одного из этих видов движений по заданным кинематическим характеристикам других видов.

В кинематике сложного движения точки практические задачи можно подразделить на три основные группы. В частности, эти группы задач соответственно определяются тем, что все они направлены на определение:

1) закона движения и абсолютной скорости точки;

2) абсолютного ускорения точки, когда переносное движение является поступательным;

3) абсолютного ускорения точки, когда переносное движение вращательное.

Приступая к решению любой задачи, необходимо, прежде всего, установить вид движения точки (абсолютное, переносное или относительное). При этом следует условно выбрать положения неподвижной (базовой) и подвижной систем отсчёта. После этого в соответствии с условием задачи использовать приведенные зависимости между расстояниями, скоростями и ускорениями.

Используем эти методические рекомендации на примерах конкретных задач.

5.3. Примеры решения задач

Задача № 1

Например, мостовой электрический кран движется вдоль цеха, причём кран начинает движение из состояния покоя согласно уравнению $S_{KP} = 0{,}6t^2$. С другой стороны, по мосту крана в поперечном направлении катится тележка согласно уравнению $S_T = 2t$. Определить уравнения движения и траектории, а также скорость центра тяжести тележки по отношению к цеху.

Дано:

$S_{KP} = 0{,}6t^2$;

$S_T = 2t.$

Найти:

Уравнение движения и траектории, υ –? α –?

Решение.

В настоящей задаче движение тележки по мосту движущегося крана представляет собой относительные движение $(S_T = S_r)$, а движение моста крана – переносное движение $(S_{KP} = S_e)$. Следовательно, абсолютным движением тележки (т. е. центра тяжести тележки) является движение тележки по отношению к цеху.

Для выяснения явного вида уравнения движения точки (абсолютное, переносное или относительное) в начале условно выберем (базовую) неподвижную и подвижную системы отсчёта.

Так как в условии задачи положение моста крана и тележки по отношению к стенам цеха не задано, расположим начало координат неподвижной системы *xOy* в начальный момент времени в центре тяжести тележки.

Начало осей подвижной системы координат $x_1O_1y_1$, связанных с мостом крана, также поместим в точке моста, совпадающей в начальный момент с центром тяжести тележки (точка *O*). Задачу будем решать в проекциях на оси координат, которые запишутся в виде алгебраической суммы равенств:

$$\left.\begin{array}{l} x_a = x_e + x_r \\ y_a = y_e + y_r \end{array}\right\}. \tag{5.12}$$

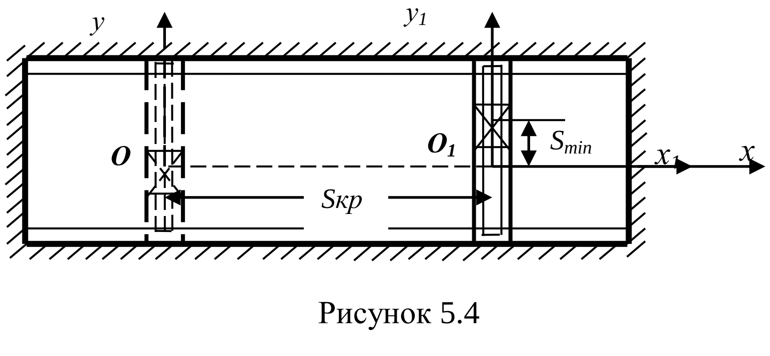


Рисунок 5.4

Согласно условию задачи, кран движется вдоль цеха по закону $x_e = S_{KP} = 0,6t^2$; и $x_r = 0$, поскольку относительное движение перпендикулярно к оси O_1x_1; а $y_e = 0$, так как оси системы координат $x_1O_1y_1$ в направлении оси Oy не перемещаются, а в поперечном направлении закон движения имеет вид $y_r = S_m = 2t$.

Следовательно, координаты абсолютного движения центра тяжести тележки (точки) запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} x_a &= 0,6t^2 \\ y_a &= 2t \end{aligned}\right\}. \tag{5.13}$$

Уравнение траектории абсолютного движения точки определим из системы (5.13) путем исключения времени из равенств, т. е. получим:

$$x_e = 0,15\, y_a^2 \ . \tag{5.14}$$

Величину абсолютной скорости точки υ_a определим в проекциях ее на оси системы координат xOy:

$$\begin{aligned} &\upsilon_{ax} = \dot{x}_a = 1,2t, \\ &\upsilon_{ay} = \dot{y}_a = 2, \\ &\upsilon_a = \sqrt{(1,2t)^2 + 2^2} = \sqrt{1,44t^2 + 4} м / сек. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Задача № 2

При решении определённых групп задач на практике не используется координатный способ задания движения точки, а решается задача в проекциях на оси координат. В качестве примера рассмотрим такую задачу, где требуется определить ускорение точки, когда переносное движение является вращательным, т. е. когда возникает дополнительное (Кориолиса) ускорение.

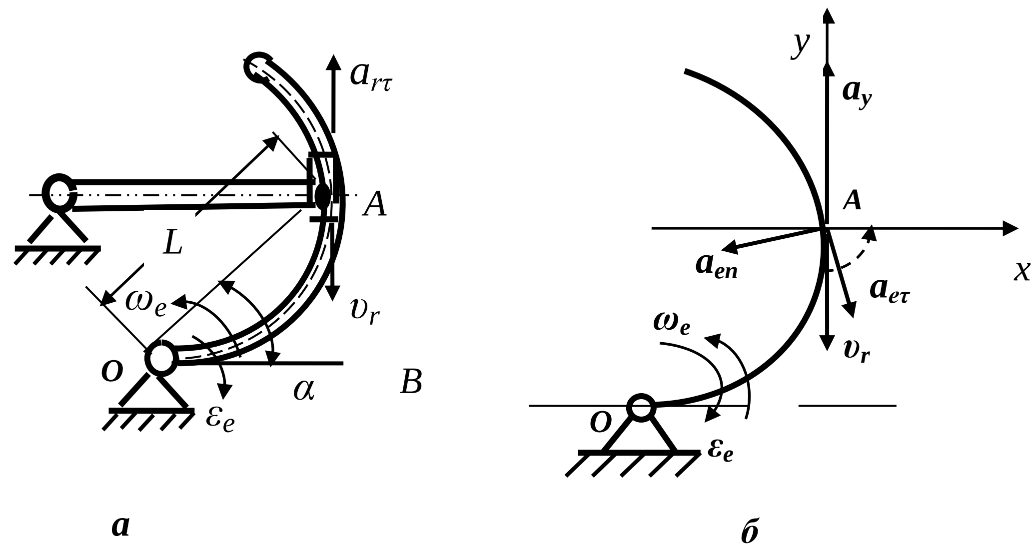


Рисунок 5.5

Условие задачи № 2. Пусть требуется определить ускорение ползуна A, движущегося по качающейся кулисе. При этом заданы: скорость ползуна относительно кулисы υ_r, относительное касательное ускорение ползуна a_r, которое направлено в сторону, обратную скорости υ_r, угловая скорость кулисы ω_e и угловое ускорение ε_e, которые направлены противоположно по отношению к угловой скорости (см. рисунок 5.5, *а, б*), расстояние точки *А* ползуна от центра качения кулисы есть ρ радиус кривизны в точке *А*.

Пусть в рассматриваемый момент времени скорость ползуна направлена вертикально вниз, а хорда ОА составляет с горизонтальной линией угол *α*; радиус кривизны кулисы равен ρ.

Дано:

υ_r,

a_r,

υ_r,

ω_e,

ε_e,

ρ.

Найти: a_a **–?**

Решение.

Для решения задачи составим равенство:

$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_K$, где $\vec{a}_a$ – абсолютное ускорение; $\vec{a}_e$ – переносное ускорение; $\vec{a}_r$ – относительное тангенциальное ускорение; $\vec{a}_K$ – ускорение Кориолиса.

Вычислим величины всех трёх видов ускорений ($\vec{a}_e, \bar{a}_r, \vec{a}_k$), указав направления векторов переносного, относительного и дополнительного (Кориолиса) ускорений.

Из теории сложного относительного движения точки известно, что все три вида ускорений в проекциях на координатные оси системы отсчёта можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \vec{a}_e &= \vec{a}_{en} + \vec{a}_{ex}, \\ \vec{a}_r &= \vec{a}_{rn} + \vec{a}_{rx}, \\ \vec{a}_K &= 2\left(\bar{\omega}_e \times \vec{\upsilon}_r\right). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Равенство (5.16) перепишем в удобном для нас виде и определим величины и направления всех составляющих векторов:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{en} + \vec{a}_{ex} + \vec{a}_{rn} + \vec{a}_{rx} + 2\left(\bar{\omega}_e \overset{\wedge}{\times} \vec{\upsilon}_r\right), \tag{5.17}$$

где проекции ускорений в формуле (5.17) соответственно определяются следующими соотношениями (5.18)–(5.21)

$$a_{en} = \omega_e^2 l, \tag{5.18}$$

причём вектор ускорения $\vec{a}_{en}$ направлен от точки *А* к центру вращения *О* по хорде *АО*:

$$a_{e\tau} = \varepsilon l, \tag{5.19}$$

а сам вектор направлен перпендикулярно к AO в сторону ε_e;

$$a_{rn} = \frac{\upsilon_r^2}{\rho}, \tag{5.20}$$

а сам вектор направлен к центру кривизны кулисы по радиусу ρ в данной точке; $a_{r\tau}$ – согласно условию задачи этот вектор ускорения направлен по касательной в сторону, обратную направлению вектора скорости υ_r.

Скалярная величина добавочного ускорения (Кориолиса) определится формулой:

$$a_K = 2\,\omega_e \upsilon_r \sin\left(\bar{\omega}_e \hat{,} \vec{\upsilon}_e\right) = 2\,\omega_e \upsilon_r. \tag{5.21}$$

Направление вектора добавочного ускорения a_K определяется по правилу Н.Е. Жуковского: повернем вектор относительной скорости υ_r на 90° в сторону переносного вращательного движения.

Вычисление направления и модуля величины вектора абсолютного ускорения a_a проводят с помощью представленных ниже формул (5.22, а-в).

$$a_x = a_K - a_{rn} - a_{en}\cos 60^0 + a_{e\tau}\cos 30^0, \tag{5.22, а}$$

$$a_y = a_{r\tau} - a_{en}\cos 30^0, \tag{5.22, б}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left[2\omega_e\upsilon_r - \frac{\upsilon_{K^2}}{\rho} - \frac{\omega_e\, l}{2} + \frac{\varepsilon\, l\sqrt{3}}{2}\right]^2 + \left[a_{r\tau} - \frac{\omega_e^2\sqrt{3}}{2}a\right]^2}. \tag{5.22, в}$$

Задача № 3

Найти уравнение относительного движения ползуна в прорези кулисы поперечно-строгального станка и его скорость в момент $t = 0{,}1$ сек (см. рисунок 5.6), если известно, что кривошип радиусом $r = 200$ *мм* вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 4 \cdot 1/\textit{сек}$, а расстояние между осями $O_1O = a = 500$ *мм*. Найти также уравнение движения кулисы O_1B.

Дано:
$t = 0{,}1$ сек,
$r = 200$ *мм,*
$\omega = 4 \cdot 1/\textit{сек}.$
$O_1O = a = 500$ *мм.*

Найти: уравнение движения кулисы.

Решение.

Ползун совершает прямолинейное поступательное движение в прорези кулисы. Это движение относительное, так как кривошип движется, вращаясь вокруг неподвижного центра O_1.

Для решения задачи необходимо выбрать удобную для анализа неподвижную (базовую) и подвижную системы координат. В качестве базовой (неподвижной) системы отсчёта координат примем систему координат xO_1y, которая связана с фундаментом станка, а за подвижную систему координат примем систему $x_1\, O_1 y_1$, которая имеет связь с кулисой $O_1 B$ и вращается вокруг центра точки O_1 (см. рисунок 5.6).

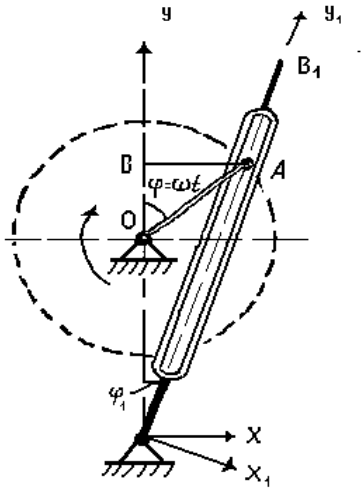


Рисунок 5.6

В подвижной системе отсчёта $x_1\, O_1 y_1$ координаты точки A($x_1 y_1$) ползуна будут определяться выражениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= O, \\ y_1 &= O_1 A. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Рассмотрим треугольник $O_1 AO$ на рисунке (5.6). Используя теорему косинусов из этого треугольника можно выразить координату y_1 в функциональной зависимости от угла поворота кривошипа $\varphi = \omega t$. С учётом сказанного координата y_1 определится по формуле:

$$y_1 = \sqrt{a^2 + r^2 + 2\,a\,r\cos\omega t}. \tag{5.24}$$

Подставив числовые значения в (5.24), получим уравнение относительного движения в следующем виде:

$$y_1 = 10\sqrt{29 + 20\cos\omega t}. \tag{5.25}$$

Относительная скорость ползуна определится первой производной от координаты y_1 по времени:

$$\upsilon_r = \frac{d\,y_1}{d\,t} = \frac{10\left(-20\omega\sin\omega t\right)}{2\sqrt{29 + 20\cos\omega t}} = -\frac{400\pi\sin 4\pi\,t}{\sqrt{29 + 20\cos 4\omega t}}. \tag{5.26}$$

В момент времени $t = 0{,}1$ сек, относительная скорость ползуна будет равна:

$$\upsilon_r = \frac{-400\pi\sin 0{,}4\pi}{\sqrt{29 + 20\cos 0{,}4\pi}} = -202\,см/сек = -2{,}02\,м/сек.. \tag{5.27}$$

Уравнение колебательного движения кулисы получим, определив угол $\varphi_1 = f(t)$. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник $O_1 BA$ (см. рисунок 5.6), где AB –

перпендикуляр к линии O_1O. Тангенс угла φ_1 в этом треугольнике определится отношением его катетов AB/O_1B. Выразив AB иO_1B через известные параметры r и α, и подставив вместо AB/O_1B, окончательно получим уравнение колебательного движения кулисы:

$$tg\phi_1 = \frac{r\sin\omega t}{a + r\cos\omega t}. \qquad (5.28)$$

Задача № 4

Трамвай движется по прямолинейному горизонтальному участку пути со скоростью υ = 18 *км/час* (см. рисунок 5.7), причем кузов совершает на рессорах колебания амплитудой *а* = 0,8 *см* и с периодом *Т* = 0,5 сек. Найти уравнение траектории центра тяжести *С* кузова, если его среднее расстояние от горизонтальной плоскости, проходящей через оси колес равна h = 0,9 *м*, а радиусы колес R = 0,39 *м*. При t = 0 центр тяжести находится в среднем положении, а скорость колебания направлена вверх.

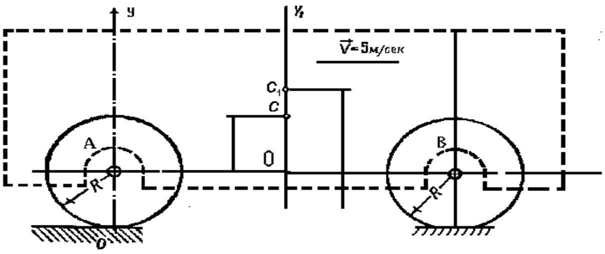


Рисунок 5.7

Дано:

ϑ = 18 *км/час,*

а = 0,8 *см,*

Т = 0,5 сек,

h = 0,9 *м,*

R = 0,39 *м,*

t = 0.

Найти: *у(х)* –**?**

Решение.

Центр тяжести кузова *С* вагона совершает сложное движение. Он перемещается вместе с тележкой колес в горизонтальном направлении и совершает колебания по отношению к тележке колес в вертикальном направлении.

За неподвижную систему отсчёта выберем координатную систему *хОу,* а за подвижную координатную систему – $x_1O_1y_1$.

Координатную ось *Ох* неподвижной системы отсчёта расположим на уровне колёс и направим вдоль рельс по направлению движения, а вертикальную ось *Оу* направим перпендикулярно вверх.

Выберем подвижную систему отсчёта, начало координат которой закрепим на кузове вагона в точке центра масс O_1 и направим ось O_1x_1 вправо вдоль (т. е. в направлении движения тележки) уровня осей колес, а ось O_1y_1 – вертикально вверх через центр тяжести кузова трамвая. Тогда выражение изменения координат x_r и y_r центра тяжести кузова в подвижной системе от времени можно записать в виде уравнений (5.29) и (5.30):

$$x_r = 0, \qquad (5.29)$$

$$y_r = h + a\sin\omega t. \qquad (5.30)$$

Известно, что при колебательных движениях точки частота её колебания оценивается по формуле (5.31):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \cdot 1/\,сек. \qquad (5.31)$$

Подставив в уравнение (5.30) численные значения амплитуды: *а* = 0,008 *м* и найденное значение частоты по формуле (5.31), получим следующее выражение:

$$y_r = 0,9 + 0,008\sin 4\pi t. \qquad (5.32)$$

Координаты точки $O_1(x_e \;и\; y_e)$ подвижной системы координат по отношению к неподвижной системе xOy определятся выражениями:

$$\begin{aligned} x_e &= \upsilon t = 5t\,м, \\ y_e &= R = 0,39\,м. \end{aligned} \qquad (5.33)$$

Соответственно координаты центра тяжести кузова в неподвижной системе отсчёта *xOy,* определятся соотношениями:

$$x_a = x_e + x_r\,; \qquad (5.34)$$

$$y_a = y_e + y_r. \qquad (5.34')$$

Подставив в формулы (5.34) и (5.34$'$) значения, определенные по формулам (5.30), (5.32) и (5.33), получим следующие два выражения:

$$x_a = 5t\,; \quad y_a = 1,29 + 0,008\sin 4\pi t. \qquad (5.35)$$

Для того чтобы определить уравнение траектории, в формулах (5.35) исключим время *t,* тогда окончательно получим уравнение траектории:

$$y_a = 1,29 + 0,008\sin 0,08\pi x_e + x_r x_a. \qquad (5.36)$$

Уравнение (5.36) показывает, что траекторией центра тяжести вагона при его движении вдоль рельс является синусоида.

Задача № 5

Определить скорости точек M_1, M_2, $M3$ и M_4 диска радиуса r = 0,5 *м,* катящегося без скольжения по прямолинейному участку пути (см. рисунок 5.8). Скорость центра его постоянна и равна υ = *10 м/сек.*

Дано:
r = 0,5*м,*
$V_ц$ = *10 м/сек.*

Найти: υ_{a1} *–?* υ_{a2} *–?* υ_{a3} *–?* υ_{a4} *–?*

Решение.

Движение диска по прямолинейному участку (см. рисунок 5.8) является сложным. Оно состоит из поступательного движения диска с центром в точке *О* со скоростью υ_0 и вращательного движения вокруг центра *О* диска. При поступательном движении диска движение любой точки является переносным, а вращательное относительным движением.

Абсолютная скорость υ_a любой точки диска определится геометрической суммой двух скоростей: переносного и относительного движений по формуле:

$$\vec{\upsilon}_a = \vec{\upsilon}_e + \vec{\upsilon}_r, \tag{5.37}$$

где υ_r – относительная скорость; υ_e – переносная скорость диска.

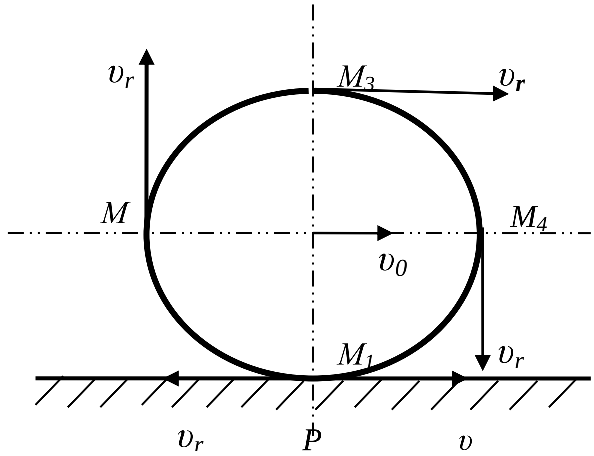


Рисунок 5.8

Так как диск катится без скольжения по неподвижному участку пути, то абсолютная скорость точки касания диска в каждый момент времени равна нулю. Тогда уравнение (5.37) для точки M_1, являющейся точкой касания диска с поверхностью участка пути, приравняем нулю:

$$0 = \vec{\upsilon}_e + \vec{\upsilon}_r \tag{5.38}$$

или выражение (5.38) перепишем в виде:

$$\vec{\upsilon}_r = -\vec{\upsilon}_e. \tag{5.39}$$

Величина вектора переносной скорости $\vec{\upsilon}_e$ равна вектору скорости $\vec{\upsilon}_0$ центра диска O, и соответственно, величина относительной линейной скорости точки $\vec{\upsilon}_r$ также будет равна $\vec{\upsilon}_0$. Вектор скорости $\vec{\upsilon}_r$ направлен в противоположную сторону по отношению к направлению вектора $\vec{\upsilon}_0$, это наглядно видно на рисунке 5.8, поскольку колесо вращается вокруг центра O по часовой стрелке.

Известно, что величина угловой скорости диска ω связана с линейной скоростью центра диска соотношением:

$$\upsilon_0 = \omega r. \tag{5.40}$$

Из формулы (5.40) выразим угловую скорость диска и вычислим его:

$$\omega = \frac{\upsilon_0}{r} = \frac{10}{0,5} = 20, \ \ сек^{-1}. \tag{5.41}$$

Теперь можно определить абсолютную скорость точки M_2 на диске. Она определится геометрической суммой двух скоростей, а именно: переносная скоростью точки M_2, которая представляет собой скорость υ_0 и относительной скоростью точки M_2, которая определится соотношением $\upsilon_r = \omega r$.

Отметим, что направления переносной и относительной скоростей точки M_2 диска расположены взаимно перпендикулярно (см. рисунок 5.8).

Скалярную величину абсолютной скорости точки M_2 диска вычислим по формуле:

$$\upsilon_{a_2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + (\omega r)^2} = \sqrt{10^2 + (20 \cdot 0,5)^2} = 10\sqrt{2}, \ \text{м / сек}. \qquad (5.42)$$

Далее определим величину абсолютной скорости точки M_3. Она равна алгебраической сумме переносной и относительной скоростей точки M_3.

Так как векторы скоростей υ_{a_3} и υ_{r_3} направлены по одной и той же прямой в одну и ту же сторону (вправо), то величину скорости υ_{a_3} можно вычислить из соотношения:

$$\upsilon_{a_3} = \upsilon_0 + \omega r = 10 + 20 \cdot 0,5 = 20, \ \text{м / сек}. \qquad (5.43)$$

Аналогично определим абсолютную скорость точки M_4. Она состоит из геометрической суммы вектора переносной скорости $\vec{\upsilon}_{a4}$ и вектора относительной скорости υ_{r_4}, который по величине равен ωr, т. е.:

$$\vec{\upsilon}_{a_4} = \vec{\upsilon}_{e_4} + \vec{\upsilon}_{r_4}. \qquad (5.44)$$

Вектор скорости $\vec{\upsilon}_{a_4}$ ориентирован перпендикулярно к радиусу и направлен вертикально вниз к линии пути диска.

Скалярную величину абсолютного вектора скорости $\vec{\upsilon}_{a_4}$ определим аналогично формуле (5.42), и вычислим:

$$\upsilon_{a4} = \sqrt{10^2 + (20 \cdot 0,5)^2} = 10\sqrt{2}, \ \text{м / сек}.$$

Направление искомых векторов скоростей: υ_{a1}, υ_{a2}, υ_{a3}, υ_{a4}, в соответствующих точках M_1, M_2, M_3 и M_4 вращающегося диска показано на рисунке 5.8.

Задача № 6

Кривошип *OA* радиусом R = 30 см вращается с угловой скоростью $\omega_0 = 6 сек^{-1}$ вокруг неподвижной оси *O* по часовой стрелке. В точке *A* кривошипа расположена шестерня с радиусом *r = 10 см* (см. рисунок 5.9). Определить абсолютные скорости точек *1, 2, 3* и *4* шестерни, в случае, если она вращается против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_A = 10 сек^{-1}$.

Дано:
R = 30 см,
$\omega_0 = 6 сек^{-1}$,
r = 10 см,
$\omega_A = 10 сек^{-1}$.

Найти: υ_{a1} –? υ_{a2} –? υ_{a3} –? υ_{a4} –?

Решение.

Вектор абсолютной скорости любой точки шестерни определится геометрической суммой векторов $\vec{\upsilon}_e$ и $\vec{\upsilon}_r$ по формуле:

$$\vec{\upsilon}_a = \vec{\upsilon}_e + \vec{\upsilon}_r, \qquad (5.45)$$

где $\vec{\upsilon}_a$ – вектор абсолютной скорости точки; $\vec{\upsilon}_e$ – вектор переносной скорости точки при вращении вместе с кривошипом; $\vec{\upsilon}_r$ – вектор относительной скорости точки при вращении шестерни вокруг оси A.

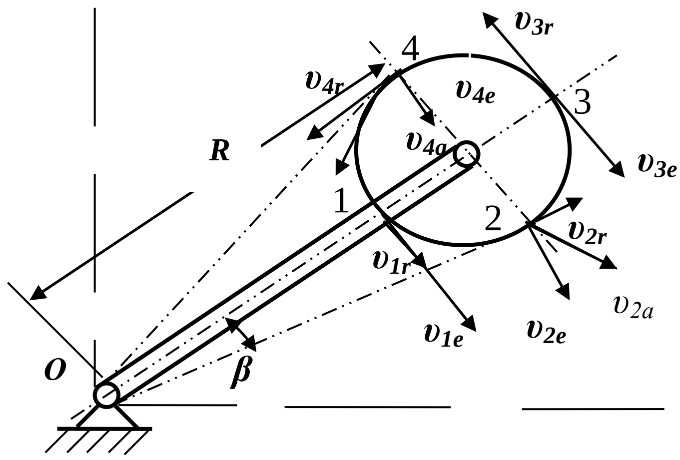


Рисунок 5.9

Для того чтобы определить величину абсолютной скорости $\vec{\upsilon}_a$ точки *1* шестерни, вначале вычисляют переносную и относительную скорости данной точки. Величина переносной скорости вычисляется по формуле (5.46) и она равна:

$$\upsilon_{1e} = \omega_0 (R - r) = 6(30 - 10) = 120, \ \ см/сек. \tag{5.46}$$

Переносная скорость $\vec{\upsilon}_e$ ориентирована перпендикулярно к линии OA и направлена в сторону вращения кривошипа (см. рисунок 5.9). Скалярная величина относительной скорости $\vec{\upsilon}_r$ точки 1 определится по формуле:

$$\upsilon_{1r} = \omega_A r = 10 \cdot 10 = 100, \ \ см/сек. \tag{5.47}$$

Относительная скорость $\vec{\upsilon}_r$ направлена перпендикулярно к линии OA в сторону относительного вращения точки 1.

Как видно на рисунке, обе эти скорости как векторы направлены в одну сторону (т. е. они коллениарны), поэтому скалярная величина абсолютной скорости точки *1* определится алгебраической суммой:

$$\upsilon_a = 120 + 100 = 220, \ \ см/сек. \tag{5.48}$$

Абсолютная скорость точки *2* определится аналогично как и для точки *1* согласно формулы (5.45).

Переносная скорость $\vec{\upsilon}_{2r}$ направлена перпендикулярно к линии *02*, а скалярная величина этой скорости вычислится по формуле:

$$\upsilon_{2e} = \omega_0 \sqrt{R^2 + r^2} = 6\sqrt{30^2 + 10^2} = 60\sqrt{10}, \ см/сек. \tag{5.49}$$

Относительная скорость υ_{2e} направлена перпендикулярно к радиусу r в точке *2,* а скалярная величина υ_{2e}, как и для точки *1,* определится выражением:

$$\upsilon_{2e} = \omega_A \cdot r = 10 \cdot 10 = 100, \ \ см/сек. \tag{5.50}$$

Скалярную величину абсолютной скорости точки *2* определим по теореме косинусов:

$$\upsilon_{2e} = \sqrt{\upsilon_{2e}^2 + \upsilon_{2r}^2 + 2\upsilon_{2e} \cdot \upsilon_{2r} \cos\left(90^0 + \beta\right)}, \tag{5.51}$$

где β – угол между линиями *01* и *02*, который определяется из треугольника ΔOA_2 согласно формуле:

$$tg\beta = \frac{r}{R} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} . \tag{5.52}$$

Отсюда следует, что угол, образованный между линиями 01 и 02 числено равен β $=18^0 30^/$.

Подставляя в уравнение (5.51) известные числовые значения, найдём абсолютную скорость точки 2:

$$\upsilon_{2e} = \sqrt{\left(60\sqrt{10}\right)^2 + 100^2 + 260\sqrt{10} \cdot 100 \cos\left(90^0 + 18^0 30^/\right)} = 155, \; см/сек. \tag{5.53}$$

Очевидно, что абсолютные скорости υ_{a3} и υ_{a4} для точек 3 и 4 определятся аналогично найденым скоростям υ_{a1} и υ_{a2} по изложенной выше методике.

Величина абсолютной скорости точки *3* равна алгебраической разности величин переносной υ_{3e} и относительной υ_{3r} скоростей. Алгебраическая разность этих скоростей обусловлена тем, что векторы скоростей и υ_{3r} противоположно направлены и лежат на одной прямой, перпендикулярной к отрезку O_3 (см. рис. 5.9). Следовательно, абсолютная скорость точки 3 вычисляется по формуле:

$$\upsilon_{3a} = \omega_0\left(R + r\right) - \omega_A r = 6\left(30 + 10\right) - 10 \cdot 10 = 140, \quad см/сек. \tag{5.54}$$

Скалярная величина абсолютной скорости точки *4* определится по теореме косинусов:

$$\upsilon_{4a} = \sqrt{\upsilon_{4a}^2 + \upsilon_{4r}^2 + \upsilon_{4e}^2 + 2\upsilon_{4e4r} \cos\left(90^0 + \beta\right)}, \tag{5.55}$$

где слагаемые υ_{4e} и υ_{4r} в (5.55) соответственно являются переносной и относительной скоростями и вычисляются по формулам (5.56) и (5.57):

$$\upsilon_{4e} = \omega_0\sqrt{R^2 + r^2} = 60\sqrt{10}, \; см/сек, \tag{5.56}$$

$$\upsilon_{4r} = \omega_A r 10 \cdot 10 = 100, \quad см/сек. \tag{5.57}$$

Задача № 7

Механизм с вращающейся кулисой (см. рисунок 5.10) состоит из двух параллельных валов *O* и O_1 с кривошипом *OA* и кулисы *O1B*. Конец кривошипа *OA* в точке *A* соединен с камнем, который скользит вдоль прорези кулисы O1B. Известно: расстояние между осями валов *OO1* равно *a;* длина кривошипа ОА равна *r*, причем $r > a$; вал *O* вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти угловую скорость кулисы и относительную скорость камня (для точки *A*) по отношению к кулисе *O1B*, выразив их через переменную величину $O_1A = S$.

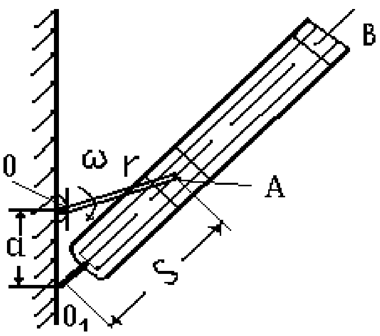


Рисунок 5.10

Дано:

a,?

$l = r$,

ω = const,

S

Найти:

ω_1 –? υ_r –?

Решение.

Пусть вращательное движение кулисы является переносным движением, а движение точки *А* камня в прорези кулисы – относительным движением, тогда вращение кривошипа ОА можно считать абсолютным движением.

Вектор направления абсолютной скорости точки *А* перпендикулярен к кривошипу и величина его определится соотношением:

$$\upsilon_a = \omega r. \tag{5.58}$$

Переносная скорость точки *А* направлена перпендикулярно к оси кулисы *ОА* и по величине определится выражением:

$$\upsilon_e = \omega_1 \cdot O_1A = \omega_1 \cdot S \tag{5.59}$$

На рисунке 5.10 по правилу параллелограмма векторов скоростей найдем величину переносной скорости, величина которой определится соотношением:

$$\upsilon_e = \upsilon_a \cos\alpha, \tag{5.60}$$

где угол $\angle a$ – есть угол поворота кулисы $\angle OAO_1$.

Направление вектора относительной скорости совпадает с осью прорези кулисы. Скалярная величина относительной скорости точки определится по формуле:

$$\upsilon_r = \upsilon_a \sin\alpha\,. \tag{5.61}$$

Сравнивая уравнения (5.59) и (5.60), определим угловую скорость кулисы ω_1:

$$\omega_1 = \frac{\omega r \cos\alpha}{S}, \tag{5.62}$$

где $S = O_1A$

Из треугольника OAO_1 согласно теоремы косинусов можно записать выражение:

$$a^2 = r^2 + S^2 - 2rS\cos\alpha. \tag{5.63}$$

Из соотношения (5.63) можно выразить *cos a* и записать в виде:

$$\cos\alpha = \frac{r^2 + S^2 - a^2}{2rS}. \qquad (5.64)$$

Подставив в формулу (5.62) величину косинуса угла (5.64), определим угловую скорость кулисы:

$$\omega_1 = \frac{\omega}{2}\left(1 + \frac{r^2 - a^2}{S^2}\right). \qquad (5.65)$$

Относительная скорость точки определится по формуле:

$$\upsilon_r = \upsilon_a \sin\alpha, \qquad (5.66)$$

$$\upsilon_r = \omega r \sqrt{1 - \cos^2\alpha}\,. \qquad (5.67)$$

Если подставить в уравнение (5.67) выражение косинуса из соотношения (5.62), то получим следующее выражение:

$$\upsilon_r = \frac{\omega}{2S}\sqrt{4r^2S^2 - \left(r^2 + S^2 - a^2\right)}. \qquad (5.68)$$

После математических преобразований окончательный вид формулы относительной скорости камня примет вид:

$$\upsilon_r = \frac{\omega}{2S}\sqrt{(r+S+a)(r+S-a)(a+r-S)(a+S-r)}. \qquad (5.68)$$

5.3.1. Ускорение точки, когда переносное движение поступательное

Задача № 8

Кривошип *OA = r = 0,4 м* приводит в движение прямолинейную кулису, которая совершает возвратно-поступательное движение, и в момент, когда угол ϕ = 60°, имеет угловую скорость ω = 3,14 сек$^{-1}$ и угловое ускорение ε = –2 сек$^{-2}$ (см. рисунок 5.11). Найти переносное ускорение кулисы и относительное ускорение ползуна в указанный момент.

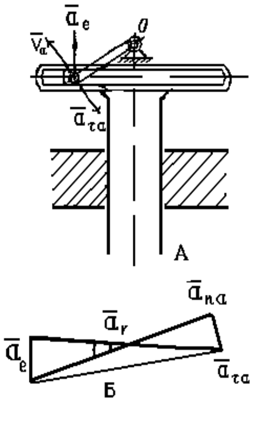


Рисунок 5.11

Дано:

OA = r = 0,4 м,

φ = 60°.

ω = 3,14 сек$^{-1}$,

ε = –2, сек$^{-2}$.

Найти: $\vec{a}_e$ –? $\vec{a}_r$ –?

Решение.

В условии задачи заданы величины угловой скорости и углового ускорения кривошипа, а это означает, что величина абсолютного ускорения $\boldsymbol{a}_\alpha$ ползуна в точке A также известна. Движение ползуна в прорези кулисы будет представлять собой относительное движение, причём оно прямолинейное и поступательное. Соответственно и кулиса совершает прямолинейное поступательное движение в вертикальном направлении, скользя вдоль направляющей прорези. Движение точки A кулисы является переносным движением. Для точки A, которая движется одновременно относительно неподвижной и подвижной системы отсчёта, справедливо выражение:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r, \tag{5.70}$$

где $\vec{a}_a$ – абсолютное ускорение; $\vec{a}_e$ – переносное ускорение; $\vec{a}_r$ – относительное ускорение. Для определения величины и направления переносного и относительного ускорений проведем ряд предварительных вычислений. Во-первых, заменим вектор абсолютного ускорения $\vec{a}_a$ в формуле (5.70) на сумму его составляющих (тангенциального $a_{\tau a}$ и нормального a_{na}) ускорений, получим:

$$a_{\tau a} + a_{na} = a_e + a_r. \tag{5.71}$$

Во-вторых, вычислим каждую составляющую $a_{n\alpha}$ и $a_{\tau\alpha}$ абсолютного ускорения в отдельности.

Величину касательного (тангенцального) ускорения $a_{\tau\alpha}$ вычислим по формуле (5.72), подставив численные значения ε и r из условия задачи.

$$a_{\tau\alpha} = \varepsilon r = -2 \cdot 0,4 = -0,8 м/сек^2. \tag{5.72}$$

Знак “минус” в формуле (5.72) означает, что вектор касательного ускорения в данный момент времени направлен противоположно по отношению к направлению вектора абсолютной скорости υ_a точки A (см. рисунок 5.11, А).

Величину нормального ускорения $a_{n\alpha}$ определим по формуле:

$$a_{na} = \omega^2 r = 3,14^2 \cdot 0,4 = 3,94 м/сек^2. \tag{5.73}$$

Известно, что вектор нормального ускорения направлен по радиусу к центру вращения кривошипа точки O.

Отметим, что относительное ускорение направлено горизонтально, а переносное ускорение – вертикально.

На основании векторного равенства (5.70) построим многоугольник ускорений (см. рисунок 5.11, Б), из которого определим направления искомых векторов $\vec{a}_e$ и $\vec{a}_r$ ускорений, а затем и их величины.

Векторы ускорений $\vec{a}_e$ и $\vec{a}_r$ должны быть направлены навстречу вектору $\vec{a}_a$. Как видно из многоугольника, относительное ускорение $\vec{a}_r$ направлено вправо, а переносное ускорение $\vec{a}_e$ – вверх.

Для определения величин ускорений воспользуемся теоремой о проекции равнодействующего вектора на какую-либо выбранную ось (например, Oy).

Так как проекция замыкающей стороны многоугольника на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих векторов на ту же ось, то, спроектировав все векторы ускорений многоугольника на вертикаль, получим соотношение:

$$a_{na} \cos\phi - a_{\tau\alpha} \sin\phi = a_e. \tag{5.74}$$

Вычислим величину этого ускорения $\vec{a}_e$, подставив в формулу (5.74) величину угла EMBED Equation.DSMT4 , и найденные значения ускорений по формулам (5.72) и (5.73), тогда получим величину переносного ускорения:

$$a_e = 3{,}94 \cdot \cos 60^0 - 0{,}8 \sin 60^0 = 1{,}278, \ \ м / сек^2. \qquad (5.75)$$

Спроектировав векторы ускорений на горизонтальную ось, получим:

$$a_{\tau a} \cos \phi + a_{na} \sin \phi = a_r. \qquad (5.76)$$

Подставив численные значения угла ϕ и ускорений a_{na} и $a_{\tau a}$ в формулу (5.76), вычислим относительное ускорение:

$$a_r = 0{,}8 \cos 60^0 + 3{,}94 \sin 60^0 = 3{,}307 м / сек^2. \qquad (5.77)$$

Задача № 9

Велосипедист на некотором участке горизонтального прямолинейного пути движется по закону $S = 0{,}1t^2$ (*S* в м*; t* – в сек). Дано: R = 350 мм, l = 180 мм, z_1 = 18 зубцов, z_2 = 48 зубцов. Определить абсолютное ускорение осей M и N велосипедных педалей (предполагая, что колеса катятся без скольжения) при t = 10 сек, если в этот момент кривошип расположен вертикально.

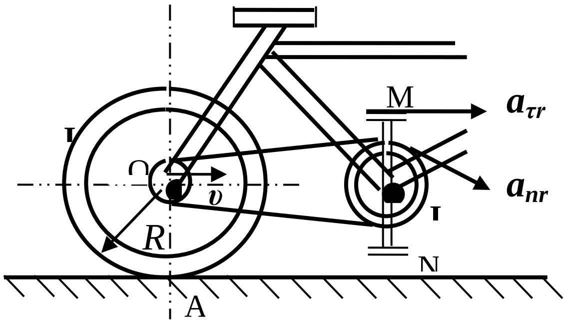


Рисунок 5.12

Дано:

$S = 0{,}1t^2$,
R = 350 мм,
l = 180 мм,
z_1 = 18 зуб.,
z_2 = 48 зуб.,
t = 10 сек.

Найти: ω_1 **–?** $a_a(M)$ –? $a_a(N)$ –?

Решение.

Пусть поступательное движение рамы велосипеда является переносным движением. Вращательное движение кривошипов педалей велосипеда по отношению к его раме будет относительным движением.

Тогда скорость и ускорение переносного движения велосипеда можно определить по формулам:

$$\upsilon_e = \frac{ds}{dt} = 0{,}2t \ м / сек, \qquad (5.78)$$

$$a_e = \frac{d^2 s}{dt^2} = 0,2\, м/сек^2. \tag{5.79}$$

Для определения угловой скорости и углового ускорения кривошипов педалей необходимо предварительно найти угловую скорость вращения колеса велосипеда.

Абсолютная скорость точки *A* касания колеса с опорной неподвижной поверхностью равна нулю $\upsilon_a = 0$, так как между колесом и опорной поверхностью отсутствует скольжение.

Переносная скорость оси колеса υ_e направлена горизонтально вправо (см. рисунок 5.12), а относительная скорость υ_r, равная окружной скорости точки *A* колеса при вращении его вокруг оси, направлена горизонтально влево, другими словами, вектор относительной скорости υ_r противоположно направлен по отношению к вектору скорости υ_e. Относительная скорость точки *A* связана с угловой скоростью соотношением:

$$\upsilon_r = \omega_1 R = 0,35\omega_1\, м/сек, \tag{5.80}$$

где ω_1 – угловая скорость вращения колеса.

Из теории относительного движения точки известно, что вектор абсолютной скорости для точки *A* определится геометрической суммой векторов $\vec{\upsilon}_e$ и $\vec{\upsilon}_r$ по формуле:

$$\vec{\upsilon}_a = \vec{\upsilon}_e + \vec{\upsilon}_r\ . \tag{5.81}$$

Подставив в (5.81) численные значения $\vec{\upsilon}_e$ и $\vec{\upsilon}_r$ скоростей, получим:

$$0 = 0,2t - 0,35\omega_1. \tag{5.82}$$

Из (5.82) выразим угловую скорость вращения колеса велосипеда:

$$\omega_1 = \frac{4}{7}t, сек^{-1}. \tag{5.83}$$

Далее следует определить угловую скорость $\omega_2(z_1)$ зубчатого колеса 1, которая имеет связь с кривошипом педалей. Математически эту связь можно выразить в виде пропорциональной зависимости:

$$\frac{\omega_2(z_1)}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}, \tag{5.84}$$

откуда

$$\omega_2(z_1) = \omega_1 \frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{7}t \cdot \frac{18}{48} = \frac{3}{14}t\ ,\ сек^{-1}. \tag{5.85}$$

В момент времени $t = 10$ *сек* угловая скорость зубчатого колеса 1 равна:

$$\omega_2(z_1) = \frac{15}{7} 1/сек\ . \tag{5.86}$$

Угловое ускорение зубчатого колеса 2 определится как первая производная от угловой скорости колеса:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_I}{dt} = \frac{3}{14} 1/сек^2. \tag{5.87}$$

Теперь с учётом найденных выше величин скоростей $\omega_1, \omega_2(z_1)$ и ускорения ε_2 можно определить ускорение точек *M* и *N*.

Точка *M* вращается вокруг оси 2. Ее относительное ускорение состоит из двух составляющих: касательного и нормального.

Вектор касательного ускорения в момент t = 10 сек направлен горизонтально вправо и по величине равен:

$$a_{\tau r} = \varepsilon_2 l = \frac{3}{14} 0{,}18 = \frac{27}{700}, \ м/сек^2. \quad (5.88)$$

Вектор нормального ускорения направлен к центру вращения 2 (вниз) и по величине равен:

$$a_{nr} = \omega_2^2 l = \left(\frac{3}{14} t\right)^2 0{,}18 = \frac{81}{9800} t^2, \ \ м/сек^2. \quad (5.89)$$

В заданный момент времени t = 10 сек нормальное относительное ускорение точки M равно:

$$a_{nr} = \frac{81}{98}, \ м/сек^2. \quad (5.90)$$

Скалярные величины составляющих относительного ускорения точки N равны по величине соответственно составляющим относительных ускорений точки M, а направления векторов этих ускорений отличны друг от друга. *А* именно, касательное (тангенцальное) ускорение направлено горизонтально влево, а нормальное – по радиусу к точке *2* вверх (см. рисунок 5.12).

Отметим, что переносные движения кривошипов велосипеда являются поступательными. Абсолютные ускорения точек M и N определяются геометрической суммой ускорений переносного a_e и относительного a_r .

Для того чтобы определить абсолютное ускорение точки M необходимо провести следующие математические операции с векторами a_e, $a_{\tau r}$ и a_{nr} .

Во-первых, провести алгебраическое сложение векторов переносного $\vec{a}_e$ и относительного тангенсального $a_{\tau r}$ ускорений точки M. Такое сложение этих векторов возможно, поскольку оба вектора a_e и a_r направлены вдоль одной горизонтальной прямой.

Во-вторых, полученную сумму геометрически сложим с относительным нормальным ускорением a_{nr}, тогда окончательно для скалярной величины абсолютного ускорения точки M получим выражение (5.91), подставив в неё численные значения искомых ускорений и вычислим абсолютное ускорение точки M:

$$a_a^M = \sqrt{\left(a_e\right)^2 + a_{nr}^2} = \sqrt{0{,}2^2 + \left(\frac{81}{98}\right)^2 = 0{,}870}, \ \ м/сек^2. \quad (5.91)$$

Абсолютное ускорение точки N вычисляется аналогично, как и в случае для точки M. Только окончательное выражение абсолютного ускорения точки N представленная в виде формулы (5.92) будет отличаться от (5.91) знаком суммирования векторов ускорения (a_e – $a_{\tau r}$). Знак минус обусловлен противоположным направлением вектора ускорения $a_{\tau r}$ по отношению к вектору a_e.

$$a_a^N = \sqrt{\left(a_e - a_{\tau r}\right)^2 + a_{nr}^2} = \sqrt{\left(0{,}2 - \frac{27}{700}\right)^2 + \left(\frac{81}{98}\right)^2} = 0{,}841, \ м/сек^2. \quad (5.92)$$

Глава 6

МГНОВЕННЫЕ ЦЕНТРЫ СКОРОСТЕЙ

6.1. Определение скоростей точек тела при помощи мгновенных центров скоростей. Центроиды

Понятие «мгновенный центр скоростей» используется при анализе движения звеньев кривошипно-шатунного механизма. Например, если известна постоянная угловая скорость вращающегося кривошипа (на рисунке 6.1), то скорость поршня не будет постоянной по модулю. Чтобы вычислить скорость поршня в разных положениях и построить соответствующий график, можно воспользоваться понятием мгновенного центра скоростей. В свою очередь, кривошипно-шатунные механизмы применяются в двигателях внутреннего сгорания, поршневых насосах, поворотных гидродвигателях и многих других устройствах. Таким образом, использование понятия «мгновенного центра скоростей» позволяет производить расчёты, необходимые для выбора оптимальной конструкции указанных механизмов. Движения коленного, локтевого, плечевого и др. суставов в биофизике, также исследуют с помощью мгновенного центра скоростей. Улучшения тормозных характеристик автомобилей можно добиться путём выбора оптимальной конструкции педалей тормоза и соответствующих кинематических расчётов, проведённых с помощью мгновенного центра скоростей. Всякое перемещение плоской фигуры можно осуществить вращением ее вокруг некоторого центра, называемого конечным центром вращения. Последний может быть определен, если известны два положения тела в начальный t_1 и конечный t_2 моменты некоторого промежутка времени (рисунок 6.1). От интервала времени $t_2–t_1$ зависит положение тела в конечный момент времени t_2, а следовательно, зависит и положение центра конечного вращения.

Если интервал времени $t_2–t_1$ стремится к нулю, то центр вращения стремится к некоторому своему предельному положению, которое называется мгновенным центром вращения или мгновенным центром скоростей.

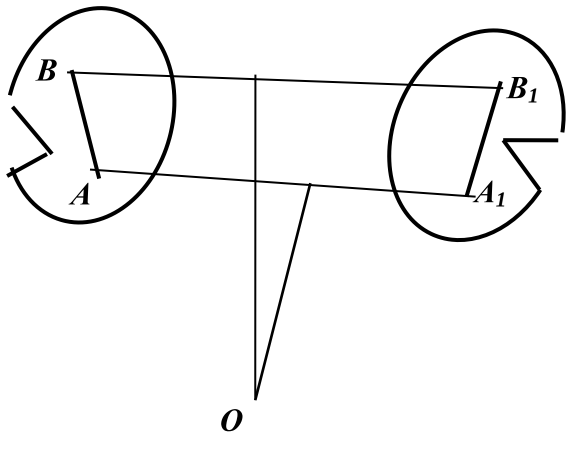


Рисунок 6.1

Зная положение мгновенного центра скоростей, расстояние какой-либо точки тела от центра скоростей 1 и ее скорость, можно определить величину мгновенной угловой скорости вращения тела по формуле:

$$\omega = \frac{\upsilon_{\text{A}}}{l}.$$

Если определена величина и направление мгновенной угловой скорости тела, то можно определить скорость любой точки тела, расстояние которой от мгновенного центра скоростей задано.

Вектор скорости любой точки тела направлен в сторону вращения перпендикулярно к линии, соединяющей мгновенный центр вращения с данной точкой.

6.2. Неподвижная и подвижная центроиды

Геометрическое место мгновенных центров скоростей фигуры, связанных с неподвижной плоскостью, в которой перемещается плоская фигура, называется неподвижной центроидой.

Геометрическое место мгновенных центров скоростей, связанных с движущейся плоской фигурой, называется подвижной центроидой.

При движении тела подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной, следовательно, каждой точке подвижной центроиды соответствует определенная точка неподвижной. Если центроиды известны, то движение тела можно осуществить путем перекатывания без скольжения подвижной центроиды по неподвижной.

Центроиды могут быть получены графически или аналитически. Неподвижные центроиды определяются аналитически при помощи формул, позволяющих определить координаты x_p и y_p мгновенных центров скоростей на неподвижной плоскости по отношению к неподвижной системе координат xOy:

$$x_p = x_{O_1} - \frac{\upsilon_{O_{1y}}}{\omega}, \tag{6.1}$$

$$y_p = y_{O_1} - \frac{\upsilon_{O_{1x}}}{\omega}. \tag{6.2}$$

Координаты мгновенных центров скоростей подвижных центроид по отношению к подвижной системе координат, связанной с плоскостью движущейся фигуры, определяются по формулам:

$$x_{1p} = \frac{\upsilon_{O_{1x}} \sin\varphi - \upsilon_{O_{1y}} \cos\varphi}{\omega}, \tag{6.3}$$

$$y_{1p} = \frac{\upsilon_{O_{1x}} \cos\varphi + \upsilon_{O_{1x}} \sin\varphi}{\omega}. \tag{6.4}$$

В формулах (6.1)–(6.4) x_{O_1} и y_{O_1} – координаты полюса *O₁* фигуры, а φ – угол поворота подвижной системы осей относительно неподвижной; $\upsilon_{O_{1x}}$ – проекция скорости точки O_1 тела на ось абсцисс; $\upsilon_{O_{1y}}$ проекция скорости точки O_1 тела на ось ординат; $\omega = {d\varphi}/{dt}$ – угловая скорость вращения подвижной системы координат относительно неподвижной.

6.3. Методические указания к решению задач

Определение положения мгновенного центра скоростей P и угловой скорости тела ω имеет большое значение. Зная положение мгновенного центра скоростей и мгновенной угловой скорости можно определить вектор скорости любой точки M тела в рассматриваемый момент времени.

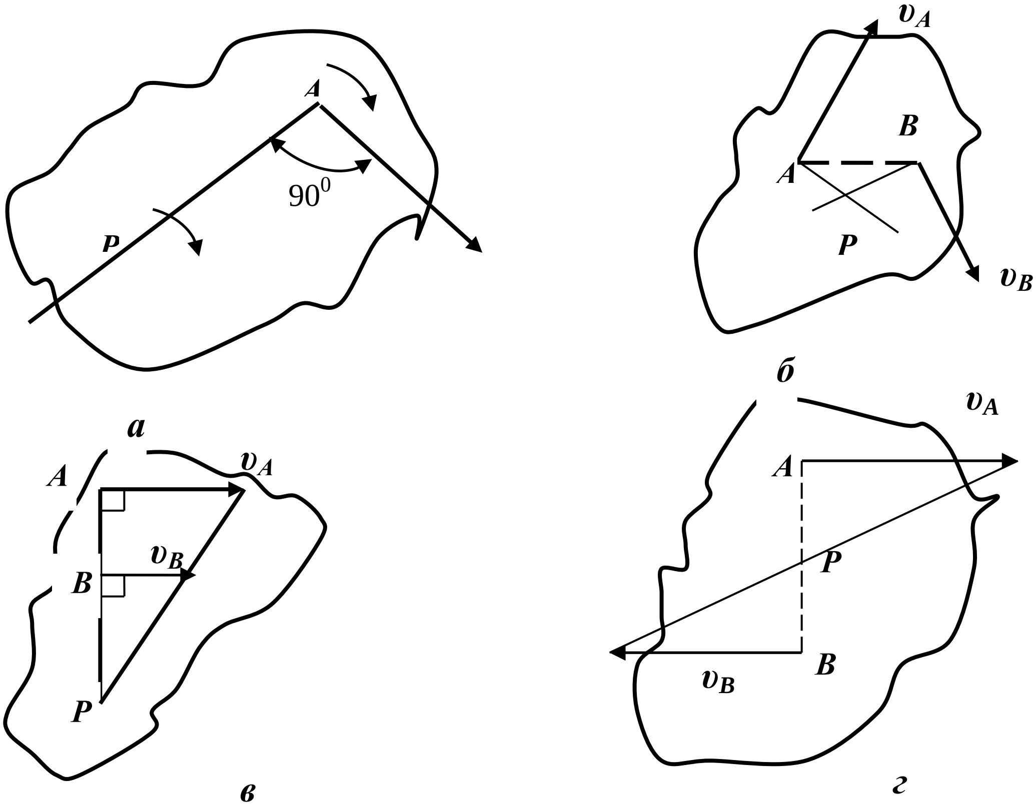


Рисунок 6.2

Рассмотрим способы определения положения мгновенного центра скоростей (рисунок 6.2, *а–г*).

1. Задана скорость точки A тела и угловая скорость вращения его ω (рисунок 6.2, *а*). В этом случае мгновенный центр лежит на линии, перпендикулярной к вектору скорости $\vec{\upsilon}_{\text{A}}$, на расстоянии AP, равном

$$AP = \frac{\upsilon_{\text{A}}}{\omega},$$

и расположенном так, чтобы направление вектора скорости $\vec{\upsilon}_{\text{A}}$ совпадало с направлением вращения тела вокруг мгновенного центра.

2. Известны векторы скоростей $\vec{\upsilon}_{\text{A}}$ и $\vec{\upsilon}_{\text{B}}$ точек A и B тела, и расстояние между точками AB (рисунок 6.2, *б*). В этом случае мгновенный центр скоростей P находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к линиям векторов $\vec{\upsilon}_{\text{A}}$ и $\vec{\upsilon}_{\text{B}}$.

Расстояния AP к BP определяются либо из графического построения, либо аналитически, используя условия задачи.

3. В том случае, когда векторы скоростей $\vec{\upsilon}_{\text{A}}$ и $\vec{\upsilon}_{\text{B}}$ параллельны друг другу и равны (рисунок 6.2, *в*, *г*), тело движется поступательно. Угловая скорость равна нулю и скорости всех точек одинаковы.

Если же векторы скоростей $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_B$ по величине не равны, то они должны быть перпендикулярны к линии *AB*, соединяющей точки *A* и *B*, так как в противном случае проекции их на эту линию не будут равны, что противоречит известной теореме.

Мгновенный центр скоростей в этом случае лежит на пересечении линии, соединяющей точки *A* и *B* и линии, соединяющей концы векторов скоростей $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_B$, следовательно, положение его может быть определено из подобия треугольников *PAD* и *PBC*.

6.4. Примеры решения задач

Задача № 1

Блок *A* (рисунок 6.3) подвешен на канате, правый конец которого закреплен, а левый, ему параллельный, движется со скоростью $\upsilon = 10\ см/сек$. Диаметр блока равен $2r = 25 см$. Определить скорость центра *O* блока А, его угловую скорость вращения, а также найти неподвижную и подвижную центроиды блока. Диаметром каната пренебречь.

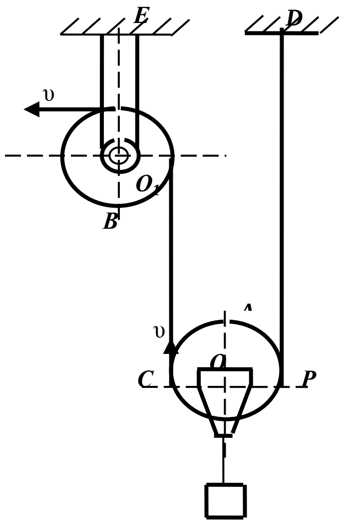


Рисунок 6.3

Дано:

$\upsilon = 10\ см/сек,$

$2r = 25 см.$

Найти:

υ –? ω –?

Решение.

Скорость точки *C* блока *A* равна скорости левого конца каната и направлена вертикально вверх. Скорость правого конца каната равна нулю, так как этот конец неподвижен, следовательно, скорость точки *P* касания блока и каната в каждый момент времени равна нулю. Поэтому точка *P* является в данный момент мгновенным центром скоростей блока.

Скорость υ_C точки *C* блока известна, поэтому можно определить угловую скорость вращения блока вокруг мгновенного центра *P* по формуле

$$\upsilon_C = 2r\omega.$$

откуда угловая скорость

$$\omega = \frac{\upsilon_C}{2r} = \frac{10}{25} = 0,4\ сек^{-1}.$$

Определив угловую скорость, можно определить скорость любой точки блока, если будет задано ее расстояние от мгновенного центра скоростей *P*.

В частности, скорость центра *O* блока *A*

$$\upsilon_O = \omega r = 0,4 \cdot 12,5 = 5,\ см/сек.$$

Неподвижной центроидой блока, представляющей геометрическое место мгновенных центров скоростей, связанных с неподвижной плоскостью (неподвижной системой), является вертикальная прямая линия, совпадающая с осью правого конца каната.

Подвижная центроида представляет окружность, радиус которой равен радиусу блока.

Задача № 2

Определить величину и направление скорости $\vec{\upsilon}_O$ оси блока (рисунок 6.4, а, б), если правый конец каната BB_1 перемещается вертикально вниз со скоростью $\upsilon_B = 8\ см/сек$, а левый CC_1 – параллельно ему вверх со скоростью $\upsilon_C = 20\ см/сек$. Радиус блока $r = 16\ см$. Найти также неподвижную и подвижную центроиды.

Дано:

$\upsilon_B = 8\ см/сек,$

$\upsilon_C = 20\ см/сек,$

$r = 16\ см.$

Найти:

$\vec{\upsilon}_O.$

Решение.

Скорости точек *B* и *C* блока направлены параллельно, но в разные стороны. Определим положение мгновенного центра вращения блока. Для этого соединим прямой линией концы векторов скоростей в точках *B* и *C*. Точка *P* пересечения этой линии с горизонтальным диаметром *CB* блока является мгновенным центром скоростей.

Скорости всех точек прямой *CP* направлены вверх, скорости всех точек прямой *PB* – вниз (рисунок 6.4, б).

Расстояние *OP* центра блока *O* до мгновенного центра скоростей *P* и угловую скорость блока можно определить из следующих двух равенств:

$$\upsilon_B = \left(r - OP\right)\cdot\omega, \tag{6.5}$$

$$\upsilon_C = \left(r + OP\right)\cdot\omega, \tag{6.6}$$

где υ_B – скорость точки *B*; υ_C – скорость точки *C*.

Разделив равенство (6.5) на равенство (6.6) и подставив числовые значения, получим:

$$\frac{\upsilon_B}{\upsilon_C} = \frac{r - OP}{r + OP}$$

или

$$\frac{8}{20} = \frac{16 - OP}{16 + OP},$$

откуда ОР = 7 см.

Угловую скорость получим из равенства (6.5):

$$\upsilon_{\text{B}} = \left(r - OP\right) \cdot \omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{\upsilon_{\text{B}}}{r - OP} = \frac{8}{16 - 7} = \frac{8}{9}\ сек^{-1}.$$

Мгновенный центр скоростей перемещается вертикально вверх по прямой линии, поэтому неподвижной центроидой является вертикальная прямая, отстоящая от оси О блока на расстояние ОР = 7 см.

Подвижной центроидой будет окружность радиусом $R = OP = 7$ см (рисунок 6.4, б).

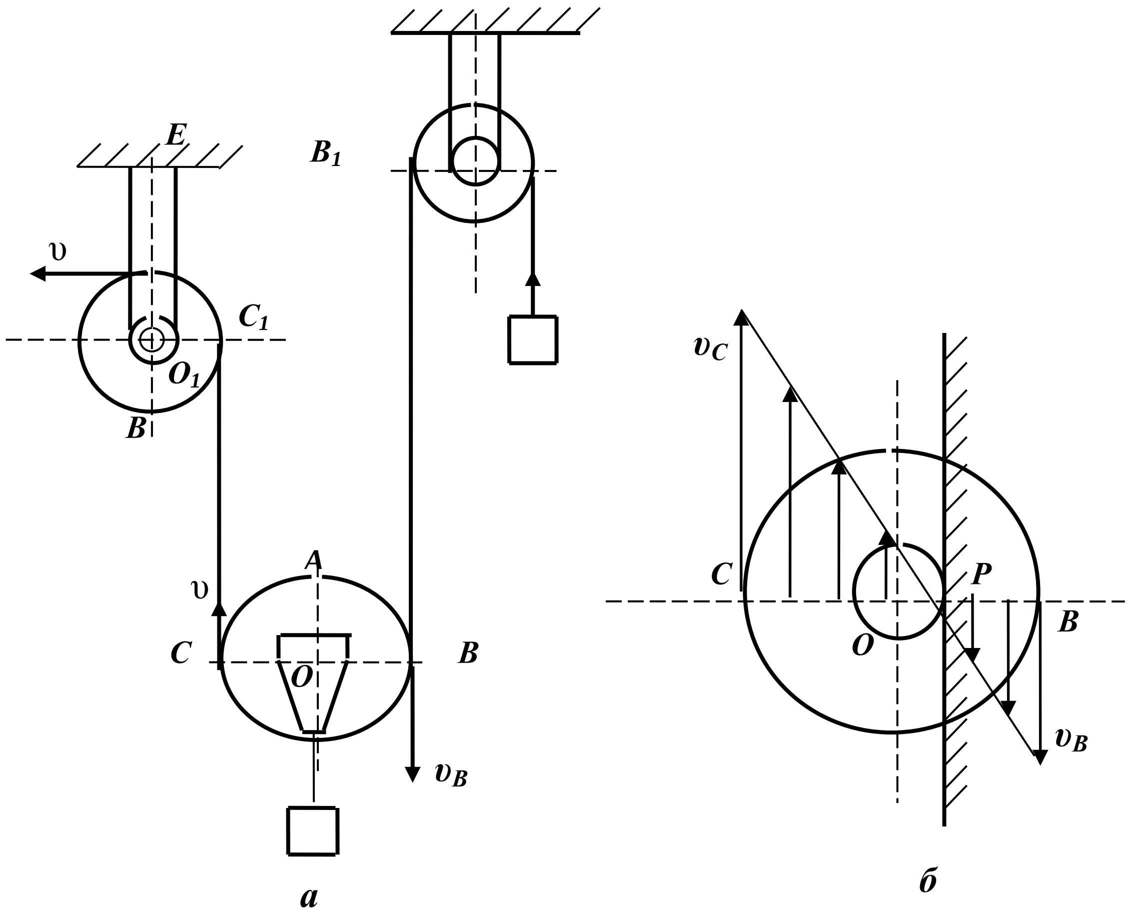


Рисунок 6.4

Задача № 3

Найти скорость ползуна *B* кривошипного механизма (рисунок 6.5) при горизонтальном и вертикальном положениях кривошипа, если последний вращается с угловой скоростью $\omega = 2{,}5\ сек^{-1}$ против хода часовой стрелки. Радиус кривошипа $r = 32\ см$, длина шатуна $l = 160\ см$, размер $h = 15\ см$.

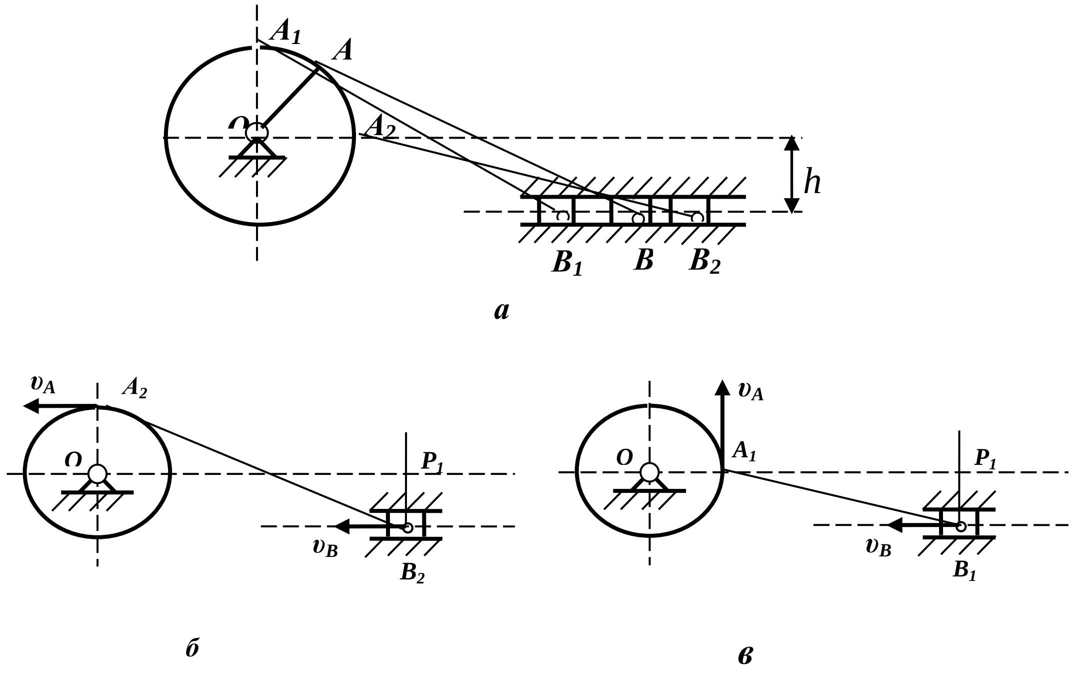


Рисунок 6.5

Дано:

$\omega = 2{,}5\ сек^{-1}$,

$r = 32\ см$,

$h = 15\ см$,

$l = 160\ см$.

Найти: υ –?

Решение.

Для решения этой задачи используем мгновенные центры скоростей. При горизонтальном положении кривошипа (рисунок 6.5, *в*) скорость точки *A* направлена вертикально вверх и равна:

$$\upsilon_{\text{A}} = \omega r = 2{,}5 \cdot 32 = 80,\ см/сек.$$

Скорость ползуна *B* в этот момент направлена по горизонтальной прямой вдоль направляющих ползуна. Найдем положение мгновенного центра скоростей для этого положения шатуна.

Мгновенный центр лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных в точках *A* и *B* к линиям векторов скоростей $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_B$. Как видно на рисунке 6.5 в, положение точки пересечения этих перпендикуляров P_1 может быть определено из прямоугольного треугольника $A_1P_1B_1$.

Расстояние $P_1B_1 = h = 15\ см$, а расстояние

$$P_1A_1 = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{160^2 - 15^2} = 159{,}3\ \text{см/сек}.$$

Скорость точек шатуна прямо пропорционально их расстояниям от мгновенного центра скоростей, поэтому

$$\upsilon_B = \upsilon_A \frac{P_1B_1}{P_1A_1} = 80 \cdot \frac{15}{159,3} = 7.5 \ см/сек.$$

Скорость ползуна B_2 в вертикальном положении кривошипа (рисунок 6.5, *б*) параллельна скорости точки A_2 кривошипа. Мгновенный центр лежит в бесконечности, т. е. в данный момент скорости точек одинаковы по величине и направлению и равны

$$\upsilon_B = \upsilon_A = 80 \ см/сек.$$

Задача№ 4

В грохоте, служащем для сортировки руды, кривошип O_1A вращается равномерно вокруг оси O_1, делая 60 об/мин (рисунок 6.6, *а*).

Посредством вилки *AB* он передает движение кривошипу O_2B, вращающемуся вокруг оси O_2. Определить линейную скорость точки *B* для трех положений механизма, когда: 1) точка *A* занимает положение на продолжении линии центров O_1O_2 слева; 2) параллельна линии центров; 3) точка *B* находится на продолжении линии центров справа. Если известно $O_1A = O_2B = AB = 10$ *см;*

$$O_1O_2 = 4 \ см.$$

Дано:

$O_1A = O_2B = AB = 10$ *см;*

$O_1O_2 = 4$ *см.*

Найти: υ –?

Решение.

Задачу можно решить, определив мгновенные центры скоростей вилки *AB* для всех трех положений механизма. В первом положении (рисунок 6.6, *б*) мгновенный центр скоростей вилки P_1 лежит на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей в точке *A* и *B*, а именно, в точке O_2.

Поэтому можно написать отношение

$$\frac{\upsilon_{1B}}{\upsilon_A} = \frac{O_2B}{O_1A},$$

откуда получим:

$$\upsilon_{1B} = \upsilon_A \frac{O_2B}{O_1A}.$$

Так как скорость точки *A* равна

$$\upsilon_A = \frac{\pi r n}{30} = \frac{3,14 \cdot 10 \cdot 60}{30} = 62,8, \text{ м/сек},$$

то

$$\upsilon_{1B} = 62,8 \cdot \frac{10}{14} = 44,9, \text{ м/сек.}$$

Для второго положения механизма (рисунок 6.6, *в*) мгновенный центр скоростей вилки *AB (P)* расположен на одинаковом расстоянии от точек *A* и *B*, поэтому скорость точки *B* равна скорости точки *A*.

$$\upsilon_{2\text{B}} = \upsilon_{\text{A}} = 62,8, \ м/сек.$$

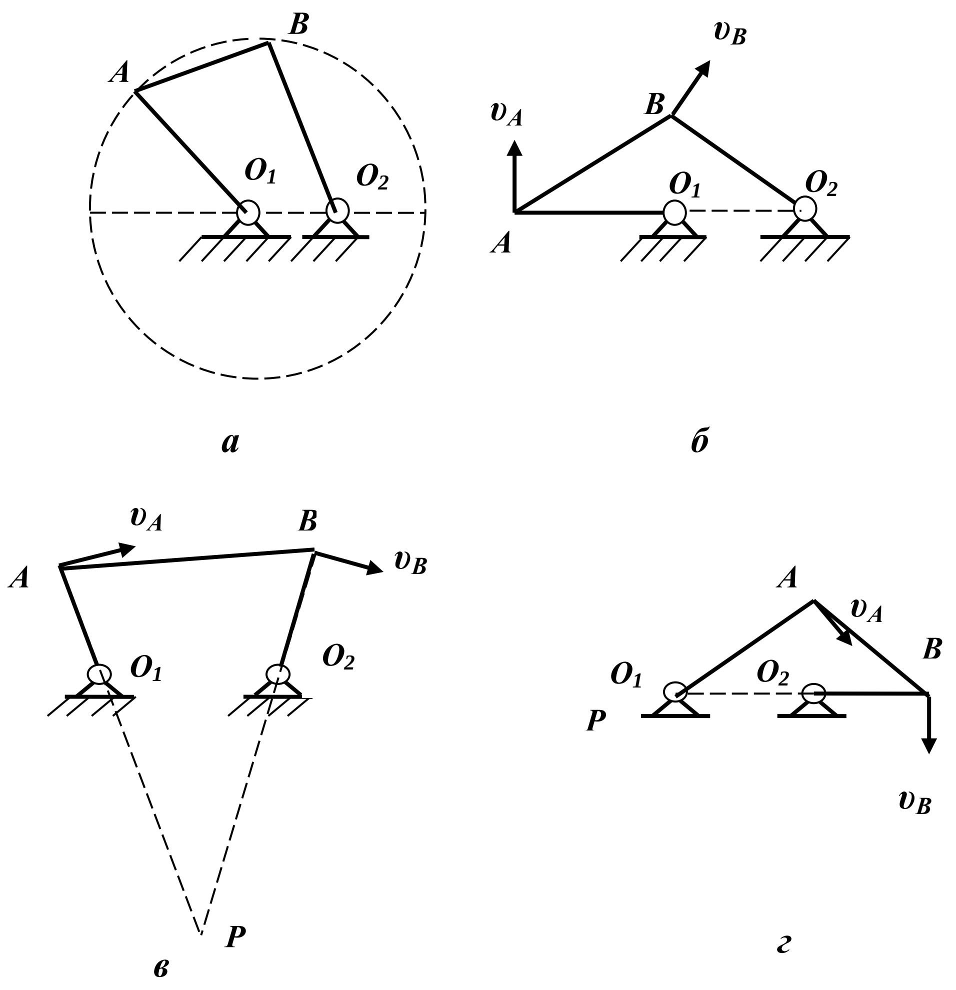


Рисунок 6.6

Для третьего положения механизма мгновенный центр скоростей вилки *AB (P)* совпадает с точкой O_1 (рисунок 6.6, *г*).

Скорость точки *B* определим из соотношения

$$\frac{\upsilon_{3\text{B}}}{\upsilon_{\text{A}}} = \frac{O_1B}{O_1A},$$

откуда

$$\upsilon_{3\text{B}} = \upsilon_{\text{A}} \cdot \frac{O_1B}{O_1A} = 62{,}8 \cdot \frac{14}{10} = 80 \ \text{м/сек}.$$

Задача № 5

Качающаяся вокруг центра *A* подвижная щека *AB* дробилки длиной 60 см приводится в движение кривошипом *OE* длиной 10 см, выполняющим n = 100 об/мин посредством системы рычагов *BC*, *CD* и *CE*, каждый длиной 40 см (рисунок 6.7). Найти угловую скорость щеки *AB* при положении механизма, указанном на чертеже.

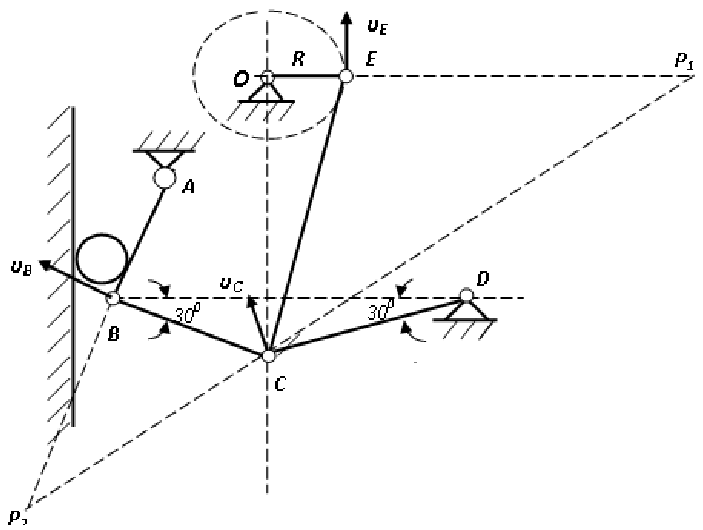


Рисунок 6.7

Дано:

AB = 60 см,

OE = 10 см,

n = 100 об/мин,

BC = CD = CE = 40 см.

Найти:

AB –?

Решение.

Для определения угловой скорости звена механизма щеки *AB* определим скорость точек *C* и *B* (звена *BC*). Зная скорость точки *B* (υ_{B}), определим угловую скорость звена *AB* по формуле

$$\omega_{\text{AB}} = \frac{\upsilon_{\text{B}}}{l_{\text{AB}}},$$

где l_{AB} – длина звена *AB*.

Скорость точки *C* определим, воспользовавшись мгновенным центром скоростей P_1 звена *CE*, который лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям в точках *C* и *E*.

Вычислим расстояния P_1C и P_1E точек *C* и *E* от мгновенного центра скоростей P_1, рассмотрев ΔP_1OC.

Как видно из треугольника, расстояние *OC* равно

$$OC = 80 + 40 \sin 30° = 100 \text{ см.}$$

Расстояние P_1C:

$$P_1C = \frac{OC}{\sin^0} = \frac{100}{0,5} = 200 \text{ } см.$$

Расстояние P_1O:

$$P_1O = P_1C \cos 30^0 = 200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 173 \text{ } см.$$

Расстояние P_1E получим из равенства:

$$P_1E = P_1O - EO = 173 - 10 = 163 \text{ } см.$$

Скорость точки E (υ_E) получим по формуле:

$$\upsilon_E = \frac{\pi rn}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 10 \cdot 100}{30} = 104{,}6 \ \textit{см/сек}.$$

Скорость точки C (υ_C) получим из равенства:

$$\upsilon_C = \upsilon_E \frac{P_1C}{P_1E} = 104{,}6 \cdot \frac{200}{163} = 128{,}6 \ \textit{см/сек}.$$

Найдем мгновенный центр скоростей P_2 звена BC.

Как видно на рисунке, расстояния P_2C и P_2B могут быть вычислены из ΔP_2BC, а именно:

$$P_2C = \frac{BC}{\cos 60^0} = \frac{40}{0.5} = 80 \ \textit{см},$$

$$P_2B = P_2C \cdot \cos 30^0 = 80 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 69.2 \ \textit{см}.$$

Скорость точки B υ_B получим из равенства:

$$\upsilon_\text{В} = \upsilon_C \cdot \frac{P_2B}{P_2C} = 128.6 \cdot \frac{69.2}{80} = 111.1 \ \textit{см/сек}.$$

Угловую скорость звена AB $(\omega_\text{АВ})$ получим по формуле:

$$\omega_\text{АВ} = \frac{\upsilon_\text{В}}{l_\text{АВ}} = \frac{111.1}{60} = 1.852 \ 1/\textit{сек}.$$

Глава 7

МГНОВЕННЫЕ ЦЕНТРЫ УСКОРЕНИЙ

7.1. Определение ускорений точек тела при помощи мгновенного центра ускорений

Мгновенным центром ускорений плоской фигуры называется та точка этой фигуры, ускорение которой в данный момент равно нулю.

При помощи мгновенного центра ускорений *C* можно определить вектор полного ускорения любой точки плоской фигуры в данный момент времени, если угловая скорость ω и угловое ускорение ε фигуры в рассматриваемый момент времени известны.

Так, величина вектора ускорения какой-либо точки *A* фигуры, отстоящей на расстоянии *AK* от мгновенного центра ускорений *K* (рисунок 7.1), равна

$$a_{\text{A}} = AK\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

а угол μ, составляемый вектором $\vec{a}_{\text{A}}$ с линией *AK*, равен

$$tg\,\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

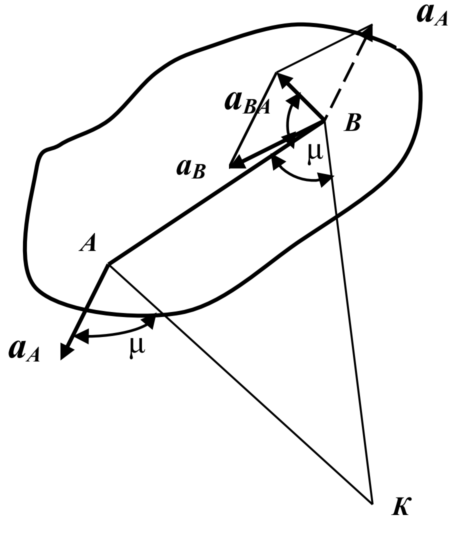


Рисунок 7.1

Следовательно, ускорения любых точек фигуры пропорциональны расстояниям точек от центра ускорений и составляют одинаковый угол μ с линией, соединяющей точку с центром ускорений.

7.2. Методические указания к решению задач

Определить положение мгновенного центра ускорений можно различными способами в зависимости от условий задачи. Эти условия могут быть следующими:

1. Заданы уравнения движения плоской фигуры: $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $\phi = f_3(t)$, тогда проекции вектора ускорения любой ее точки на оси неподвижной системы координат *xOy* определяются из равенств:

$$a_x = a_{O_{1x}} - \varepsilon\left(y - y_{O_1}\right) - \omega^2\left(x - x_{O_1}\right), \tag{7.1}$$

$$a_y = a_{O_{1y}} + \varepsilon\left(x - y_{O_1}\right) - \omega^2\left(y - y_{O_1}\right). \tag{7.2}$$

Ускорение мгновенного центра ускорений равно нулю, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{7.3}$$

На основании этого, из уравнений (7.1) и (7.2) можно определить координаты мгновенного центра ускорений x, y, которые обозначим через x_K и y_K:

$$x_K = x_{O_1} + \frac{a_{O_{1x}}\omega^2 - a_{O_{1y}}\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^4}, \tag{7.4}$$

$$y_K = y_{O_1} + \frac{a_{O_{1x^2}}\varepsilon + a_{O_{1y}}\omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{7.5}$$

2. Заданы: вектор ускорения какой-либо точки фигуры, величины и направления угловой скорости ω и углового ускорения ε.

В этом случае мгновенный центр ускорений лежит на прямой, проведенной под углом μ к вектору ускорения $\vec{a}_{\text{A}}$. Угол μ определяется по формуле

$$tg\,\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2},$$

и откладывается от линии вектора $\vec{a}_{\text{A}}$ по направлению углового ускорения ε.

Расстояние AK мгновенного центра ускорений от точки A равно

$$AK = \frac{w_{\text{A}}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

3. Заданы векторы ускорений двух точек фигуры $\vec{a}_{\text{A}}$ и $\vec{a}_{\text{B}}$ и расстояние между ними. В этом случае необходимо определить не только положение мгновенного центра ускорений, но и величины, и направления угловой скорости ω, и углового ускорения ε фигуры.

Положение мгновенного центра ускорений можно определить графическим путем, выбрав соответствующие масштабы для ускорений и длин. Однако во многих случаях такие задачи решаются графо-аналитическим способом, т. е. графические построения проводят не в масштабе, а требуемые величины определяют аналитически.

Заданные векторы ускорений связаны между собой равенством

$$\vec{a}_{\text{B}} = \vec{a}_{\text{B}} + \vec{a}_{\text{BA}}.$$

Если точку A (рисунок 7.1) принять за полюс, тогда вектор относительного ускорения точки В относительно А будет равен

$$\vec{a}_{\text{BA}} = \vec{a}_{\text{B}} + \left(-\vec{a}_{\text{A}}\right).$$

Угол вектора $\vec{a}_{\text{BA}}$ и линии AB зависит лишь от величин угловой скорости и ускорения фигуры

$$tg\,\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

и, как показывает формула, равен углу, который составляет вектор ускорения любой точки фигуры с линией, соединяющей ее с мгновенным центром ускорений.

Построив вектор относительной скорости $\vec{a}_{\text{ВА}}$ можно определить этот угол. Затем, отложив от векторов $\vec{a}_{\text{А}}$ и $\vec{a}_{\text{В}}$ углы μ в одном направлении (против хода часовой стрелки), получим на пересечении линий, проведенных под этими углами, мгновенный центр ускорений *К*.

7.3. Примеры решения задач

Задача № 1

Линейка эллипсографа *АВ* длиной $2l = 40$ см приводится в движение кривошипом *ОС*, вращающимся с постоянной угловой скоростью $\omega = 2{,}5\ 1/сек$; $AC = BC = l$ (рисунок 7.2). Найти мгновенный центр ускорений и ускорения точек *А* и *В* линейки в момент, когда $\angle ABO = 30^0$.

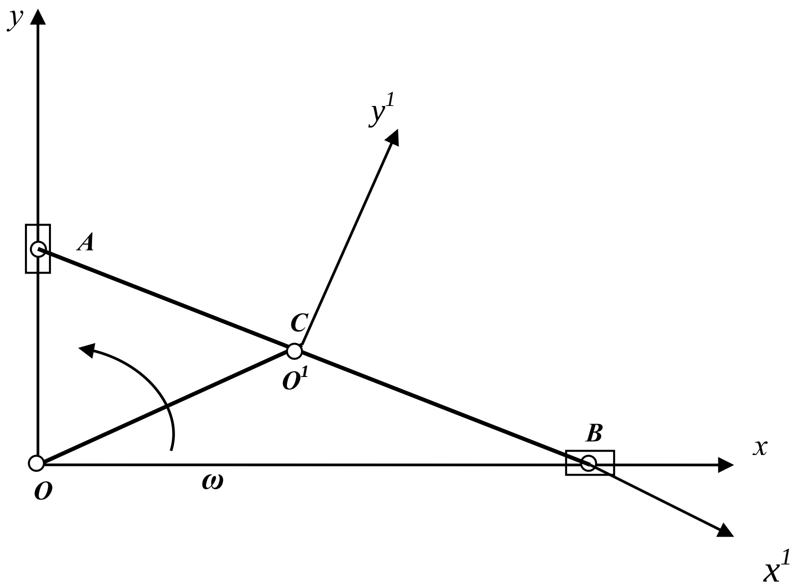


Рисунок 7.2

Дано:

$2l = 40$ см,

$\omega = 2{,}5\ сек^{-1}$; $AC = BC = l,$

$\angle ABO = 30^0.$

Найти: $\varepsilon_{a,в} - ?$

Решение.

Положение мгновенного центра ускорений определим аналитически. Выберем неподвижную *xOy* и подвижную $x'O'y'$ системы координат.

Координаты мгновенного центра ускорений согласно формулам, равны:

$$x_K = x_{O'} + \frac{a_{O'x}\omega^2 - a_{O'y}\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^4}; \tag{7.6}$$

$$y_K = y_{O'} + \frac{a_{O'}\varepsilon + a_{O'y}\omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4}; \tag{7.7}$$

Координаты $x_{O'}$, $y_{O'}$ начала подвижной системы координат (точка C) равны:

$$x_{O'} = l\cos\phi; \qquad (7.8)$$
$$y_{O'} = l\sin\phi.$$

Ускорение точки C по величине равно

$$a_C = \omega^2 l = 2{,}5^2 \cdot 20 = 125, \ \ см/сек$$

и направлено по радиусу к центру O.

Проекции этого ускорения на оси Ox и Oy равны:

$$a_{O'_x} = -a_C \cos\phi;$$
$$a_{O'_y} = -a_C \sin\phi.$$

Угловое ускорение ε по условию равно нулю

$$\varepsilon = 0.$$

После подстановки полученных выражений в уравнения координат (7.6) и (7.7), получим:

$$x_K = l\cos\phi - \frac{\omega^2 l\omega^2}{\omega^4}\cos\phi = 0;$$
$$y_K = l\sin\phi - \frac{\omega^2 l\omega^2 \cdot \sin\phi}{\omega^4} = 0.$$

Ускорения точек A и B определяем по формуле:

$$a_A = AK\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Следовательно,

$$a_A = 2l\sin 30^0\sqrt{0 + \omega^4} = l\omega^2 = 20 \cdot 2{,}5^2 = 125 \ см/сек^2$$

и направлены к центру O.

Задача № 2

Найти мгновенный центр, угловую скорость и угловое ускорение плоской фигуры (рисунок 7.3), если для данного момента времени ускорение точки A (a_A) = 15 *см/сек*^{2} и ускорение точки В (a_B) = 10 *см/сек*^{2}, причем векторы ускорений $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$ перпендикулярны к отрезку AB и направлены в одну сторону; $AB = l = 10$ *см*.

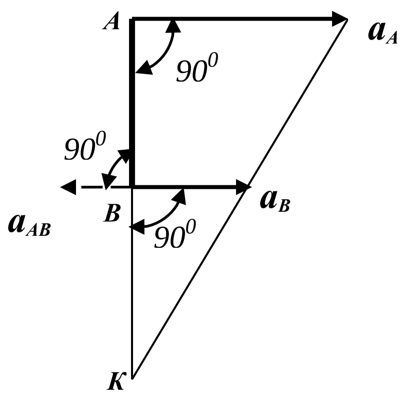


Рисунок 7.3

Дано:
(αA) = 15 см/сек^2,
(αB) = 10 см/сек^2,
AB = l = 10 см.

Найти:
ω –? ε –?

Решение.

Вектор относительного ускорения $\vec{a}_{\text{BA}}$ равен

$$\vec{a}_{\text{BA}} = \vec{a}_{\text{B}} + \left(\vec{a}_{\text{A}}\right)$$

или

$$a_{\text{BA}} = 10 - 15 = -5 \ см/сек,$$

т. е. направлен влево и составляет с линией АВ угол μ = 90^0. Следовательно,

$$tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = \infty.$$

Из этого следует, что угловая скорость плоской фигуры ω = 0.

Ускорения $\vec{a}_{\text{A}}$ и $\vec{a}_{\text{B}}$ являются касательными ускорениями и мгновенный центр К лежит на пересечении линии, проходящей через концы этих векторов, с продолжением линии *AB*.

Из подобия треугольников определяем положение точки *K:*

$$\frac{BK}{AK} = \frac{a_B}{a_A},$$

или

$$\frac{BK}{AB + BK} = \frac{a_B}{a_A},$$

откуда:

$$BK = \frac{\frac{a_B}{a_A} l}{1 - \frac{a_B}{a_A}} = \frac{\frac{10}{15} \cdot 10}{1 - \frac{10}{15}} = 20 \text{ см},$$

$$AK = BK + l = 30 \ см.$$

Угловое ускорение ε получим и формулы

$$a_A = AK \cdot \varepsilon,$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{a_A}{AK} = \frac{15}{30} = 0{,}5 \ {}^{1}\!/_{сек^2}.$$

Глава 8

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

8.1. Основные положения и аксиомы

Часть теоретической механики, в которой изучается механическое движение материальных тел в связи с воздействием окружающей среды, определяющим это движение, называется динамикой.

Динамика изучает систему тех основных положений теоретической механики, которые объединяют кинематические свойства движений со свойствами сил, действием которых они обусловлены.

Динамика делится на две части: динамику материальной точки и динамику системы материальных точек.

В основе динамики лежат аксиомы, полученные в результате непосредственных наблюдений над механическими движениями материальных тел и последовательного абстрагирования наблюдаемых явлений.

Одним из таких абстрактных понятий в динамике является понятие об изолированной материальной точке.

Изолированной материальной точкой называется точка, которая перемещается в пространстве и времени, исключая воздействие на нее окружающей среды.

Аксиома 1. Изолированная материальная точка сохраняет состояние равномерного и прямолинейного движения или находится в состоянии покоя относительно системы координат, которая сама движется поступательно, равномерно и прямолинейно.

Из этой аксиомы следует, что изменение скорости движущейся точки может происходить лишь при воздействии на нее окружающей среды – сил.

Эта аксиома, установленная в результате многочисленных наблюдений над механическим движением и анализа особенностей этого движения, называется также первым основным законом механики или законом инерции.

Системы координат, в которых имеет место закон инерции, называются инерциальными.

В классической механике основной инерциальной системой обычно считают гелиоцентрическую систему координат с началом в центре солнца и осями направленными к трем звездам.

Аксиома 2. Ускорение, сообщаемое материальной точке приложенной к ней силой, пропорционально величине силы и имеет направление силы

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \cdot \bar{F},$$

где $\vec{a}$ – вектор ускорения; m – масса точки; F – вектор силы. Обычно это равенство записывается как

$$m \cdot \vec{a} = \bar{F}, \tag{8.1}$$

и называется иногда вторым законом динамики.

Аксиома 3. Всякому действию всегда соответствует равное и противоположно направленное противодействие, т. е. действия двух тел одного на другое всегда равны и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

В разделе «Динамика материальной точки» рассматриваются задачи двух типов. К первому типу относятся задачи, в которых по заданному закону движения материальной точки и ее массе определяют силу, действующую на точку. Задачи этого типа иначе называют прямыми задачами динамики.

Ко второму типу относятся задачи, в которых задаются силы, действующие на материальную точку, и ее масса, и требуется определить закон движения точки. Задачи этого типа называют обратными задачами динамики.

8.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Определение сил по заданному закону движения. Силы по заданному закону движения материальной точки определяют на основании второго закона динамики.

Если закон движения точки задан натуральным или координатным способом, то можно определить величину ускорения $\vec{a}$ точки, а затем, применив уравнение (8.1), определить силу $\bar{F}$.

Проектируя обе части уравнения (8.1) на касательную к траектории и на нормаль к ней, получим при натуральном способе задания движения следующие уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} ma_\tau &= F_\tau \\ ma_n &= F_n \end{aligned}\right\}, \tag{8.2}$$

или

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F_\tau \qquad m\frac{\upsilon^2}{\rho} = F_n, \tag{8.3}$$

где m – масса точки; ρ – радиус кривизны траектории.

Если закон движения точки задан координатным способом, то, зная массу точки, и определив проекции ускорения на оси координат, можно на основании второго закона динамики определить проекции силы на соответствующие оси из уравнений:

$$m\ddot{x} = \mathrm{X}; \tag{8.4}$$

$$m\ddot{y} = \mathrm{Y}; \tag{8.5}$$

$$m\ddot{z} = \mathrm{Z}. \tag{8.6}$$

При рассмотрении движения несвободной материальной точки связи, наложенные на точку, заменяются силами – реакциями связей. Для решения задач на несвободное движение точки часто используют «петербургский принцип», который формулируется так: при движении материальной точки активные силы, действующие на точку, реакции связей и силы инерции уравновешиваются.

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{F}_u = 0\ , \tag{8.7}$$

где $\bar{F}$ – вектор равнодействующей активных сил; $\bar{R}$ – вектор геометрической суммы реакций; $\bar{F}_u$ – вектор силы инерции.

Это векторное равенство может быть использовано для решения задач как в случае задания движения материальной точки натуральным способом, так и в случае задания движения координатным способом.

Рассмотрим примеры решения задач первого типа (прямые задачи динамики).

8.3. Примеры решения задач

Задача № 1

Автомобиль (рисунок 8.1) с грузом весит *Q = 5400 кг* и движется по выпуклому мосту со скоростью υ = 10 *м/сек*, радиус кривизны в средине моста ρ = 50 *м*.

Определить давление автомобиля на мост в момент прохождения его через средину моста.

Дано:

Q = 5400 кг,

υ = 10 м/сек,

ρ = 50 м.

Найти: N –?

Решение.

Определим силы, действующие на автомобиль.

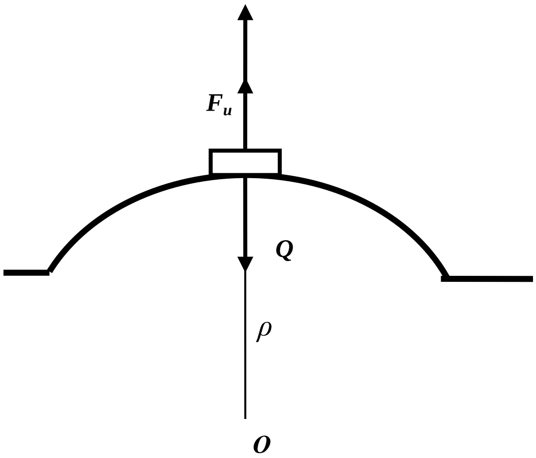


Рисунок 8.1

Нормальная реакция связи $\bar{R}$ направлена вверх и по величине равна давлению N автомобиля на мост. Сила веса Q автомобиля направлена вниз; Мысленно присоединим к автомобилю силу инерции $\bar{F}_u$, направим ее вверх, так как ускорение автомобиля направлено к центру закругления моста.

Из уравнения равновесия следует

$$R = Q - F_u,$$

так как

$$F_u = \frac{m\upsilon^2}{\rho},$$

то

$$R = N = Q\left(1 - \frac{\upsilon^2}{\rho g}\right).$$

Подставив численные значения в уравнение, получим:

$$N = 5400\left(1 - \frac{10^2}{9,8 \cdot 50}\right) = 4298\,кг.$$

Задача № 2

Кузов трамвайного вагона (рисунок 8.2, а, б) вместе с нагрузкой весит Q_1 = 10 *т*; тележка с колесами весит Q_2 = l *т*. Определить наибольшее и наименьшее давление вагона на рельсы горизонтального прямолинейного участка пути, если вагон на ходу совершает на рессорах вертикальные гармонические колебания по закону $x = 2\sin\cdot 10t$ *см*.

Дано:

Q_1 = 10 т;

Q_2 = l т.

Найти:

N_1 –? и N_2 –?

Решение.

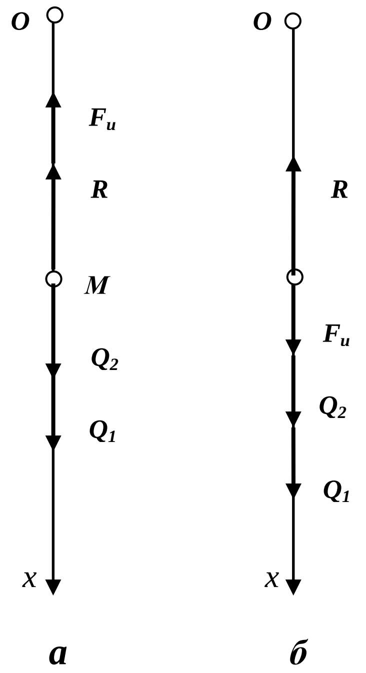


Рисунок 8.2

Кузов вместе с тележкой рассматриваем как материальную точку М, движущуюся под действием сил: собственного веса $Q_1 + Q_2$; реакции рельс, направленной по вертикали вверх.

Заметив, что указанная точка М движется с ускорением

$$a = \ddot{x} = -200\sin 10t$$

(ось Ox направлена по вертикали вниз), вычислим максимальное значение силы инерции:

$$F_u = \frac{Q_1}{g} a = 0,0102 \cdot 200 = 2,04 \ т.$$

Во время колебательного движения точки M направления вектора ускорения периодически изменяются, поэтому силы инерции имеют направление, показанное на рисунке 8.2, а, б.

Присоединив мысленно к точке *M* указанные силы инерции, на основании принципа равновесия, находим:

$$\bar{F}_и + \bar{R} + \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 = 0.$$

Давление на рельсы для случая (а) равно

$$N_1 = Q_1 + Q_2 + F_и = 11 - 2,04 = 8,96\,т,$$

а для случая (б):

$$N_2 = Q_1 + Q_2 + F_и = 13,64\,т.$$

Задача № 3

Шарик массой 1 *г* (рисунок 8.3) падает под действием силы тяжести и испытывает при этом сопротивление воздуха так, что движение его выражается уравнением $x = 490t - 245\left(1 - e^{-2}\right)$, где x – в см; t – в сек; ось *Ox* направлена по вертикали вниз. Определить в динах силу R сопротивления воздуха, испытываемого шариком, в зависимости от его скорости υ, приняв g = 980 см/сек^2.

Дано:

m = 1 г,

$x = 490t - 245\left(1 - e^{-2}\right)$,

g = 980 см/сек^2.

Найти:

R = R(υ) –?

Решение.

На движущуюся точку М действуют сила тяжести $\bar{P}$ и сила сопротивления среды $\vec{R}$; направления их указаны на рисунке 8.3.

Прямая задача динамики решается на основании уравнения (8.3), составив которое, получим:

$$m\ddot{x} = P - R\ . \qquad (8.8)$$

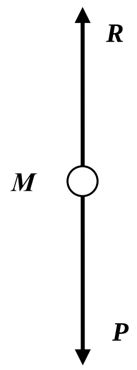


Рисунок 8.3

Ускорение движения:

$$\ddot{x} = -980e^{-21}, \tag{8.9}$$

причем

$$\dot{x} = \upsilon = 490\left(1 + e^{-21}\right). \tag{8.10}$$

Из уравнения (8.8)

$$R = 980\left(1 + e^{-21}\right).$$

Принимая во внимание уравнение (8.10), выразим силу сопротивления R через скорость

$$R = 2\upsilon.$$

Задача № 4

Точка массой m (рисунок 8.4) движется по эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$ ускорение точки параллельно оси Oy. При $t = 0$ координаты точки $x = 0$; $y = b$, начальная скорость υ_0. Определить силу, действующую на точку в каждой точке траектории.

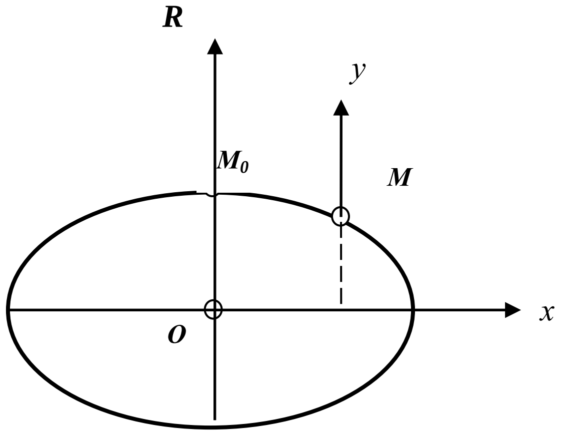


Рисунок 8.4

Дано:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$

t = 0;

x = 0; y = b;

υ_0

Найти:

F –?

Решение.

Проектируя вектор ускорения движущейся точки M на координатную ось Ox, найдем:

$$\ddot{x} = 0 \ . \tag{8.11}$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим:

$$x = C_1 t + C_2 \ , \tag{8.12}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

Принимая во внимание начальные условия движения:

$$t = 0; \ \ \dot{x}_0 = \upsilon_0; \ \ x_0 = 0 \tag{8.13}$$

определим величины C_1 и C_2:

$$C_1 = \upsilon_0; \qquad C_2 = 0; \tag{8.13'}$$

в силу чего

$$x = \upsilon_0 t \ . \tag{8.14}$$

Для определения величины ускорения движения точки M продифференцируем дважды по времени t уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{8.15}$$

Дифференцируя первый раз, получим:

$$\frac{2x}{a^2} \cdot \dot{x} + \frac{2y}{b^2} \cdot \dot{y} = 0.$$

Дифференцируя второй раз, имеем:

$$\frac{2x}{a^2} x \cdot \ddot{x} + \frac{2}{a^2} \dot{x} \cdot \dot{x} + \frac{2}{b^2} y \cdot \ddot{y} + \frac{2}{b^2} \dot{y} \cdot \dot{y} = 0;$$

или

$$\dot{y}^2 + y\ddot{y} = -\frac{b^2}{a^2}\left(\dot{x}^2 + x \cdot \ddot{x}\right). \tag{8.16}$$

Принимая во внимание что на основании уравнений (8.14) и (8.15)

$$y = b\sqrt{1 - \left(\frac{\upsilon_0}{a}\right)^2 \cdot t^2} \ , \tag{8.17}$$

после дифференцирования уравнения (8.17) по времени t, получим:

$$\dot{y} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\upsilon_0^2}{y} \cdot t. \tag{8.18}$$

На основании уравнений (8.16), (8.18), определим искомую величину

$$\ddot{y} = -\frac{b^4 \upsilon_0^2}{a^2 y^3}. \tag{8.19}$$

Зная проекцию ускорения $\ddot{y}$ точки можно определить проекцию Y силы на ту же ось

$$Y = -m\frac{b^4 \upsilon_0^2}{a^2 y^3} \ .$$

8.3.1. Определение закона движения точки по заданной силе и массе

Определение движения точки по заданной силе и массе приводит к интегрированию системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \mathrm{X} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \mathrm{Y} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \mathrm{Z} \end{aligned}\right\}. \quad (8.20)$$

При решении задач этого параграфа нужно придерживаться следующей последовательности.

1. Выбрать систему координатных осей, введя инерциальную систему отсчета.
2. Составить схему действующих на точку сил, а в случае несвободного движения точки предварительно применить принцип освобождения от связей.
3. Установить начальные условия движения, т. е. выразить при t = 0

$$x_0, y_0, z_0, \upsilon_{0x}, \upsilon_{0y}, \upsilon_{0z}. \quad (8.21)$$

4. Составить на основании схемы сил дифференциальные уравнения движения.
5. Проинтегрировать полученную систему уравнений, определив постоянные интегрирования из начальных условий.
6. Произвести кинематическое исследование полученного решения.

8.3.2. Прямолинейное движение

Если точка движется по прямой, то эту прямую принимают за координатную ось Ox.

В случае несвободного движения составляют одно дифференциальное уравнение (8.3):

$$m\ddot{x} = \mathrm{X}$$

и одно уравнение статики:

$$Y = 0.$$

Сила X в общем случае является функцией координаты x точки, скорости $\upsilon = \dot{x}$ и времени t, т. е.

$$X = X\left(t, x, \dot{x}\right).$$

Если

$$X = X\left(t, \upsilon\right),$$

то уравнение движения при определении скорости движения точки преобразуется к виду

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = X\left(t, \upsilon\right).$$

Это уравнение интегрируют, пользуясь методами теории дифференциальных уравнений. Если

$$X = X\left(x, \upsilon\right),$$

то для определения закона движения уравнению придают следующий вид:

$$m\upsilon\frac{d\upsilon}{dx} = X\left(x, \upsilon\right).$$

8.3.3. Криволинейное движение по плоской кривой

Задачи этого типа приводят к интегрированию системы дифференциальных уравнений:

$$mx = \mathrm{X}, \quad m\ddot{y} = \mathrm{Y}. \qquad (8.22)$$

Последовательность решения задачи, указанная выше, полностью сохраняется.

Криволинейное движение точки в пространстве часто изучают в натуральной системе координат. Дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на касательную к траектории и на главную нормаль имеют вид:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = R_\tau; \; m\frac{\upsilon^2}{\rho} = R_n, \qquad (8.23)$$

где R_τ и R_n – проекции соответственно на касательную и главную нормаль равнодействующей силы, действующей на точку.

Задача № 5

За какое время и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом вагон трамвая, движущийся по горизонтальному пути со скоростью 36 *км/час,* если сопротивление движению, развиваемое при торможении, составляет 300 *кг* на 1 *т* веса вагона.

Дано:
υ = 36 *км/час,*
Т = 300 *кг/на тонну.*

Найти:
τ –? X –?

Решение.

Будем рассматривать трамвай как материальную точку (рисунок 8.5), предполагая всю его массу сосредоточенной в центре тяжести *M.* За ось *Ox* примем прямую, по которой движется точка *M;* за начало отсчета примем то положение, в котором находилась точка *M* в момент начала торможения.

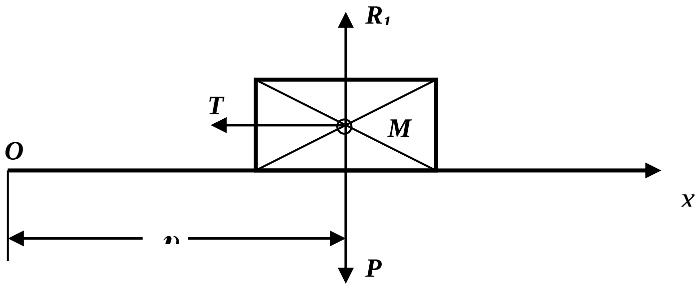


Рисунок 8.5

Исследуем движение трамвая, начиная с момента $t = 0$.

При $t = 0$ из условий задачи имеем $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 10$ *м/сек*. Заметим, что в конце движения скорость трамвая $\dot{x} = 0$.

Составим схему сил, действующих на трамвай во время торможения. Во время торможения на трамвай действует три силы: сила собственного веса *P*, реакция рельс R_1 и сопротивление торможения *T*. Считаем эти силы приложенными к точке *M*.

Составим дифференциальное уравнение движение точки *M*. Так как точка движется прямолинейно вдоль оси *Ox*, уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -T .$$

По условию задачи

$$T = 0,3P = 0,3mg ,$$

поэтому

$$\ddot{x} = -0,3g \quad . \tag{8.24}$$

Проинтегрировав уравнение (8.24), получим:

$$\dot{x} = -0,3gt + C_1 \quad , \tag{8.25}$$

где C_1 – постоянная интегрирования. При вторичном интегрировании

$$x = -\frac{0,3gt^2}{2} + C_1 t + C_2 \ , \tag{8.26}$$

где C_2 – новая постоянная интегрирования**.**

Мы нашли координату *x* как функцию времени. Выражение (8.26) содержит две произвольные постоянные. Для определения C_1 и C_2 в уравнениях (8.25) и (8.26) предположим, что $t = \tau$, где τ – время торможения, а их левые части заменим соответствующими значениями.

Тогда получим уравнения:

$$0 = \upsilon_0 - 0,3g\tau ; \tag{8.27}$$

$$x = \upsilon_0 t - \frac{0,3g\tau^2}{2}. \tag{8.28}$$

Из уравнения (8.27) определим время торможения:

$$\tau = \frac{\upsilon_0}{0,3g} = \frac{10}{0,3 \cdot 9,8} = 3,4 \ \textit{сек}.$$

Чтобы найти путь, пройденный трамваем за время торможения, подставим его значение в уравнение (8.28), тогда

$$x = 10 \cdot 3,4 - \frac{0,3 \cdot 9,81 \cdot 3,4^2}{2} = 16,9 \ \text{м}.$$

Это и есть искомый путь.

Задача № 6

Корабль движется, преодолевая силу сопротивления воды, пропорциональную квадрату скорости и равную α = 0,12 *т* при скорости 1 *м/сек*.

Сила упора винтов направлена по скорости в сторону движения и изменяется по закону $T = T_0\left(1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)$, где T_0 = 120 *т* – сила упора винтов в момент, когда корабль находится в покое; υ_0 = const = 33 *м/сек*. Определить наибольшую скорость, которую может развить корабль, а также установить закон ее изменения.

Дано:

$T = T_0\left(1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)$,

T_0 = 120 т,

α = 0,12 *т,*

υ = *1 м/сек.*

Найти:
υ –?

Решение.

Рассмотрим корабль как материальную точку *M* (рисунок 8.6). Эта точка находится в прямолинейном движении под действием активно приложенной силы упора винтов *T*; силы сопротивления воды *R*, равной

$$R = 0{,}12\upsilon^2 \ , \tag{8.29}$$

и направленной в сторону, противоположную вектору скорости; полной подъемной силы воды *Ф* и силы тяжести *P*.

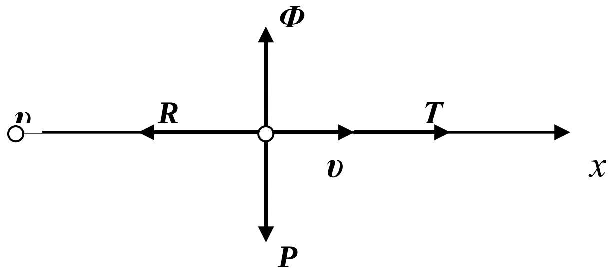


Рисунок 8.6

Дифференциальное уравнение движения точки по ее прямолинейной траектории имеет следующий вид:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = T_0\left(1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right) - \alpha\upsilon^2. \tag{8.30}$$

В момент времени, когда скорость максимальная, производная

$$\frac{d\upsilon}{dt} = 0 \ . \tag{8.31}$$

Поэтому из уравнения (8.30) получим:

$$\alpha\upsilon^2{}_{\max} + T_0\frac{\upsilon_{\max}}{\upsilon_0} - T_0 = 0. \tag{8.32}$$

Решив уравнение (8.32) относительно $\upsilon_{\max}$, получим:

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{T_0}{\alpha}\left(1 + \frac{T_0}{4\alpha\upsilon_0^{\ 2}}\right)} - \frac{T_0}{2\alpha\upsilon_0} \ , \tag{8.33}$$

и после подстановки числовых значений, имеем:

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{1239{,}5} - 15{,}2 \approx 20 \ \text{м/сек} \ \text{ или } \ 72 \text{ км/час.}$$

На основании уравнения (8.30) можно установить закон изменения скорости в функции от времени, т. к. оно принадлежит к типу уравнений с разделяющимися переменными и может быть написано в виде

$$dt = \frac{m d\upsilon}{T_0 + \dfrac{T_0^{\ 2}}{4\alpha\upsilon_0^2} - \left(\dfrac{T_0}{2\sqrt{\alpha\upsilon_0}} + \sqrt{\alpha\upsilon}\right)^2} \ . \tag{8.34}$$

Считая, что движение происходит без начальной скорости, из уравнения (8.34) легко определить:

$$\upsilon = \frac{T_0}{\sqrt{\alpha}} \frac{e^{\frac{2}{m}\sqrt{\alpha T_0 + \frac{T_0^2}{4\upsilon_0^2}}t}}{\sqrt{T_0 + \frac{T^2{}_0}{4\upsilon_0^2}} - \frac{T_0}{2\sqrt{\alpha\upsilon_0}} - e^{\frac{2}{m}\sqrt{\alpha T_0 + \frac{T_0^2}{4\upsilon_0^2}}t \cdot \left(\sqrt{T_0 + \frac{T_0^2}{4\alpha\upsilon_0^2}} + \frac{T_0}{2\sqrt{\alpha\upsilon_0}}\right)}}. \tag{8.35}$$

Из уравнения (8.35) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}\upsilon = \upsilon_{\max}$, где максимальная скорость достигается асимптотически.

Глава 9

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

9.1. Методика решения задач с помощью теоремы об изменении количества движения

Существует две формулировки теоремы об изменении количества движения материальной точки:

а) в дифференциальной форме, выражающей, что элементарное приращение количества движения равно элементарному импульсу силы:

$$m d\vec{\upsilon} = \vec{F} dt; \tag{9.1}$$

б) в интегральной форме, выражающей, что приращение количества движения материальной точки за конечный промежуток времени геометрически равно полному импульсу равнодействующей силы, действующей на точку

$$m\left(\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0\right) = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt : \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt = \vec{S}, \tag{9.2}$$

где υ – конечная скорость t – конечное время; υ_0 – начальная скорость; t_0 – начальное время; S – полный импульс сил. На основании формулы (9.2) определяют среднее значение силы, действующей на точку

$$m\left(\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0\right) = \vec{F}_{\text{ср}}\left(t - t_0\right). \tag{9.3}$$

Задачи данного типа решаются в следующей последовательности:

1) выбирают координатную систему;

2) составляют схему действующих сил, включая и реакции связей;

3) составляют на основании уравнения (9.2) три скалярных уравнения:

4) из уравнений (9.4) или определяют искомые неизвестные, или эту систему уравнений рассматривают как первые интегралы дифференциальных уравнений движения.

$$\left.\begin{aligned} m(\dot{x} - \dot{x}_0) &= S_x = \int_{t_0}^{t} X dt \\ m(\dot{y} - \dot{y}_0) &= S_y = \int_{t_0}^{t} Y dt \\ m(\dot{z} - \dot{z}_0) &= S_z = \int_{t_0}^{t} Z dt \end{aligned}\right\}. \tag{9.4}$$

Задача № 7

Поезд движется по горизонтальному и прямолинейному участку пути. При торможении развивается сила сопротивления, равная 0,1 веса поезда. В момент начала торможения скорость поезда 72 км/час. Найти время торможения и тормозной путь.

Дано:

T = 0,1 веса поезда,

υ = 72 км/час.

Найти: *t –? S –?*

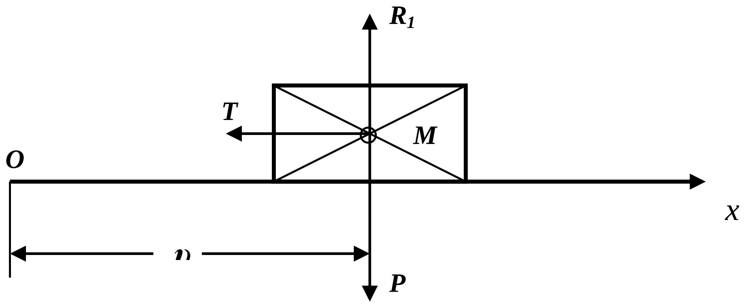


Рисунок 9.1

Решение.

Схема сил, действующих на поезд, приведена на рисунке 9.1. Применив зависимость (9.2) к прямолинейному движению и заметив, что сила сопротивления постоянна, получим:

$$m\upsilon - m\upsilon_0 = -0{,}1Pt. \qquad (9.5)$$

Согласно условию задачи конечная скорость $\upsilon = 0$, а начальная $\upsilon_0 = 20$ *м/сек.*

Поэтому из уравнения (9.5) определяем время торможения:

$$t = \frac{200}{9{,}81} = 20{,}4 \text{ сек.} \qquad (9.6)$$

Заменив в уравнении (9.5) υ через $\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}}$, после интегрирования получим:

$$s = \upsilon_0 t - \frac{0{,}1gt}{2}. \qquad (9.7)$$

Подставив значение t из уравнения (9.6) в уравнение (9.7), определим:

$$s = 20 \cdot 20{,}4 - \frac{0{,}1 \cdot 9{,}81}{2}(20{,}4)^2 = 204 \text{ м.}$$

Задача № 8

Для определения веса груженого железнодорожного состава между паровозом и вагонами установили динамометр. Среднее показание динамометра за 2 мин – 100,8 т. За это же время состав набрал скорость υ = 57,6 *км/час* (вначале состав стоял на месте). Коэффициент трения k = 0,02. Найти вес состава.

Решение.

Считаем, что железнодорожный состав движется прямолинейно (рисунок 9.2). К вагонам приложены силы: F – сила натяжения динамометра; T – сила трения; P – сила тяжести; R – нормальная реакция.

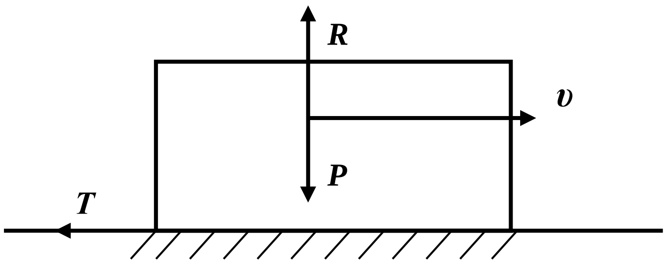


Рисунок 9.2

Так как ускорение вдоль оси *y* отсутствует, то

$$T = kP. \tag{9.8}$$

На основании теоремы об изменении количества движения материальной точки (9.2), получим:

$$\frac{P}{g}(\upsilon - \upsilon_0) = (F - T)t\ . \tag{9.9}$$

Учитывая, что $\upsilon_0 = 0$ из уравнений (9.8) и (9.9), определим:

$$P = \frac{Ftg}{\upsilon + kgt} = \frac{100{,}8 \cdot 120 \cdot 9{,}81}{16 + 0{,}02 \cdot 9{,}81 \cdot 120} = 3000\ т. \tag{9.10}$$

Задача № 9

Точка равномерно движется по окружности (рисунок 9.3) со скоростью $v = 20$ *см/сек,* делая полный оборот за время $T = 4$ сек. Найти импульс сил S, действующих на точку за время одного полупериода, если масса точки $m = 5$ *г* и определить среднее значение силы F.

Решение.

Пусть в начальный момент времени движущаяся точка занимает положение M_1, тогда за время одного полупериода она займет диаметрально противоположное положение M_2.

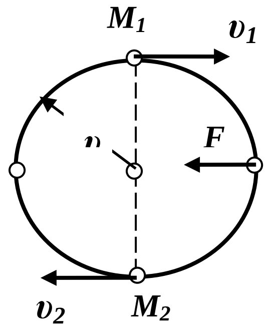


Рисунок 9.3

Согласно уравнению (9.2) импульс сил

$$\vec{S} = m\vec{\upsilon}_1 - m\vec{\upsilon}_2 = 2m\vec{\upsilon}_1, \tag{9.11}$$

так как

$$\vec{\upsilon}_1 = -\vec{\upsilon}_2.$$

Подставив в уравнение (9.11) значения m, υ_1, получим:

$$S = 2 - 5 \cdot 20 = 200\ дн.\ сек. \tag{9.12}$$

Среднее значение действующей силы из уравнения (9.3) равно:

$$\vec{F}_{ср} = \frac{\vec{S}}{\frac{T}{2}};\ \left|\vec{F}_{ср} = 100\ дн\right|, \tag{9.13}$$

и имеет направление импульса, т. е. направлено по конечной скорости.

9.2. Теорема об изменении момента количества движения

Теорема об изменении момента количества движения материальной точки в векторной форме выражается так:

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{i0}, \tag{9.14}$$

где $\vec{l}_0$ – момент количества движения относительно некоторой неподвижной точки O; $\vec{L}_{i0}$ – момент силы $\vec{F}_i$ относительно той же точки, т. е. производная по времени от момента количества движения относительно какой-нибудь неподвижной точки, геометрически равна моменту равнодействующей относительно той же точки. Аналитически момент количества движения определяется по формулам:

$$l_x = y\dot{z} - z\dot{y};\ l_y = z\dot{x} - x\dot{z};\ l_z = x\dot{y} - y\dot{x}. \tag{9.15}$$

При решении некоторых задач применяется другая формулировка этой теоремы.

Скорость точки, описывающей годограф вектора момента количества движения, вычисленного относительно точки, геометрически равна моменту равнодействующей силы относительно этого же центра:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{i0}\ . \tag{9.16}$$

Решение задач производят на основании теоремы моментов в скалярной форме:

$$\frac{dl_x}{dt} = \sum_{i=1}^{n} L_{ix},\ \frac{dl_y}{dt} = \sum_{i=1}^{n} L_{iy},\ \frac{dl_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} L_{iz}\ , \tag{9.17}$$

т. е. производная по времени от момента количества движения относительно некоторой оси $l_x, l_y\, l_z$ равна сумме моментов приложенных сил относительно этой же оси.

Необходимо обратить особое внимание на два следствия теоремы об изменении момента количества движения материальной точки.

Следствие 1. *Если момент действующей силы относительно какой-либо оси равен нулю, то момент количества движения относительно этой же оси остается постоянным.*

Следствие 2. *В случае центральной силы момент количества движения относительно центра этой силы остается постоянным.*

При решении задач, в которых применяется одно из указанных следствий, используются полярные координаты. Если ввести понятие о секторной скорости:

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{\upsilon}\ , \tag{9.18}$$

и в каждой из координатных плоскостей выбрать систему полярных координат $(\rho_i,\ \phi_i)$, то зависимостям (9.15) можно придать следующий вид:

$$l_x = 2\sigma_x,\ l_y = 2\sigma_y\ l_z = 2\sigma_z, \tag{9.19}$$

где

$$\sigma_x = \frac{1}{2}\rho_1^2 \frac{d\phi_1}{dt};\ \sigma_y = \frac{1}{2}\rho_2^2 \frac{d\phi_2}{dt};\ \sigma_z = \frac{1}{2}\rho_3^2 \frac{d\phi_3}{dt}.$$

Следствия *1* и *2* приводят к так называемым интегралам площадей, которым придают форму

$$2m\vec{\sigma} = const\ . \tag{9.20}$$

Задачи на применение теорем об изменении момента количества движения и на движение под действием центральных сил рекомендуем решать в следующей последовательности.

1. Выбрать координатные оси.
2. Составить схему действующих сил.
3. Вычислить моменты сил относительно координатных осей и проверить, не выполняются ли следствия *1* и *2*.
4. Составить уравнение (9.17) и определить из них искомые величины, либо соотношения, вытекающие из следствий *1* и *2*.

Задача № 1

Точка *M* (рисунок 9.4) движется вокруг неподвижного центра под действием силы притяжения к этому центру. Найти скорость υ_2 в наиболее удаленной от центра точки траектории, если скорость точки в наиболее близком к нему положении $\upsilon_1 = 30$ *см/сек,* а r_2 в пять раз больше r_1.

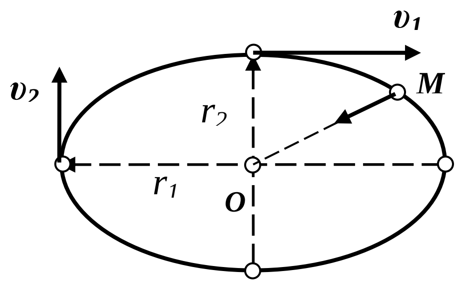


Рисунок 9.4

Решение.

Рассматривая движение точки под действием центральной силы притяжения, заметим, что в точках траектории, наиболее удаленных и наиболее близких к центру притяжения, отсутствует радиальная составляющая скорости $\upsilon_\rho = 0$, а касательная составляющая скорости υ_φ перпендикулярна к радиус-вектору, т. е.

$$\vec{\upsilon}_\phi \perp \vec{r} \tag{9.21}$$

в указанных точках. В самом деле, задав движение в полярных координатах, заметим, что полярный радиус-вектор принимает экстремальное значение в тех точках, для которых

$$\dot{\rho} = 0.$$

На основании закона моментов количества движения приходим к заключению, что в нашем случае сохраняется момент количества движения точки

$$l_0 = const \tag{9.22}$$

на протяжении всего движения, т. е. сохраняется секторная скорость движения:

$$\vec{r}_1 \times \vec{\upsilon}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{\upsilon}_2\,. \tag{9.23}$$

В точках, экстремально удаленных от центра притяжения:

$$\upsilon_2 = \frac{r_1 \upsilon_1}{r_2} = 6,\ см / сек\,.$$

9.3. Работа и мощность

Работу A постоянной силы F на прямолинейном участке пути определяют как произведение величины Fсилы на величину перемещения и на косинус угла α между ними, т. е.

$$A = F \cdot u \cdot \cos\alpha\ . \qquad (9.24)$$

Элементарная работа силы F на бесконечно малом перемещении dr вычисляется по формуле

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}\ . \qquad (9.25)$$

Если сила и элементарное перемещение заданы в системе прямоугольных координат $F(X, Y, Z)$ и $dr\ (dx, dy, dz)$, то элементарная работа определяется по формуле

$$\delta A = Xdx + Ydy + Zdz\ . \qquad (9.26)$$

Если мы имеем часть (ограниченную или неограниченную) пространства, в каждой точке которого на данную материальную точку действует вполне определенная по величине и направлению сила, то такая часть пространства называется *силовым полем.*

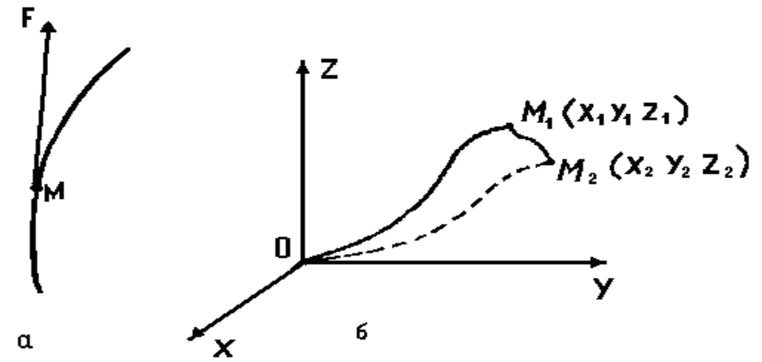


Рисунок 9.5

Представим силовое поле и поместим в этом поле материальную точку M, на которую будет действовать некоторая сила (рисунок 9.5, а).

Силовое поле называется *потенциальным полем,* если сила F, действующая в этом поле, обладает следующими двумя свойствами: 1) величина и направление силы зависит только от положения точки M; 2) работа силы на некотором пути M_1M_z (рисунок 9.5, б) точки M не зависит от кривой, по которой происходит движение точки между положениями M_1 и M_z.

Таким образом, сила тяжести, а также любая центральная сила, зависящая от расстояния точки приложения силы до центра, обладает указанными двумя свойствами.

Выражение элементарной работы потенциальных сил имеет вид:

$$\delta A = Xdx + Ydy + Zdz = -\frac{\partial U}{\partial x}dx - \frac{\partial U}{\partial y}dy - \frac{\partial U}{\partial z}dz = -dU, \qquad (9.27)$$

т. е. равна взятому с обратным знаком полному дифференциалу потенциальной функции.

Полная работа силы на криволинейном участке пути $M_1\ M_2$ определяется криволинейным интегралом

$$A_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} F ds \cos\alpha\, , \qquad (9.28)$$

взятым вдоль дуги кривой от точки M_1 до точки M_2.

В частных случаях действия потенциальных сил, работа не зависит от формы пути.

Например:

а) полная работа силы тяжести материальной точки

$$A_{1,2} = P(z_1 - z_2) \ , \tag{9.29}$$

где P – вес материальной точки; $z_1 - z_2$ – разность высот начального и конечного ее положения.

Работа силы тяжести положительна, если конечное положение ниже начального, и отрицательна в противоположном случае;

б) работа упругой силы при растяжении конца пружины на длину λ из начального состояния определяется по формуле

$$A = -\frac{c\lambda^2}{2} , \tag{9.30}$$

где c – коэффициент жесткости пружины.

Отношение работы, произведенной силой F к протекшему промежутку времени, называют мощностью. Обозначив мощность через N, получим:

$$N = \frac{\delta A}{\delta t} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} \ , \tag{9.31}$$

т. е. мощность равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости.

Мощность силы, приложенной к телу, находящемуся во вращательном движении, вычисляется по формуле

$$N = L_z(F)\omega , \tag{9.32}$$

где $L_z(F)$ – момент приложенной силы относительно оси вращения; ω – угловая скорость вращения.

Крутящий момент вычисляется по формуле

$$L_К = 71620 \frac{N}{n} \ кГ \cdot см \ , \tag{9.33}$$

где n – число оборотов в минуту.

Мощность измеряется: в лошадиных силах (*л.с.), кГ(м/сек), эрг/сек, джоуль/сек, ваттах, киловаттах*. Для перевода одних единиц мощности в другие пользуются следующей таблицей:

1 ватт = 10^7 эрг/сек = 1 Джоуль/сек = 0,102 *кГ(м/сек);*

1 киловатт = 10^3 *Вт* = 10^{10} эрг/сек = 102 *кГ(м/сек);*

1 *кГ(м/сек)* = 9,81 *Вт*;

1 *л.с.* = 75 *кГ(м/сек)* = 0,735 *кВт.*

Отношение полезной работы к фактически выполненной называется коэффициентом полезного действия (к. п. д.), т. е.

$$\eta = \frac{A_П}{A_Ф} \cdot 100\% . \tag{9.34}$$

Задача № 1

Для того чтобы поднять 5000 *м*^{3} воды на высоту 3 *м,* поставлен насос с двигателем в две *л.с.* Сколько времени потребуется для выполнения этой работы, если коэффициент полезного действия насоса 0,8?

Решение.

Как видно из формул (9.24), (9.31) и (9.34) для вычисления времени работы насоса, необходимо, в первую очередь, определить работу, затраченную на поднятие воды:

$$A = 5000 \cdot 10^3 \cdot 3 = 15 \cdot 10^6 \ кГм \tag{9.35}$$

и мощность

$$N = \frac{A}{t} = \frac{15 \cdot 10^6}{t} \; кГм / сек \, , \tag{9.36}$$

причем

$$N_{\text{п.дв}} = 2 \cdot 75 \cdot 0{,}8 \; кГм/сек. \tag{9.37}$$

Сравнив формулы (9.36) и (9.37), находим: $t = 125 \cdot 10^3$ сек = 34 час, 43 мин, 20 сек.

Задача № 2

Как велика мощность в лошадиных силах и киловаттах машины, поднимающей 84 раза в минуту молот весом 200 *кг* на высоту 0,75 *м,* если коэффициент полезного действия машины равен 0,7.

Решение.

Работа, затраченная машиной на определение силы тяжести, вычисляется по формуле (9.24), т. е.

$$A = 200 \bullet 0{,}75 = 150 \; кг. \tag{9.38}$$

Мощность машины по формуле (9.31) равна

$$N_{\text{п}} = \frac{150 \cdot 84}{60} = 210 \; кГм / сек \, . \tag{9.39}$$

Полезная мощность машины определяется на основании уравнений (9.31) и (9.34), т. е.

$$N_{\text{п}} = \frac{210}{0{,}7} = 300 \; кГ \cdot м / сек \, . \tag{9.40}$$

Мощность машины в *л с.* равна: $\frac{300}{75} = 4$ *л.с.*, а в *кВт* – 0,736 – 4 = 2,91 *кВт*.

Задача № 3

Вычислить работу, которая производится при подъеме груза в 20 *кг* по наклонной плоскости (рисунок 9.6) на расстояние 6 *м,* если угол, образуемый плоскостью с горизонтом, равен 30°, а коэффициент трения равен 0,01.

Решение.

На точку *М,* движущуюся по наклонной плоскости, действуют сила тяжести *Р*, сила трения *Т* и нормальная реакция *R*. Реакция *R* работы не производит, так как она перпендикулярна к направлению движения.

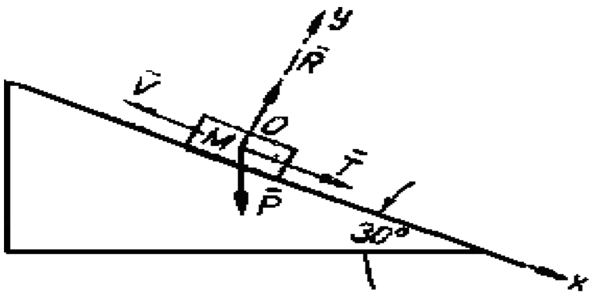


Рисунок 9.6

Сила тяжести *Р* производит работу, которую можно определить из формулы (9.24):

$$A_1 = P \cdot s \cdot \cos 120^0 = -20 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = -60 \ \text{кГм} . \qquad (9.41)$$

Сила трения T произведет работу

$$A_2 = -kNs \ . \qquad (9.42)$$

Нормальное давление N груза на опору определим из условия равновесия сил вдоль оси Oy:

$$\sum Y_1 = R - P\cos 30^0 = 0,$$

т. е. $N = P\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *кг*, поэтому

$$A_2 = -0,01 \cdot 20 \frac{\sqrt{3}}{2} 6 = -0,173 \cdot 6 = -1,04 \ \text{кГм} \ . \qquad (9.43)$$

Полная работа приложенных сил:

$$A = A_1 + A_2 = -60 - 1,04 = -61,04 \ \text{кГм} .$$

Перечень использованных источников

Айзерман М.А. Классическая механика. М.: Наука 1986.

Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Физматлит, 2004. 304 с.

Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1989.

Амелькин Н.И. Кинематика и динамика твердого тела. М.: МФТИ, 2000.

Баринова М.Ф., Голубева О.В. Задачи и упражнения по классической механике. М.: Высшая школа, 1980.

Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Т.1. М.: Наука, 1986.

Вальшиков Ю.Н., Бармин М.И. Теоретическая механика. М.: Геликон Плюс, 2009.

Добронравов В.В. Основы аналитической механики. М.: Высшая школа, 1986.

Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1983.

Дронг В.И. и др. Курс теоретической механики / под ред. К.С. Колесникова. Т.1, 2005.

Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001.

Кирсанов М.Н. Задачи по теоретической механике. М.: Физматлит, 2010.

Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. М.: Лань, 2008.

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 2007.

Терлецкий Я.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1986.

Сборник коротких задач по теоретической механике / под ред. О.Э. Кепе. М.: Лань, 2009.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3
Глава 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ 4
1.1. Основные понятия кинематики материальной точки 4
1.2. Прямолинейное движение материальной точки 6
1.3. Гармоническое колебание 9
1.4. Криволинейное движение точки 10
Глава 2. МЕТОДЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ 13
2.1. Графический способ задания движения точки 13
2.2. Координатный способ задания движения точки 14
2.3. Связь между координатными и натуральными способами задания движения точки 15
2.4. Векторный способ задания движения точки 15
2.5. Годографы 16
Глава 3. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 17
3.1. Методические указания к решению задач 17
3.2. Примеры решения задач 18
Глава 4. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА 34
4.1. Поступательное движение твердого тела 34
4.2. Вращательное движение тела вокруг неподвижной оси 34
4.3. Вращательное движение колес с зубчатым сцеплением 35
4.4. Вращательное движение при ременной передаче 37
4.5. Примеры решения задач 37
Глава 5. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ 48
5.1. Абсолютное, относительное и переносное движения 48
5.2. Методические указания к решению задач 51
5.3. Примеры решения задач 52
5.3.1. Ускорение точки, когда переносное движение поступательное 64
Глава 6. МГНОВЕННЫЕ ЦЕНТРЫ СКОРОСТЕЙ 69
6.1. Определение скоростей точек тела при помощи мгновенных центров скоростей. Центроиды 69
6.2. Неподвижная и подвижная центроиды 70
6.3. Методические указания к решению задач 70
6.4. Примеры решения задач 72
Глава 7. МГНОВЕННЫЕ ЦЕНТРЫ УСКОРЕНИЙ 80
7.1. Определение ускорений точек тела при помощи мгновенного центра ускорений 80
7.2. Методические указания к решению задач 80
7.3. Примеры решения задач 82
Глава 8. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ 85
8.1. Основные положения и аксиомы 85

8.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки 86
8.3. Примеры решения задач 86
8.3.1. Определение закона движения точки по заданной силе и массе 91
8.3.2. Прямолинейное движение 92
8.3.3. Криволинейное движение по плоской кривой 93
Глава 9. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ 97
9.1. Методика решения задач с помощью теоремы
об изменении количества движения 97
9.2. Теорема об изменении момента количества движения 100
9.3. Работа и мощность 102
ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 106

Составители:

Алымбек Токоевич Байтереков,
Нурбек Кадырмышевич Касмамытов.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Учебное пособие для студентов направления «Физика»

Редактор *И.С. Волоскова*
Компьютерная верстка *Д.Ю. Иванова*

Подписано в печать 27.02.2017
Формат $60\times84\ ^{1}/_{8}$. Печать офсетная
Объем 13,75 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 132

Издательство КРСУ
720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44

Отпечатано в типографии КРСУ
720048, г. Бишкек, ул. Горького, 2